Συνδυαστική Απαρίθμηση: Διατάξεις και Συνδυασμοί

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Διατάξεις – Μεταθέσεις

- **Διατάξεις** P(n, k): k από n διακεκριμένα αντικείμενα σε k διακεκριμένες θέσεις (1 αντικείμενο σε κάθε θέση).
  - P(n, k) = #τρόπων να πληρωθούν k διακεκριμένες θέσεις από n διακεκριμένα αντικείμενα (διαθέσιμα σε ένα «αντίγραφο»).
    $$P(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$
  - #τρόπων να πληρώσουμε 4 (διαφορετικές) θέσεις εργασίας αν έχουμε 30 υποψήφιους: P(30, 4) = 30!/26!
  - #συμβ/ρών μήκους 10 με όλα τα σύμβολα διαφορετικά από κεφαλαίους Ελληνικούς χαρακτήρες: P(24, 10) = 24!/14!
- **Μεταθέσεις** n αντικειμένων: P(n, n) = n!
  - #αναθέσεων 10 (διαφορετικών) γραφείων σε 10 καθηγητές: P(10, 10) = 10!
  - #συμβ/ρών μήκους 24 με όλα τα σύμβολα διαφορετικά από κεφαλαίους Ελληνικούς χαρακτήρες: P(24, 24) = 24!

Παραδείγματα

- #συμβ/ρών από 4 διαφορετικούς χαρακτήρες ακολουθούμενους από 3 διαφορετικά ψηφία:
  - P(24, 4) × P(10, 3)
- #τετραψήφιων δεκαδικών αριθμών που δεν αρχίζουν από 0:
  - 9×10×10×10 = 9000.
- #τετραψήφιων δεκαδικών αριθμών που δεν αρχίζουν από 0 και δεν έχουν επαναλάμβανόμενα ψηφία:
  - 9×9×8×7 = 4536.
- #συμβ/ρών (Ελληνικά) όπου Α εμφανίζεται πριν το Β και Γ:
  - P(24, 21) × 2!
- #συμβ/ρών όπου Α εμφανίζεται πριν το Β, και μετά τα Γ και Δ:
  - P(24, 20) × 2!

Μεταθέσεις με Ομάδες

- #συμβ/ρών (μήκους 8) με γράμματα λέξης ΕΦΗΒΙΚΟΣ: 8!
- #συμβ/ρών (μήκους 8) με γράμματα λέκης ΠΑΡΑΠΟΝΑ:
  - Μεταθέσεις με ομάδες ίδιων αντικειμένων: 8!/(2!3!1!1!1!)
- Μεταθέσεις n αντικειμένων σε k ομάδες ίδιων αντικειμένων με πληθάριθμο n_1, n_2, …, n_k αντίστοιχα:
  $$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$$
- #συμβ/ρών μήκους 24 από 7 Α, 8 Β, 5 Γ, και 4 Δ: 24!/(7!8!5!4!)
  - Αν πρώτο και τελευταίο Α: 22!/(5!8!5!4!)
  - Αν δεν πρέπει να εμφανίζεται ΔΔΔΔ: 24!/(7!8!5!4!) – 21!/(7!8!5!1!)
- Αριθμός (n!)! διαιρείται ακριβώς από το $(n!)^{(n-1)!}$
  - Πηλίκο = #μεταθέσεων n! αντικειμένων σε (n-1)! ομάδες με n ίδια αντικείμενα καθεμία.

Διατάξεις με Επανάληψη

- #πενταψήφιων δεκαδικών αριθμών: 10^5
- Διατάξεις με **επανάληψη**: n διακεκριμένα αντικείμενα (διαθέσιμα σε απεριόριστα «αντίγραφα») σε k διακεκριμένες θέσεις: n^k
  - Διανομή k διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές (χωρίς περιορισμό στη χωρητικότητα), όταν η σειρά στις υποδοχές δεν έχει σημασία.
- #πενταψήφιων δεκαδικών αριθμών με τουλ. ένα 8: $10^5 - 9^5$
- Πληθικός αριθμός δυναμοσυνόλου A: $2^{|A|}$
  - $|A|$ στοιχεία σε 2 υποδοχές (ανήκει – δεν ανήκει στο υποσύνολο).
- #δυαδικών συμβ/ρών μήκους n με άρτιο πλήθος από 1: 2^{n-1}
  - $\forall$ συμβ/ρά μήκους n–1, $\exists$ μοναδική συμ/ρά με άρτιο πλήθος 1.
  - Ιδέα του parity bit.

Διατάξεις με Επανάληψη

- #πενταδικών συμβ/ρών μήκους n με άρτιο πλήθος από 1:
  - #πενταδικών συμβ/ρών χωρίς 0 και 1 (άρτιο πλήθος 1): 3^n
  - Από τις υπόλοιπες $5^n - 3^n$, οι μισές περιέχουν άρτιο πλήθος 1.
    - Καθεμία περιέχει μια υπακολουθία με 0 και 1.
    - Από προηγούμενο, οι μισές υπακολουθίες έχουν άρτιο πλήθος 1.
  - Τελικά: $3^n + (5^n - 3^n)/2 = (5^n + 3^n)/2$
- #εβδομαδιαίων προγραμμάτων μελέτης για μαθήματα M, Φ, X, O ώστε κάθε μάθημα τουλάχιστον 1 ημέρα.
  - Αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού: $4^7 - |\overline{M} \cup \overline{\Phi} \cup \overline{X} \cup \overline{O}|$
    - #προγραμμάτων χωρίς 1 μάθημα: 3^7 (4 περιπτώσεις).
    - #προγραμμάτων χωρίς 2 μαθήματα: 2^7 (6 περιπτώσεις).
    - #προγραμμάτων χωρίς 3 μαθήματα: $1^7 = 1$ (4 περιπτώσεις)
    - #προγραμμάτων χωρίς 4 μαθήματα: 0
  - Τελικά: $4^7 - 4 \times 3^7 + 6 \times 2^7 - 4 = 8400$

Διατάξεις με Επανάληψη

- Διανομή k διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές (χωρίς περιορισμό χωρητικότητας) με σειρά στις υποδοχές να έχει σημασία.
  - Ιστιοφόρο έχει n κατάρτια στα οποία μπορεί να αναρτηθούν k διαφορετικές σημαίες. Πόσα διαφορετικά σήματα;

$$n(n+1)\cdots(n+k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$

- Κυκλικές μεταθέσεις n ατόμων: $(n-1)!$
  - #τρόπων που n άνθρωποι κάθονται σε κυκλικό τραπέζι.
  - #κύκλων Hamilton στο K_n με διακεκριμένες κορυφές.

Συνδυασμοί

- **Συνδυασμοί** C(n, k): #επιλογών k από n διακεκριμένα αντικείμενα (διαθέσιμα σε ένα «αντίγραφο»).

$$C(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = C(n, n-k)$$

  - Διαφορετικές 6άδες Lotto: C(49, 6)
  - #υποσυνόλων με k στοιχεία από σύνολο n στοιχείων: C(n, k)
  - #τρόπων στελέχωσης 5μελούς κοινοβουλευτικής επιτροπής, όπου μέλη ισότιμα: C(300, 5)
  - #δυαδικών συμβ/ρών με (ακριβώς) επτά 1: C(32, 7)
- #επιλογών 3 αριθμών 1-300 ώστε άθροισμα να διαιρείται από 3.
  - Αριθμοί 1-300 σε 3 ομάδες 100 αριθμών με βάση mod 3.
  - Είτε 3 από ίδια ομάδα είτε έναν από κάθε ομάδα.
  - Τελικά $3C(100, 3) + 100^3 = 1.485.100$

Συνδυασμοί με Επανάληψη

- Διαφορετικά αποτελέσματα από ρίψη 2 ζαριών: 21
- Συνδυασμοί με **επανάληψη**: k από n διακεκριμένα αντικείμενα (διαθέσιμα σε απεριόριστα «αντίγραφα»).
  - Διανομή k ίδιων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές (χωρίς περιορισμό στη χωρητικότητα).

$$C(n+k-1,k)=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}=\binom{n+k-1}{k}$$

  - Διανομές αντιστοιχούν σε μεταθέσεις k 1 και n-1 0. #1 ανάμεσα σε 0 καθορίζει #αντικειμένων σε κάθε υποδοχή.
- #διανομών k ίδιων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές ώστε καμία υποδοχή κενή ($k \geq n$).
  - $C(n + (k - n) - 1, k - n) = C(k - 1, k - n) = C(k - 1, n - 1)$

Παραδείγματα

- #ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$
  - Αν $x_i \geq 0$: $C(20 + 4 - 1, 20) = C(23, 20) = C(23, 3)$
  - Αν $x_i \geq 1$: $C(16 + 4 - 1, 16) = C(19, 16) = C(19, 3)$
  - Αν $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 4$, $x_3 \geq 1$, $x_4 \geq 5$: $C(8 + 4 - 1, 8) = C(11, 3)$
- 5 διαφορετικά γράμματα (π.χ. Α, Β, Γ, Δ, Ε) και 20 κενά _ . #συμβ/ρών που αρχίζουν και τελειώνουν με γράμμα και έχουν ανάμεσα σε διαδοχικά γράμματα τουλάχιστον 3 κενά.
  - Μεταθέσεις 5 γραμμάτων: 5!
  - 12 κενά στις 4 διακεκριμένες «υποδοχές» ανάμεσα σε γράμματα.
  - Υπόλοιπα 8 κενά στις 4 «υποδοχές» με $C(4 + 8 - 1, 8)$ τρόπους.
  - Τελικά: $C(11, 8)\ 5!$ συμβ/ρές.

Παραδείγματα

- #συμβ/ρών μήκους 24 από 7 Α, 8 Β, 5 Γ, και 4 Δ όπου δεν εμφανίζεται το ΓΑ.
  - #συμβ/ρών μήκους 19 από 7 Α, 8 Β, και 4 Δ: 19!/(7!8!4!)
  - Δημιουργούνται 20 διακεκριμένες «υποδοχές» για τα 5 Γ.
  - Εξαιρούνται οι 7 πριν από κάθε Α.
  - Διανομή 5 Γ σε 13 διακεκριμένες «υποδοχές»: C(17, 5).
  - Τελικά: [19!/(7!8!4!)]×[17!/(5!12!)].