

Συνδυαστική Απαρίθμηση

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Συνδυαστική Απαρίθμηση

- Υπολογισμός **αριθμού διαφορετικών αποτελεσμάτων** πειράματος (με συνδυαστικά επιχειρήματα).
 - **Πείραμα**: διαδικασία με συγκεκριμένο (πεπερασμένο) σύνολο παρατηρήσιμων αποτελεσμάτων.
 - Π.χ. ρίψη ζαριών, μοίρασμα τράπουλας, ανάθεση γραφείων, επιλογή password, δάδες Lotto, ...
 - Πληθάρθιος δυναμοσυνόλου: αν $|A| = n$, τότε $|P(A)| = 2^n$
 - **Βασικές αρχές και έννοιες**:
 - Κανόνες **γινομένου** και **αθροίσματος**, αρχή **εγκλεισμού – αποκλεισμού**.
 - **Διατάξεις** και **μεταθέσεις** (με ή χωρίς) επανάληψη.
 - **Συνδυασμοί** (με ή χωρίς) επανάληψη.

Κανόνας Γινομένου

- Πείραμα **A** με **n** αποτελέσματα. Πείραμα **B** με **m** αποτελέσματα.
- Αν **αποτελέσματα A και B είναι ανεξάρτητα**, τότε συνδυασμός των πειραμάτων **A και B έχει n×m αποτελέσματα**.
 - **Ανεξάρτητα**: το αποτέλεσμα του A **δεν επηρεάζει** (ως προς τον αριθμό των αποτελεσμάτων) το αποτέλεσμα του B, και αντίστροφα.
 - Π.χ. $|A \times B| = |A| \times |B|$
 - Επιλογή ενός **ψηφίου 0-9** και **ενός κεφαλαίου** Ελληνικού γράμματος:
 - $10 \times 24 = 240$ διαφορετικά αποτελέσματα.
 - #συμβ/ρών (με κεφαλαία Ελληνικά) μήκους 10: 24^{10}
 - #παλινδρομικών συμβ/ρών μήκους 10: 24^5
 - #πινακίδων αυτοκινήτων: $24 \times 24 \times 24 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 124.416.000$
 - #συναρτήσεων από A στο B ($|A| = n$, $|B| = m$): m^n
 - #συναρτήσεων 1-1 από A στο B ($m \geq n$): $m(m-1)\dots(m-n+1)$

Κανόνας Γινομένου

- #διμελών σχέσεων στο σύνολο A, $|A| = n$:
 - Όλες: 2^{n^2}
 - Ανακλαστικές: $2^{n(n-1)}$
 - Συμμετρικές: $2^{n(n+1)/2}$
 - Αντισυμμετρικές: $2^n \times 3^{n(n-1)/2}$
 - Αλυσίδες (σχέσεις ολικής διάταξης): $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Κανόνες Αθροίσματος

- Πείραμα **A** με **n** αποτελέσματα. Πείραμα **B** με **m** αποτελέσματα.
- Αν αποτελέσματα **A** και **B** είναι **αμοιβαία αποκλειόμενα**, τότε συνδυασμός των πειραμάτων **A** ή **B** έχει **n+m** αποτελέσματα.
 - **Αμοιβαία αποκλειόμενα**: η παρατήρηση αποτελέσματος του **A** αποκλείει την παρατήρηση αποτελέσματος του **B**, και αντίστροφα.
 - $|A \cup B| = |A| + |B|$, αν $|A \cap B| = \emptyset$
 - Αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- 5 Ελληνικά, 7 Αγγλικά, και 10 Γερμανικά βιβλία.
 - Τρόποι να **διαλέξουμε 2** βιβλία: $22 \times 21 / 2 = 231$.
 - Τρόποι να **διαλέξουμε 2** βιβλία σε **διαφορετική γλώσσα**:
 - Ελλ. – Αγγλ.: $5 \times 7 = 35$
 - Ελλ. – Γερμ.: $5 \times 10 = 50$
 - Αγγλ. – Γερμ.: $7 \times 10 = 70$
 - **Αμοιβαία αποκλειόμενα**. Σύνολο: **155** διαφορετικές επιλογές.

Παραδείγματα

- **#passwords** με 6 – 8 χαρακτήρες αποτελούμενα από κεφαλαία (Αγγλικά) γράμματα και (τουλάχιστον ένα) δεκαδικό ψηφίο.
 - **#passwords** μήκους $k = 36^k - 26^k$
 - **#passwords** = $(36^6 + 36^7 + 36^8) - (26^6 + 26^7 + 26^8)$
- **#passwords** μήκους 2 από A, B, C, D και 0, 1, 2 με τουλάχιστον ένα ψηφίο.
 - Σωστό το $7^2 - 4^2 = 33$. **Λάθος** το (γιατί;) $2 \times 3 \times 7 = 42!$
- **#δυσδικών συμβ/ρών** μήκους 8 που **είτε** αρχίζουν από 1 **είτε** τελειώνουν σε 00:
 - Όχι αμοιβαία αποκλειόμενα: $2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$.