Αρχή του Περιστερώνα

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Συναρτήσεις

- **Συνάρτηση**: διμελής σχέση $R \subseteq A \times B$ όπου για κάθε $\alpha \in A$, υπάρχει μοναδικό $\beta \in B$ τ.ω. $(\alpha, \beta) \in R$.
  - A: πεδίο ορισμού. B: πεδίο τιμών. $R(\alpha) = \beta$: β εικόνα α (ως προς R).
  - Πίνακας R: γραμμές έχουν ένα μόνο 1.
  - Γράφημα R: κορυφές A έχουν προς-τα-έξω βαθμό = 1.
- f συνάρτηση **1-1**: $\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow f(\alpha_1) \neq f(\alpha_2)$.
  - Δεν υπάρχουν δύο στοιχεία με ίδια εικόνα.
- f συνάρτηση **επί**: για κάθε $\beta \in B$, υπάρχει $\alpha \in A$ με $f(\alpha) = \beta$.
  - Κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα κάποιου στοιχείου του A.
- f αμφιμονοσήμαντη: 1-1 και επί.
  - f αντιστοιχία μεταξύ στοιχείων A και B.
  - Αντίστροφη f^{-1} είναι συνάρτηση ανν f αμφιμονοσήμαντη.

Αρχή Περιστερώνα

- Αν $|A| > |B|$, **δεν** υπάρχει 1-1 συνάρτηση από A στο B.
  - Για κάθε συνάρτηση f, υπάρχουν $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ τ.ω. $f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$.
  - Αν n περιστέρια σε m φωλιές και $n > m$, φωλιά με ≥ 2 περιστέρια.
- Για κάθε συνάρτηση f από A στο B, υπάρχουν $\geq k = \lceil |A|/|B| \rceil$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in A$ με $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = \ldots = f(\alpha_k)$.
  - Αν n περιστέρια σε m φωλιές, φωλιά με $\geq \lceil n/m \rceil$ περιστέρια.
- Τετριμμένα παραδείγματα:
  - Σε κάθε σύνολο 13 ανθρώπων, υπάρχουν ≥ 2 γεννημένοι ίδιο μήνα.
  - Στον κόσμο ζουν ≥ 2 άνθρωποι γεννημένοι το ίδιο δευτερόλεπτο.
  - Στην Ελλάδα ζουν ≥ 2 άνθρωποι γεννημένοι το ίδιο πεντάλεπτο.
  - Σε κάθε πάρτυ, υπάρχουν δύο καλεσμένοι με τον ίδιο αριθμό φίλων στο πάρτυ (υποθ: σχέση φίλος συμμετρική, όχι ανακλαστική).

Παραδείγματα

- Σε κάθε σύνολο 1000 φυσικών, υπάρχουν $x \neq y$: $573 \mid (x - y)$.
  - Ποσότητες που αντιστοιχούν σε «περιστέρια» και «φωλιές»;
  - «Περιστέρια»: 1000 φυσικοί.
  - «Φωλιές»: 573 διαφορετικές τιμές για n mod 573.
- Για κάθε σύνολο 10 (διαφορετικών) φυσικών < 100, υπάρχουν δύο διαφορετικά υποσύνολα με ίδιο άθροισμα.
  - «Περιστέρια»: $2^{10} - 1 = 1023$ διαφορετικά μη κενά υποσύνολα.
  - «Φωλιές»: Πιθανές τιμές για αθροίσματα υποσυνόλων (≤ 946).
- Αν θεωρήσουμε 26 διαφορετικά υποσύνολα του {1, ..., 9} με 3 στοιχεία το πολύ, δύο από αυτά έχουν το ίδιο άθροισμα.
  - «Περιστέρια»: 26 διαφορετικά υποσύνολα.
  - «Φωλιές»: Πιθανές τιμές για αθροίσματα υποσυνόλων (≤ 25).

Παραδείγματα

- Αν 7 διαφορετικοί αριθμοί επιλεγούν από το {1, 2, ..., 11}, 2 από αυτούς αθροίζονται στο 12.
  - «Περιστέρια»: 7 επιλεγμένοι αριθμοί.
  - «Φωλιές»: 6 «ζευγάρια» αριθμών που αθροίζονται στο 12.
    - {1, 11}, {2, 10}, {3, 9}, {4, 8}, {5, 7}, {6}.
    - {6} «δέχεται» έναν αριθμό το πολύ (μόνο το 6).
    - Επιλέγουμε και τους δύο αριθμούς κάποιου άλλου ζευγαριού.
- Αν n+1 διαφορετικοί αριθμοί επιλεγούν από το {1, ..., 2n−1}, 2 από αυτούς αθροίζονται στο 2n.
  - «Περιστέρια»: n+1 επιλεγμένοι αριθμοί.
  - «Φωλιές»: n «ζευγάρια» αριθμών που αθροίζονται στο 2n.
    - {n} «δέχεται» έναν αριθμό το πολύ (μόνο το n).

Παραδείγματα

- Αν επιλέξουμε n+1 φυσικούς από {1, 2, ..., 2n}, υπάρχουν δύο που ο ένας διαιρεί τον άλλο.
  - «Περιστέρια»: n+1 επιλεγμένοι αριθμοί.
  - «Φωλιές»: n περιττοί αριθμοί στο {1, 2, ..., 2n}.
    - Αριθμός x στη «φωλιά» m ανν m μεγαλύτερος περιττός διαιρέτης του x ($x = 2^k m$, για κάποιο $k \geq 0$).
    - Αριθμοί x και y στην ίδια «φωλιά»: $x = 2^k m$ και $y = 2^s m$, άρα είτε x | y είτε y | x.

Παραδείγματα

- Αν επιλέξουμε n+1 φυσικούς από {1, 2, ..., 2n}, υπάρχουν δύο που είναι σχετικά πρώτοι.
  - Αρκεί νδο υπάρχουν δύο αριθμοί α, β: β = α+1.
  - «Περιστέρια»: n+1 επιλεγμένοι αριθμοί.
  - «Φωλιές»: n ζεύγη «συνεχόμενων» αριθμών στο {1, 2, ..., 2n}.
    - {1, 2}, {3, 4}, ..., {2n − 1, 2n}.
- Αν επιλέξουμε n+1 φυσικούς υπάρχουν δύο που η διαφορά τους διαιρείται από το n.
  - «Περιστέρια»: n+1 επιλεγμένοι αριθμοί.
  - «Φωλιές»: n υπόλοιπα διαίρεσης με n ({0, 1, …, n-1}).
  - Δύο αριθμοί σε ίδια «φωλιά»: διαφορά τους διαιρείται από n.

Αριθμοί Ramsey

- Σε κάθε σύνολο 6 ανθρώπων, είτε 3 φίλοι είτε 3 άγνωστοι.
  - Για κάθε χρωματισμό ακμών στο K_6 με μπλε και κόκκινο, υπάρχει μονοχρωματικό K_3.
- Υπάρχει άνθρωπος α που έχει είτε 3 φίλους είτε 3 αγνώστους.
  - Χβτγ. υποθέτουμε ότι α έχει 3 φίλους: β, γ, δ.
  - Αν στους β, γ, δ δύο φίλοι (π.χ. β. γ): έχουμε 3 φίλους (α, β, γ).
  - Αν στους β, γ, δ όλοι άγνωστοι: έχουμε 3 άγνωστους (α, β, γ).
- R(m, s) = ελάχιστο n τ.ω για κάθε χρωματισμό ακμών του K_n με μπλε και κόκκινο, υπάρχει είτε μπλε K_m είτε κόκκινο K_s.
  - $R(m, s) = R(s, m)$ και $R(m, s) \leq R(m-1, s) + R(m, s-1)$.
  - Αντίστοιχα για περισσότερα από 2 χρώματα.
  - ∀ χρωματισμό ακμών ενός μεγάλου πλήρους γραφήματος, υπάρχει μονοχρωματικό πλήρες υπογράφημα επιθυμητού μεγέθους.

Παραδείγματα

- Σε κάθε ακολουθία n^2+1 διαφορετικών αριθμών, υπάρχει είτε αύξουσα υπακολουθία μήκους $n+1$ είτε φθίνουσα υπακολουθία μήκους $n+1$.
  - Υπακολουθία προκύπτει με διαγραφή κάποιων αριθμών (αλλά διατηρώντας την αρχική σειρά).
  - Να το αποδείξετε με αρχή περιστερώνα.
  - Να το αποδείξετε (και) ορίζοντας κατάλληλο poset και μελετώντας μήκη αλυσίδων και μεγέθη αντιαλυσίδων (βλ. Liu, ασκήσεις 4.41, 4.42).