Σχέσεις Ισοδυναμίας

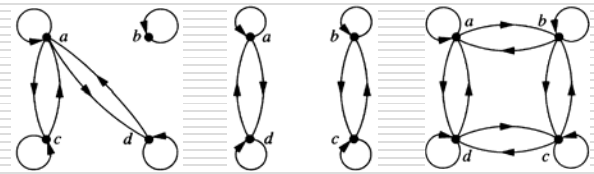
Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχέση Ισοδυναμίας

- Σχέση **Ισοδυναμίας**: ανακλαστική, συμμετρική, και μεταβατική.
  - Άνθρωποι: ίδιο επώνυμο, κατοικούν ίδια πολυκατοικία, ...
  - Πραγματικοί αριθμοί: $|\alpha| = |\beta|$, $\alpha - \beta$ είναι ακέραιος, ...
  - Φυσικοί αριθμοί: $\alpha \equiv \beta \pmod{n}$
- Ποιες από τις παρακάτω είναι σχέσεις ισοδυναμίας;



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Κλάση Ισοδυναμίας

- Θεωρούμε σχέση ισοδυναμίας $R \subseteq A \times A$.
- Κλάση ισοδυναμίας στοιχείου α (συμβ. $[\alpha]_R$ ή απλά $[\alpha]$):
  - $[\alpha]_R = \{\beta \in A : (\alpha, \beta) \in R\}$ (στοιχεία που σχετίζονται με α).
  - Αντιπρόσωπος κλάσης $[\alpha]_R$: οποιοδήποτε στοιχείο $\beta \in [\alpha]_R$.
  - Ανακλαστική: $\alpha \in [\alpha]_R$.
  - Συμμετρική: Αν $\beta \in [\alpha]_R$, τότε και $\alpha \in [\beta]_R$.
  - Μεταβατική: Αν $\beta, \gamma \in [\alpha]_R$, τότε $(\beta, \gamma) \in R$.

Διαμέριση ως Σχέση Ισοδυναμίας

- Διαμέριση A: συλλογή μη κενών υποσυνόλων $\{A_1, \ldots, A_k\}$:
  - Ανά δύο ξένα μεταξύ τους ($A_i \cap A_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$).
  - Ένωσή τους είναι το A ($A_1 \cup \ldots \cup A_k = A$).
  - $A_1, \ldots, A_k$ καλούνται σύμπλοκα της διαμέρισης.
- Αντιστοιχία μεταξύ διαμερίσεων συνόλου A και σχέσεων ισοδυναμίας στο A.
- Διαμέριση $\{A_1, \ldots, A_k\}$. Σχέση $R = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in A_i\}$ αποτελεί σχέση ισοδυναμίας.
  - Ανακλαστική και συμμετρική (προφανές από ορισμό R).
  - Μεταβατική: Αν $\alpha, \beta \in A_i$ και $\beta, \gamma \in A_i$, τότε και $\alpha, \gamma \in A_i$.

Σχέση Ισοδυναμίας ως Διαμέριση

- Κλάσεις σχέσης ισοδυναμίας R αποτελούν διαμέριση A.
- Για κάθε α, β ∈ A, είτε [α] = [β] είτε [α] ∩ [β] = ∅,
  (και βέβαια [α], [β] μη κενά).
  - Απαγωγή σε άτοπο: έστω [α] ≠ [β] **και** [α] ∩ [β] ≠ ∅.
  - Χβτγ., υποθέτουμε ότι [β] − [α] ≠ ∅.
  - Στοιχείο γ ∈ [β], αλλά γ ∉ [α].
  - Θεωρούμε στοιχείο δ ∈ [α] ∩ [β].
  - (δ, β) ∈ R, αφού (β, δ) ∈ R και συμμετρική, και (β, γ) ∈ R.
    - Μεταβατική: (δ, γ) ∈ R.
  - (α, δ) ∈ R και (δ, γ) ∈ R.
    - Μεταβατική (α, γ) ∈ R. Δηλαδή γ ∈ [α], άτοπο!
- Διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίες: μη κενές, ξένες ανά δυο, και ως ένωση έχουν A (κάθε στοιχείο ανήκει σε κλάση).

Εκλέπτυνση Ισοδυναμίας

- R_1 και R_2 σχέσεις ισοδυναμίας στο σύνολο A,
  π_1 και π_2 αντίστοιχες διαμερίσεις του A.
- π_1 εκλέπτυνση της π_2 ($\pi_1 \leq \pi_2$) αν $R_1 \subseteq R_2$.
  - Στοιχεία στο ίδιο σύμπλοκο π_1 ανήκουν στο ίδιο σύμπλοκο π_2.
  - Π.χ. κατοικούν στο ίδιο διαμέρισμα, στην ίδια πολυκατοικία, στο ίδιο οικοδομικό τετράγωνο, στην ίδια πόλη.
- Γινόμενο $\pi_1 \cdot \pi_2$ τη διαμέριση της σχέσης ισοδυναμίας $R_1 \cap R_2$.
  - Στοιχεία στο ίδιο σύμπλοκο π_1 και π_2, στο ίδιο σύμπλοκο $\pi_1 \cdot \pi_2$
  - Γινόμενο $\pi_1 \cdot \pi_2$ αποτελεί εκλέπτυνση των π_1 και π_2.
- Άθροισμα $\pi_1 + \pi_2$ τη διαμέριση της σχέσης ισοδυναμίας $(R_1 \cup R_2)^*$.
  - Στοιχεία στο ίδιο σύμπλοκο π_1 ή π_2, στο ίδιο σύμπλοκο $\pi_1 + \pi_2$
  - π_1 και π_2 αποτελούν εκλεπτύνσεις του αθροίσματος $\pi_1 + \pi_2$.