Κλειστότητες Σχέσεων

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**

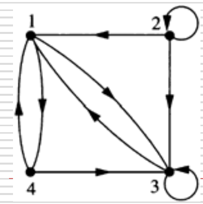
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

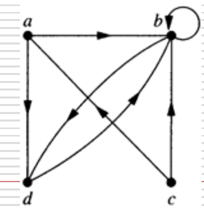
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

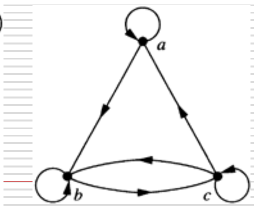
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Κλειστότητα Σχέσης

- **Κλειστότητα** σχέσης R ως προς ιδιότητα P: σχέση S που
  (α) περιέχει την R (δηλ. $R \subseteq S$),
  (β) έχει την ιδιότητα P, και
  (γ) είναι «ελάχιστη», δηλ. περιέχεται σε κάθε σχέση που έχει (α), (β).
- Κλειστότητα επεκτείνει R όσο χρειάζεται ώστε να έχει ιδιότητα P.
- Ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική κλειστότητα;







Ανακλαστική Κλειστότητα

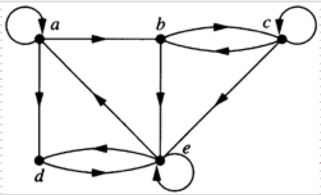
- ... σχέσης $R \subseteq A \times A$: $R \cup \{(\alpha, \alpha): \alpha \in A\}$.
  - Περιέχει R, είναι ανακλαστική, είναι ελάχιστη.
- Ανακλαστική κλειστότητα σχέσης $R = \{(\alpha, \beta): \alpha < \beta\}$;
  - $R' = \{(\alpha, \beta): \alpha \leq \beta\}$.

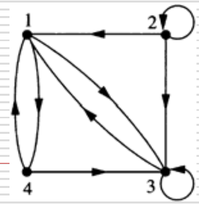
Συμμετρική Κλειστότητα

- ... σχέσης $R \subseteq A \times A$: $R \cup R^{-1}$.
  - $R \cup \{(\beta, \alpha): (\alpha, \beta) \in R\}$
  - Περιέχει R, είναι συμμετρική, είναι ελάχιστη.
- Συμμετρική κλειστότητα σχέσης $R = \{(\alpha, \beta): \alpha < \beta\}$;
  - $R'' = \{(\alpha, \beta): \alpha \neq \beta\}$.

Μεταβατική Κλειστότητα

- «Διαδρομή» μήκους $k \geq 0$ σε σχέση R: ακολουθία $a_0, \ldots, a_k \in A$ τ.ω. $(a_i, a_{i+1}) \in R$ για κάθε $i < k$.
- $R^n = \{(\alpha, \beta) :$ υπάρχει α – β διαδρομή μήκους n στην $R\}$, $n \geq 1$.
- R μεταβατική ανν $R^n \subseteq R$, για κάθε $n \geq 1$.
- $R^* = \{(\alpha, \beta) :$ υπάρχει α – β διαδρομή στην $R\}$ ή $R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$
  - Αν R μεταβατική, τότε $R^* = R$ ($R \subseteq R^*$ και $R^* \subseteq R$).





Μεταβατική Κλειστότητα

- Μεταβατική κλειστότητα σχέσης $R = R^*$.
  - $R \subseteq R^*$: ακμή (α, β) είναι διαδρομή μήκους 1.
  - R^* μεταβατική: α – β, β – γ διαδρομές, α – β – γ διαδρομή.
  - R^* ελάχιστη: έστω S μεταβατική σχέση με $R \subseteq S$. Θδο. $R^* \subseteq S$.
    - S μεταβατική $\Rightarrow S = S^*$.
    - $R \subseteq S \Rightarrow R^* \subseteq S^*$ (κάθε διαδρομή στην R είναι διαδρομή στην S).
    - Άρα $R^* \subseteq S$.

Υπολογισμός R^*

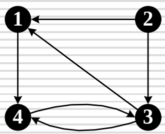
- α – β διαδρομή στην R ανν α – β διαδρομή μήκους $\leq |A|$.
  - Συντομότερη α – β διαδρομή στην R έχει μήκος $> |A|$: κάποια κορυφή επαναλαμβάνεται (διαδρομή περιέχει κύκλο).
  - Αφαίρεση κύκλου: α – β διαδρομή με μικρότερο μήκος. Άτοπο!
- Υπολογισμός R^*: $R^* = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$
  - R^k με Boolean πολλαπλασιασμό πινάκων από R^{k-1} και R.
  - Ένωση με λογική διάζευξη πινάκων.
  - Χρόνος: $O(n^4)$.

Αλγόριθμος Warshall

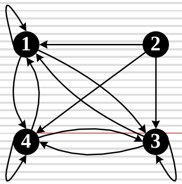
- Για R^* ισχύει ότι: $R^*(i,j) = \exists k (R^*(i,k) \wedge R^*(k,j))$
  - Υπολογισμός με παραπάνω ιδέα μοιάζει με **φαύλο κύκλο**: $R^*(i, j)$ απαιτεί $R^*(i, k)$ και το $R^*(i, k)$ απαιτεί το $R^*(i, j)$.
- Όμως γίνεται προσεκτικά και συστηματικά (Warshall)!
  - Αυθαίρετη αρίθμηση στοιχείων (κορυφών) του A: {1, 2, ..., n}
  - $P^{[k]} = \{(i, j): \exists\, i - j$ διαδρομή με εσωτερικές κορυφές μόνο από $[k]\}$
  - Ισχύει ότι $R^* = P^{[n]}$.
  - $P^{[0]} = R$ και $P^{[k]}(i,j) = P^{[k-1]}(i,j) \vee (P^{[k-1]}(i,k) \wedge P^{[k-1]}(k,j))$

Αλγόριθμος Warshall

- $P^{[k]}$ = { (i, j): ∃ i – j διαδρομή με εσωτερικές κορυφές ∈ [k] }
- $P^{[0]} = R$ και $P^{[k]}(i,j) = P^{[k-1]}(i,j) \vee (P^{[k-1]}(i,k) \wedge P^{[k-1]}(k,j))$
  - Ισχύει ότι $R^* = P^{[n]}$.



$$P^{[0]} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^{[1]},\ P^{[2]} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$P^{[3]} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{[4]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Αλγόριθμος Warshall

- $P^{[k]}$ = { (i, j): ∃ i – j διαδρομή με εσωτερικές κορυφές ∈ [k] }
- $P^{[0]} = R$ και $P^{[k]}(i,j) = P^{[k-1]}(i,j) \vee (P^{[k-1]}(i,k) \wedge P^{[k-1]}(k,j))$
- Για R^* υπολογίζουμε n πίνακες $P^{[1]}, P^{[2]}, \ldots, P^{[n]} = R^*$.
  - Πίνακας $P^{[k]}$ υπολογίζεται από $P^{[k-1]}$ σε χρόνο $O(n^2)$.
  - Χρόνος: $O(n^3)$. Υλοποίηση: τετριμμένη!
- Αλγόριθμος Floyd-Warshall:
  - Υπολογισμός συντομότερων μονοπατιών μεταξύ όλων των κορυφών.