

# Σχέσεις

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



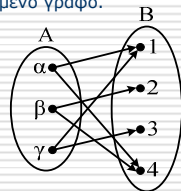
# Διμελής Σχέση

- Διατεταγμένο ζεύγος  $(a, b)$ :
  - Δύο αντικείμενα (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικά) σε καθορισμένη σειρά.
  - **Γενίκευση**: διατεταγμένη τριάδα  $(a, b, \gamma)$ , διατεταγμένη n-άδα  $(a_1, \dots, a_n)$ .
- Καρτεσιανό γινόμενο  $A \times B$ :
  - $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ και } b \in B\}$
  - **Γενίκευση**:  $A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in A_i, \dots, a_n \in A_n\}$
- Διμελής σχέση  $R$  από σύνολο  $A$  σε σύνολο  $B$ :  $R \subseteq A \times B$ .
  - $a$  σχετίζεται με  $b$  (στην  $R$ ):  $(a, b) \in R$ .
  - $A = \{a, b, \gamma\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $R = \{(a, 1), (a, 4), (b, 2), (b, 4), (\gamma, 1), (\gamma, 3)\}$
  - $A$  φοιτητές,  $B$  μαθήματα,  $R$  δηλώσεις μαθημάτων.
  - $A$  υποψήφιοι εργαζόμενοι,  $B$  εταιρείες,  $R$  αιτήσεις πρόσληψης.
- Τριμελής σχέση  $R$ :  $R \subseteq A \times B \times \Gamma$ .  
n-μελής σχέση  $R$ :  $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$ .

# Αναπαράσταση

- Αναπαράσταση διμελούς σχέσης  $R$ :
  - **Σύνολο**: παράθεση διατεταγμένων ζευγών.
  - **Κατηγορία**: χαρακτηριστική ιδιότητα σχετιζόμενων στοιχείων.
  - **Συσχέτιση**: Boolean πίνακας, κατευθυνόμενο γράφο.

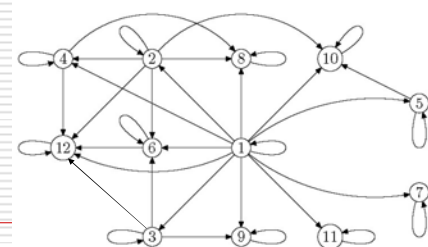
	1	2	3	4
$\alpha$	1	0	0	1
$\beta$	0	1	0	1
$\gamma$	1	0	1	0



$A = \{a, b, \gamma\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  
 $R = \{(a, 1), (a, 4), (b, 2), (b, 4), (\gamma, 1), (\gamma, 3)\}$

# Στο Ίδιο Σύνολο

- Διμελής σχέση  $R$  στο σύνολο  $A$ :  $R \subseteq A \times A$ .
  - Σχέσεις μεταξύ αριθμών ( $<$ ,  $\geq$ ,  $a$  διαιρεί  $b$ , ...), ανθρώπων, συνόλων, κλπ.
  - Γράφημα: κορυφές στοιχεία  $A$ , ακμή  $(a, b)$  δηλώνει  $(a, b) \in R$ .
  - Πόσες διαφορετικές σχέσεις στο  $A$ ,  $|A| = n$ ;

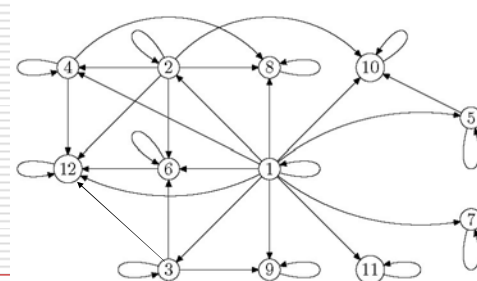


## Ιδιότητες Διμελών Σχέσεων

- **Ανακλαστική:** για κάθε  $a \in A$ ,  $(a, a) \in A$ .
  - Συμπληρωμένη διαγώνιος. Όλες οι κορυφές έχουν ανακύκλωση.
- **Συμμετρική:** για κάθε  $(a, \beta) \in A$ , έχουμε  $(\beta, a) \in A$ .
  - Συμμετρία ως προς διαγώνιο. Μη κατευθυνόμενο γράφημα.
- **Αντισυμμετρική:** Αν  $(a, \beta), (\beta, a) \in A$ , τότε  $a = \beta$ .
  - Εκτός διαγώνιου,  $\leq 1$  από κάθε ζεύγος «συμμετρικών» θέσεων.  $\leq 1$  ακμή για κάθε ζεύγος διαφορετικών κορυφών.
  - Υπάρχει σχέση συμμετρική και αντισυμμετρική;
- **Μεταβατική:** για κάθε  $(a, \beta), (\beta, \gamma) \in A$ , έχουμε  $(a, \gamma) \in A$ .
  - Αν υπάρχει  $a - \gamma$  μονοπάτι, τότε υπάρχει  $(a, \gamma)$  ακμή.

## Παραδείγματα

- Σχέση  $a|b$  ( $a$  διαιρεί  $\beta$ , στο  $N$ ).
  - Ανακλαστική, όχι συμμετρική, αντισυμμετρική, μεταβατική.
  - Π.χ. γράφημα σχέσης  $a|b$  στο  $[12]$ .



## Παραδείγματα

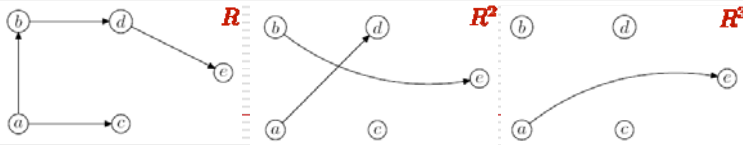
- $R_1 = \{(a, \beta) : a \leq \beta\}$ 
  - Ανακλαστική, όχι συμμετρική, αντισυμμετρική, μεταβατική.
- $R_2 = \{(a, \beta) : a > \beta\}$ 
  - Όχι ανακλαστική, όχι συμμετρική, αντισυμμετρική, μεταβατική.
- $R_3 = \{(a, \beta) : a = \beta \text{ ή } a = -\beta\}$ 
  - Ανακλαστική, συμμετρική, όχι αντισυμμετρική, μεταβατική.
- $R_4 = \{(a, \beta) : a = \beta\}$ 
  - Ανακλαστική, συμμετρική, αντισυμμετρική, μεταβατική.
- $R_5 = \{(a, \beta) : a + \beta \leq 3\}$ 
  - Όχι ανακλαστική, συμμετρική, όχι αντισυμμετρική, όχι μεταβατική.
- $R_6 = \{(A, B) : A \subseteq B\}$ 
  - Ανακλαστική, όχι συμμετρική, αντισυμμετρική, μεταβατική.

## Πράξεις μεταξύ Σχέσεων

- Σχέσεις (στα ίδια σύνολα) συνδυάζονται με **πράξεις συνόλων**:
  - Ένωση, τομή, διαφορά, συμπλήρωμα, συμμετρική διαφορά.
  - Πως υπολογίζονται από αναπαράσταση με πίνακα ή γράφημα;
- **Αντίστροφη** σχέση  $R^{-1} = \{(\beta, a) : (a, \beta) \in R\}$ 
  - R φοιτητές δηλώνουν μαθήματα:  
 $R^{-1}$  μαθήματα δηλώνονται από φοιτητές.
  - Ανάστροφος πίνακας, αντιστροφή φοράς των ακμών.
- **Σύνθεση**  $S \circ R \subseteq A \times \Gamma$  σχέσεων  $R \subseteq A \times B$  και  $S \subseteq B \times \Gamma$ :
  - $S \circ R = \{(a, \gamma) : \exists \beta \text{ τ.ω. } (a, \beta) \in R \text{ και } (\beta, \gamma) \in S\}$
  - Σύνθεση συναρτήσεων προκύπτει ως ειδική περίπτωση.
  - Δεν είναι αντιμεταθετική!
  - Υπολογισμός με Boolean πολλαπλασιασμό πινάκων.

## Πράξεις μεταξύ Σχέσεων

- Σύνθεση σχέσης  $R \subseteq A \times A$  με τον εαυτό της:  $R^2 = R \circ R$ .
- $n$ -οστή «δύναμη» σχέσης  $R \subseteq A \times A$ :  $R^n = R^{n-1} \circ R$ ,  $R^1 = R$ .
  - $R^3 = (R \circ R) \circ R$ ,  $R^4 = ((R \circ R) \circ R) \circ R$ , ...
  - Υπολογισμός με Boolean πολλαπλασιασμό πινάκων.
  - «Διαδρομή» μήκους  $k \geq 0$  σε σχέση  $R$ : ακολουθία  $a_0, \dots, a_k \in A$  τ.ω.  $(a_i, a_{i+1}) \in R$  για κάθε  $i < k$ .
  - $R^n = \{ (a, \beta) : \text{υπάρχει } a - \beta \text{ διαδρομή μήκους } n \text{ στην } R \}$ 
    - Απόδειξη με επαγωγή (άσκηση).



## Πράξεις μεταξύ Σχέσεων

- Σχέση  $R \subseteq A \times A$  **μεταβατική** αν  $R^n \subseteq R$  για  $n = 1, 2, 3, \dots$
- $R^n \subseteq R$  για  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Άρα και  $R^2 \subseteq R$ .
  - Για κάθε  $(a, \beta), (\beta, \gamma) \in R$ , έχουμε  $(a, \gamma) \in R^2 \subseteq R$ .
  - Άρα  $(a, \gamma) \in R$ , και  $R$  μεταβατική.
- $R$  μεταβατική. Απόδειξη με επαγωγή ότι  $R^n \subseteq R$ , για  $n = 1, 2, \dots$ 
  - Βάση:  $R \subseteq R$ , ισχύει τετριμμένα για  $n = 1$ .
  - Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι  $R^n \subseteq R$  για αυθαίρετο  $n \geq 1$ .
  - Επαγωγικό βήμα: Όδο  $\forall (a, \gamma) \in R^{n+1}, (a, \gamma) \in R$ .
    - $(a, \gamma) \in R^{n+1}$
    - (ορισμός  $R^{n+1}$ )  $\Rightarrow \exists \beta$  τ.ω.  $(a, \beta) \in R$  και  $(\beta, \gamma) \in R^n$
    - (επαγ. υπόθ.  $R^n \subseteq R$ )  $\Rightarrow \exists \beta$  τ.ω.  $(a, \beta) \in R$  και  $(\beta, \gamma) \in R$
    - ( $R$  μεταβατική)  $\Rightarrow (a, \gamma) \in R$

## Σχεσιακές Βάσεις Δεδομένων

- (Συστήματα Διαχείρισης) Βάσεων Δεδομένων (DBMSs) επιτρέπουν αποδοτική αποθήκευση και επεξεργασία μεγάλου όγκου δεδομένων.
- Σχεσιακές ΒΔ βασίζονται σε  $n$ -μελείς σχέσεις:
  - Δεδομένα αποθηκεύονται σε πίνακες.
  - Πίνακας:  $n$ -μελής σχέση (στήλες: πεδία, #στηλών: βαθμός πίνακα).
  - Στοιχεία σχέσης: εγγραφές.

Πίνακας 1: Φοιτητές			
Επώνυμο	Όνομα	Ον. Πατέρα	A.M.
Φωτάκης	ημήτριος	Ανδρέας	1041
Παπαδόπουλος	Απόστολος	Αθανάσιος	996
Αθανασίου	ημήτριος	Ανδρέας	850
Νικολάου	Απόστολος	Ανδρέας	1201

## Σχεσιακές Βάσεις Δεδομένων

- (Πρωτεύον) κλειδί πίνακα: πεδίο με μοναδική τιμή σε κάθε εγγραφή.
  - Τιμή κλειδιού προσδιορίζει μοναδικά εγγραφή πίνακα.

Πίνακας 1: Φοιτητές			
Επώνυμο	Όνομα	Ον. Πατέρα	A.M.
Φωτάκης	ημήτριος	Ανδρέας	1041
Παπαδόπουλος	Απόστολος	Αθανάσιος	996
Αθανασίου	ημήτριος	Ανδρέας	850
Νικολάου	Απόστολος	Ανδρέας	1201

## Σχεσιακές Βάσεις Δεδομένων

- (Πρωτεύων) κλειδί πίνακα: πεδίο με **μοναδική τιμή** σε κάθε εγγραφή.
  - Τιμή κλειδιού προσδιορίζει μοναδικά εγγραφή πίνακα.
- Αν ένα πεδίο δεν αρκεί, **σύνθετο (πρωτεύων) κλειδί**: καρτεσιανό γινόμενο  $\geq 2$  πεδίων ώστε τιμή να **προσδιορίζει μοναδικά** εγγραφή.

Α.Μ.	Μάθημα	Βαθμ.	Εξετ.
1041	ιακριτά Μαθηματικά	10	6/2007
1041	Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα	10	2/2008
1041	Κρυπτογραφία	8.5	2/2009
850	ιακριτά Μαθηματικά	8.5	9/2006
850	Βάσεις εδομένων	10	2/2007

13

## Επιλογή

- $n$ -μελής σχέση  $R$ , **C συνθήκη** για στοιχεία  $R$ .
- **Επιλογή** (γραμμών) από  $R$  υπό **συνθήκη C**:
  - $n$ -μελής σχέση με στοιχεία  $R$  που ικανοποιούν συνθήκη  $C$ .
  - Επιλογή από Φοιτητές με Όνομα = «Δημήτριος».
  - Επιλογή από Φοιτητές με  $AM \leq 950$ .

Επώνυμο	Όνομα	Ον. Πατέρα	Α.Μ.
Φωτάκης	ημήτριος	Ανδρέας	1041
Παπαδόπουλος	Απόστολος	Αθανάσιος	996
Αθανασίου	ημήτριος	Ανδρέας	850
Νικολάου	Απόστολος	Ανδρέας	1201

14

## Επιλογή

- $n$ -μελής σχέση  $R$ , **C συνθήκη** για στοιχεία  $R$ .
- **Επιλογή** (γραμμών) από  $R$  υπό **συνθήκη C**:
  - $n$ -μελής σχέση με στοιχεία  $R$  που ικανοποιούν συνθήκη  $C$ .
  - Επιλογή από Φοιτητές με Όνομα = «Δημήτριος».
  - Επιλογή από Φοιτητές με  $AM \leq 950$ .
  - Επιλογή από Μαθ-Βαθμ. με Μάθημα = «Διακριτά» και Βαθμ  $\geq 8.0$

Α.Μ.	Μάθημα	Βαθμ.	Εξετ.
1041	ιακριτά Μαθηματικά	10	6/2007
1041	Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα	10	2/2008
1041	Κρυπτογραφία	8.5	2/2009
850	ιακριτά Μαθηματικά	8.5	9/2006
850	Βάσεις εδομένων	10	2/2007

15

## Προβολή

- $n$ -μελής σχέση  $R$ , **πεδία** (στήλες)  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  της  $R$ .
- **Προβολή** (επί στηλών)  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  της  $R$ :
  - $k$ -μελής σχέση με στοιχείο  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  για κάθε στοιχείο  $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in R$  (μια φορά κάθε  $k$ -αδα).
  - Προβολή Φοιτητές στην στήλη Όνομα και Όνομα Πατέρα.

Επώνυμο	Όνομα	Ον. Πατέρα	Α.Μ.
Φωτάκης	ημήτριος	Ανδρέας	1041
Παπαδόπουλος	Απόστολος	Αθανάσιος	996
Αθανασίου	ημήτριος	Ανδρέας	850
Νικολάου	Απόστολος	Ανδρέας	1201

16

## Προβολή

- $n$ -μελής σχέση  $R$ , πεδία (στήλες)  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  της  $R$ .
- **Προβολή** (επί στηλών)  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  της  $R$  :
  - $k$ -μελής σχέση με στοιχείο  $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$  για κάθε στοιχείο  $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in R$  (μια φορά κάθε  $k$ -αδα).
  - Προβολή Φοιτητές στην στήλη Όνομα και Όνομα Πατέρα.
  - Προβολή Μαθ-Βαθμ. στις στήλες Μάθημα και Εξεταστική.

Α.Μ.	Μάθημα	Βαθμ.	Εξετ.
1041	ιακριτά Μαθηματικά	10	6/2007
1041	Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα	10	2/2008
1041	Κρυπτογραφία	8.5	2/2009
850	ιακριτά Μαθηματικά	8.5	9/2006
850	Βάσεις εδομένων	10	2/2007

17

## Συνένωση (Join)

- $n$ -μελής σχέση  $R$ ,  $m$ -μελής σχέση  $S$ , με  $p$  κοινά πεδία.
- Συνένωση  $R$  και  $S$  επί  $p$  κοινών πεδίων:
  - $(n+m-p)$ -μελής σχέση με στοιχεία  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-p}, b_1, \dots, b_p, c_1, c_2, \dots, c_{m-p})$  όπου  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-p}, b_1, \dots, b_p) \in R$  και  $(b_1, \dots, b_p, c_1, c_2, \dots, c_{m-p}) \in S$
  - Σχέση συνένωσης: προβολή (στα  $n+m-p$  διαφορετικά πεδία) επί υποσυνόλου της  $R \times S$  με εγγραφές με ίδια τιμή στα κοινά πεδία.

18

## Παράδειγμα Συνένωσης

Επώνυμο	Όνομα	Ον. Πατέρα	Α.Μ.
Φωτάκης	ημήτριος	Ανδρέας	1041
Παπαδόπουλος	Απόστολος	Αθανάσιος	996
Αθανασίου	ημήτριος	Ανδρέας	850
Νικολάου	Απόστολος	Ανδρέας	1201

Α.Μ.	Μάθημα	Βαθμ.	Εξετ.
1041	ιακριτά Μαθηματικά	10	6/2007
1041	Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα	10	2/2008
1041	Κρυπτογραφία	8.5	2/2009
850	ιακριτά Μαθηματικά	8.5	9/2006
850	Βάσεις εδομένων	10	2/2007

19

## Παράδειγμα Συνένωσης

Επώνυμο	Όνομα	Ον. Πατ.	Α.Μ.	Μάθημα	Βαθμ.	Εξετ.
Φωτάκης	ημήτριος	Ανδρέας	1041	ιακριτά Μαθηματικά	10	6/2007
Φωτάκης	ημήτριος	Ανδρέας	1041	Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα	10	2/2008
Φωτάκης	ημήτριος	Ανδρέας	1041	Κρυπτογραφία	8.5	2/2009
Αθανασίου	ημήτριος	Ανδρέας	850	ιακριτά Μαθηματικά	8.5	9/2006
Αθανασίου	ημήτριος	Ανδρέας	850	Βάσεις εδομένων	10	2/2007