# Μαθηματική Επαγωγή

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

# Τεχνικές Απόδειξης

- Εξαντλητική μέθοδος: πεπερασμένος αριθμός περιπτώσεων.
- Απόδειξη για $p \rightarrow q$:
  - Ευθέως: αιτιολογούμε ότι συμπέρασμα q έπεται από υπόθεση p.
  - Αντιθετοαναστροφή: αιτιολογούμε ότι η άρνηση της υπόθεσης ($\neg p$) έπεται από την άρνηση του συμπεράσματος ($\neg q$).
    - Ιδιότητα $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
    - Π.χ. αν $n^2$ άρτιος, τότε n άρτιος.
  - Απαγωγή σε άτοπο: Υποθέτουμε ότι $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$ και αιτιολογούμε αντίφαση.
    - Π.χ. το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος (Πυθαγόρας).
- Μαθηματική Επαγωγή.



# Αποδείξεις Ύπαρξης

- Κατασκευαστικές αποδείξεις ύπαρξης.
  - Αλγόριθμος κατασκευής του ζητούμενου.
- Μη κατασκευαστικές αποδείξεις ύπαρξης.
  - Αρχή περιστερώνα.
    - Αν m μπάλες σε n κουτιά και m > n, τότε κάποιο κουτί έχει περισσότερες από 1 μπάλες.
  - Επιχειρήματα ισοτιμίας και καταμέτρησης.
    - Κάθε κατευθυνόμενο γράφημα με «πηγή» και χωρίς κύκλους, έχει «καταβόθρα».
    - Κάθε (μη κατευθυνόμενο) γράφημα έχει άρτιο αριθμό κορυφών περιττού βαθμού.
  - Πιθανοτική μέθοδος.
    - Αν κάτι έχει θετική πιθανότητα να επιλεγεί από (κατάλληλο) δειγματοχώρο, τότε υπάρχει.



# Μαθηματική Επαγωγή

- Αποδεικνύουμε ότι «P(n) αληθεύει για κάθε φυσικό $n \geq n_0$».
  - **Δομική επαγωγή**: όλα τα στοιχεία (αριθμήσιμα) άπειρου συνόλου που ορίζεται αναδρομικά έχουν ιδιότητα P.

**Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής**

- Έστω P(n) μια πρόταση που εξαρτάται από φυσικό αριθμό n.
- Για νδο P(n) αληθεύει για κάθε φυσικό $n \geq n_0$, αρκεί νδο:
  - **Βάση**: το $P(n_0)$ αληθεύει.
  - **Βήμα**: για κάθε $n \geq n_0$, αν P(n) αληθεύει, τότε P(n+1) αληθεύει.

**Αρχή Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής**

- Για νδο P(n) αληθεύει για κάθε $n \geq n_0$, αρκεί νδο:
  - **Βάση**: το $P(n_0)$ αληθεύει.
  - **Βήμα**: για κάθε $n \geq n_0$, αν P(k) αληθεύει για κάθε $k \in \{n_0, \ldots, n\}$, τότε P(n+1) αληθεύει.

# Όροι Γεωμετρικής Προόδου

- Να δείξετε ότι για κάθε n ≥ 0, $1+2+\ldots+2^n = 2^{n+1} - 1$.
  - Πρόταση P(n) ≡ «$1+2+\ldots+2^n = 2^{n+1} - 1$».
  - Βάση: Αληθεύει για n = 0: $2^0 = 1 = 2 - 1$.
  - Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο) n ≥ 0, αληθεύει P(n), δηλ. ότι $1+2+\ldots+2^n = 2^{n+1} - 1$.
  - Επαγωγικό βήμα: Θδο αληθεύει P(n+1), δηλ. ότι $1+2+\ldots+2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$.

$$\begin{aligned}\overbrace{1+2+2^2\ldots+2^n}^{=2^{n+1}-1}+2^{n+1} &= 2^{n+1}-1+2^{n+1}\\ &= 2^{n+2}-1\end{aligned}$$

- Νδο για κάθε r ≠ 1 και n ≥ 0,

$$1+r+r^2+\cdots+r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$



# Αρμονικοί Αριθμοί

- Αρμονικός αριθμός τάξης k: $H_k = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}$
- Να δείξετε ότι για κάθε n ≥ 0, $1+\frac{n}{2} \le H_{2^n} \le 1+n$
  - Συνεπώς $1+\frac{1}{2}\log_2 k \le H_k \le 1+\log_2 k$
  - Άνω φράγμα, πρόταση P(n) ≡ « $H_{2^n} \le 1+n$ »
  - Βάση: Αληθεύει για n = 0: $H_1 = 1 = 1+0$.
  - Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο) n ≥ 0, αληθεύει P(n), δηλ. ότι $H_{2^n} \le 1+n$



# Αρμονικοί Αριθμοί

- Επαγωγικό βήμα: Θδο αληθεύει P(n+1), δηλ. ότι $H_{2^{n+1}} \le 1+(n+1)$

$$\begin{aligned}H_{2^{n+1}} &= \overbrace{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}^{=H_{2^n}\le 1+n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}\\ &\le 1+n+\overbrace{\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}}^{2^n\ \text{όροι} < \frac{1}{2^n}}\\ &\le 1+n+2^n\frac{1}{2^n}\\ &= 1+(n+1)\end{aligned}$$



# Διαιρετότητα

- Να δείξετε ότι για κάθε n ≥ 1, το $n^3+2n$ διαιρείται από το 3.
  - Βάση: Αληθεύει για n = 1: Το 3 διαιρείται από το 3.
  - Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο) n ≥ 1, το $n^3 + 2n$ διαιρείται από το 3.
  - Επαγωγικό βήμα: Θδο το $(n+1)^3 + 2(n+1)$ διαιρείται από το 3.
  - Πράγματι,

$$\begin{aligned}(n+1)^3+2(n+1) &= (n^3+3n^2+3n+1)+2(n+1)\\ &= (n^3+2n)+3(n^2+n+1),\end{aligned}$$

όπου και οι δύο όροι διαιρούνται από το 3 (ο 1ος λόγω της επαγωγικής υπόθεσης).

# Πληθάριθμος Δυναμοσυνόλου

- Νδο για κάθε (πεπερασμένο) σύνολο A με n στοιχεία, το δυναμοσύνολο του A έχει $2^n$ στοιχεία.
  - Μαθηματική επαγωγή στο n (πληθικό αριθμό συνόλου A).
  - Βάση: Αληθεύει για n = 0: $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ και $|P(\emptyset)| = 2^0$.
  - Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο) $n \geq 0$, αληθεύει ότι για κάθε σύνολο A με $|A| = n$, $|P(A)| = 2^n$.
  - Επαγωγικό βήμα: Θδο $\forall$σύνολο A με $|A| = n+1$, $|P(A)| = 2^{n+1}$.
    - A (αυθαίρετα επιλεγμένο) σύνολο με n+1 στοιχεία. Θεωρούμε $x \in A$ και $A_x = A - \{x\}$ με $|A_x| = n$.
    - Κάθε υποσύνολο του A είτε περιέχει το x είτε όχι.
    - Σε κάθε υποσύνολο $S \subseteq A_x$ αντιστοιχούν δύο υποσύνολα του A: το S και το $S \cup \{x\}$.
    - Άρα $|P(A)| = 2 \cdot |P(A_x)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.



# Λάθος Χρώμα!

- Να βρείτε το **λάθος** στον παρακάτω επαγωγικό συλλογισμό.
- Θδο για κάθε $n \geq 1$, σε κάθε σύνολο n αυτοκινήτων, όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.
  - Βάση: Ισχύει για n = 1.
  - Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο) $n \geq 1$, σε κάθε σύνολο n αυτοκινήτων, όλα έχουν το ίδιο χρώμα.
  - Επαγωγικό βήμα: Θδο σε κάθε σύνολο n+1 αυτοκινήτων, όλα έχουν το ίδιο χρώμα.
    - Σύνολο με n+1 αυτοκίνητα: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$
    - Από επαγ. υπόθεση, τα n πρώτα αυτοκίνητα έχουν ίδιο χρώμα, και n τελευταία αυτοκίνητα έχουν ίδιο χρώμα:

$$\{\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}^{\text{ίδιο χρώμα}}, a_{n+1}\} \qquad \{a_1, \overbrace{a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}}^{\text{ίδιο χρώμα}}\}$$

    - Αφού σύνολο n πρώτων και σύνολο n τελευταίων αυτοκινήτων έχουν κοινά στοιχεία, όλα τα αυτοκ. στο A έχουν ίδιο χρώμα!



# Λάθος Χρώμα!

- Επαγωγικό βήμα: Θδο σε κάθε σύνολο n+1 αυτοκινήτων, όλα έχουν το ίδιο χρώμα.
  - Σύνολο με n+1 αυτοκίνητα: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$
  - Από επαγ. υπόθεση, τα n πρώτα αυτοκίνητα έχουν ίδιο χρώμα, και n τελευταία αυτοκίνητα έχουν ίδιο χρώμα:

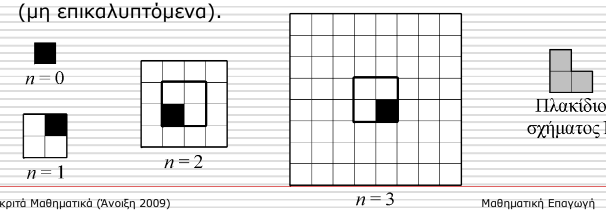
$$\{\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}^{\text{ίδιο χρώμα}}, a_{n+1}\} \qquad \{a_1, \overbrace{a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}}^{\text{ίδιο χρώμα}}\}$$

  - Αφού σύνολο n πρώτων και σύνολο n τελευταίων αυτοκινήτων έχουν κοινά στοιχεία, όλα τα αυτοκ. στο A έχουν ίδιο χρώμα!
- Για n = 1, τα δύο σύνολα **δεν** έχουν **κοινά** στοιχεία!
- Εδώ ισχύει ότι P(1) και ότι $P(n) \rightarrow P(n+1)$ για κάθε $n \geq 2$.
  - Δεν ισχύει ότι $P(1) \rightarrow P(2)$: αυτό καθιστά συμπέρασμα αβάσιμο!



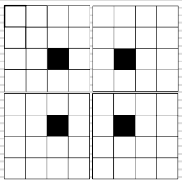
# Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

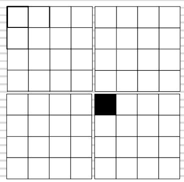
- Κάποτε χρήσιμο να αποδείξουμε ισχυρότερη πρόταση P′(n).
  - Είναι δυνατό να **μην** ισχύει ότι $P(n) \rightarrow P(n+1)$, αλλά να ισχύει $P'(n) \rightarrow P'(n+1)$, για ισχυρότερη πρόταση P′(n).
- **Σκακιέρα** τάξης **n** με μαύρο στο **κέντρο**: τετράγωνη σκακιέρα με $2^n \times 2^n$ τετράγωνα, όλα λευκά εκτός από ένα μαύρο στο κέντρο.
- Ν.δ.ο. για κάθε $n \geq 0$, λευκά τετράγωνα σκακιέρας τάξης n με μαύρο στο κέντρο καλύπτονται από πλακίδια σχήματος L (μη επικαλυπτόμενα).



# Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

- Βάση: P(0) ισχύει (δεν υπάρχουν λευκά τετράγωνα).
- Επαγωγικό βήμα:
  - Σκακιέρα τάξης n+1 με μαύρο στο κέντρο:
    ένωση 4 σκακιέρων τάξης n με μαύρο στο κέντρο,
    3 μαύρα γίνονται λευκά, 1 μαύρο μετακινείται στο κέντρο.

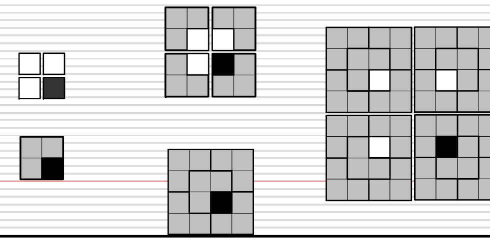






# Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

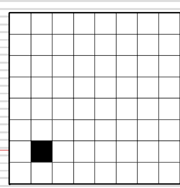
- Βάση: P(0) ισχύει (δεν υπάρχουν λευκά τετράγωνα).
- Επαγωγικό βήμα:
  - $P(0) \rightarrow P(1)$, $P(1) \rightarrow P(2)$: 3 νέα λευκά καλύπτονται με 1 πλακίδιο.
- $P(2) \rightarrow P(3)$;
  - Λευκά όχι γειτονικά, μετακινήσεις επηρεάζουν διάταξη πλακιδίων!
  - Χρήση επαγωγικής υπόθεσης όχι προφανής!
- Δυσκολία λόγω περιορισμού ότι μαύρο στο κέντρο!





# Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

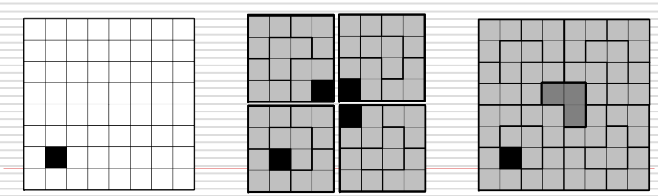
- **Σκακιέρα** τάξης **n**: τετράγωνη σκακιέρα με $2^n \times 2^n$ τετράγωνα, όλα λευκά εκτός από ένα μαύρο (οποιοδήποτε).
- Ν.δ.ο. για κάθε $n \geq 0$, λευκά τετράγωνα σκακιέρας τάξης n καλύπτονται από πλακίδια σχήματος L (μη επικαλυπτόμενα).
  - Πρόταση P'(n) ισχυρότερη από αρχική P(n).
  - Βάση: P'(0) ισχύει τετριμένα.
  - Επαγωγική υπόθεση: για (αυθαίρετα επιλεγμένο) $n \geq 0$, αληθεύει ότι λευκά τετράγωνα **οποιασδήποτε** σκακιέρας τάξης n καλύπτονται από πλακίδια σχήματος L.





# Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

- Σκακιέρα τάξης n+1: 4 σκακιέρες τάξης n (τεταρτημόρια).
  - 1 με μαύρο τετράγωνο σε αντίστοιχη θέση.
  - 3 με μαύρα τετράγωνα σε άκρα, ώστε γειτονικά κεντρικά τετράγωνα σε σκακιέρα n+1.
- Από επαγωγική υπόθεση, λευκά τετράγωνα σε τεταρτημόρια καλύπτονται από πλακίδια L.
- Νέα λευκά τετράγωνα σχηματίζουν L: καλύπτονται με πλακίδιο.



# Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

- Νδο. για κάθε $n \geq 1$,

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} \leq 2$$

  - Επαγωγική υπόθεση $S_n \leq 2$ δεν συνεπάγεται ότι $S_{n+1} \leq 2$.
- Ευκολότερο νδ (επαγωγικά) ότι για κάθε $n \geq 1$,

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$



# Παράδειγμα Ισχυρής Επαγωγής

- Νδο κάθε τμήμα τουλ. 18 φοιτητών χωρίζεται σε ομάδες 4 ή 7 φοιτητών.
  - Για κάθε φυσικό $n \geq 18$, υπάρχουν φυσικοί $\kappa_n$, $\lambda_n$: $n = 4\kappa_n + 7\lambda_n$ .
- Βάση: επαλήθευση για n = 18, 19, 20, 21.
- Επαγωγική υπόθεση: για (αυθαίρετα επιλεγμ.) φυσικό $n \geq 21$, ισχύει ότι για κάθε φυσικό m, $21 \leq m \leq n$:
  - Υπάρχουν φυσικοί $\kappa_m$, $\lambda_m$: $m = 4\kappa_m + 7\lambda_m$ .
- Επαγωγικό βήμα: Θδο υπάρχουν φυσικοί $\kappa_{n+1}$, $\lambda_{n+1}$:

$$n+1 = 4\kappa_{n+1} + 7\lambda_{n+1}.$$

  - Επαγ. υπόθεση για n – 3, και $\kappa_{n+1} = \kappa_{n-3} + 1$ και $\lambda_{n+1} = \lambda_{n-3}$:

$$4(\kappa_{n-3}+1) + 7\lambda_{n-3} = \overbrace{(4\kappa_{n-3} + 7\lambda_{n-3})}^{=n-3} + 4 = n+1$$

- Αρκεί βάση για n = 18; Γιατί $n \geq 21$ στην υπόθεση;



# Και Άλλο Λάθος!

- Θδο όλοι οι φυσικοί αριθμοί είναι άρτιοι(;)!
  - Βάση: ισχύει ότι το 0 είναι άρτιος.
  - Επαγωγική υπόθεση: για (αυθαίρετα επιλεγμένο) φυσικό $n \geq 0$, ισχύει ότι για κάθε m, $0 \leq m \leq n$, το m είναι άρτιος.
  - Επαγωγικό βήμα: Θδο το n+1 είναι άρτιος.
    - Επαγωγική υπόθεση: το n και το 1 είναι άρτιοι.
    - Άρα n+1 άρτιος, ως άθροισμα δύο άρτιων!
- Απόδειξη βήματος **δεν** ισχύει για n = 0!
  - Χρησιμοποιεί ότι το 1 είναι άρτιος χωρίς απόδειξη (στη βάση) και χωρίς να εμπίπτει στην επαγωγική υπόθεση!