Στοιχεία Προτασιακής Λογικής

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Μαθηματικές Προτάσεις

- (Μαθηματική) **πρόταση**: δήλωση που μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής (όχι και τα δύο).
  - Το όνομά μου είναι Δημήτρης.
  - Χθες χιόνισε στην Καστοριά.
  - Ο Σεφέρης τιμήθηκε με το Νόμπελ Λογοτεχνίας.
  - Σήμερα είναι η πρώτη μέρα της άνοιξης.
- Άλλα όχι:
  - Τι ώρα είναι;
  - Κάνετε ησυχία παρακαλώ.
  - Σχεδόν κάθε μέρα βρέχει (χωρίς το σχεδόν;)

Ταυτολογία και Αντίφαση

- Προτάσεις συνδυάζονται λογικά: σύνθετες προτάσεις.
  - Αν χιονίσει, θα πάω για σκι ή θα παίξω χιονοπόλεμο.
  - Ο Δ είναι καλός ή ο Δ δεν είναι καλός.
  - Θα κάνω μάθημα στις 14:00 και θα παίζω μπάσκετ στις 14:00.
- **Ταυτολογία**: πρόταση που είναι πάντα **Α**.
- **Αντίφαση**: πρόταση που είναι πάντα **Ψ**.
  - Άρνηση ταυτολογίας είναι αντίφαση (και αντίστροφα).
- **Ισοδύναμες** προτάσεις ($\equiv$): ίδια τιμή αλήθειας.

Προτασιακή Λογική

- Λογικούς συνδυασμούς προτάσεων, τιμές αλήθειας, ταυτολογίες, ταυτολογικές συνεπαγωγές: σημασιολογική προσέγγιση.
- Συντακτικές μεθόδους (τυπικές αποδείξεις) παραγωγής θεωρημάτων από αξιώματα, θεωρήματα, ή υποθέσεις: συντακτική προσέγγιση.
  - Εγκυρότητα – Πληρότητα: **ισοδύναμες** προσεγγίσεις.
- Στοιχειώδεις προτάσεις: **προτασιακές μεταβλητές** p, q, r.
  - Βασικά δομικά στοιχεία. Διακριτές τιμές Α ή Ψ (1 ή 0).
- Συνδυασμοί προτάσεων με (λογικούς) συνδέσμους: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
- Προτασιακός τύπος:
  - Είτε προτασιακή μεταβλητή p, q, r, …
  - Είτε $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \oplus \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, όπου φ, ψ ήδη σχηματισμένοι προτασιακοί τύποι.

Πίνακες Αλήθειας

- Λογικοί σύνδεσμοι ορίζονται με πίνακες αλήθειας.
  - Τιμή αλήθειας του π.τ. από τιμές αλήθειας των «μερών».
  - Χρήσιμοι για τη μελέτη τιμών αλήθειας σύνθετων π.τ.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
Α	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α

Λογική Συνεπαγωγή

- Αν αληθεύει το p, τότε αληθεύει το q : $p \to q$.
- Αν κάποιος είναι επισκέπτης, φοράει κονκάρδα.
- Αν μελετήσεις τουλάχιστον 30 ώρες, τότε θα επιτύχεις στις εξετάσεις.
- Αν είμαι ο Πρόεδρος των ΗΠΑ, τότε όλοι βαθμολογείστε με 10.
- Αν είχα γίνει πρωθυπουργός, θα είχα λύσει όλα τα προβλήματα.

p	q	$p \to q$ $(\equiv \neg p \vee q)$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

Παραδείγματα

- Προτασιακός τύπος: ταυτολογία, αντίφαση, ικανοποιήσιμος.
- Νδο $\varphi \equiv ((p \wedge q) \to r) \to ((p \vee q) \to r)$ ικανοποιήσιμος, όχι ταυτολογία.
  - Ικανοποιήσιμος φ: $p = q = r =$ Α.
  - Όχι ταυτολογία φ: $r =$ Ψ και είτε $p =$ Α, $q =$ Ψ είτε $p =$ ψ, $q =$ Α.

Παραδείγματα

- Νδο $\varphi \equiv ((p \wedge q) \to r) \to ((p \vee q) \to r)$ ικανοποιήσιμος, όχι ταυτολογία.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \to r$	$(p \vee q) \to r$	φ
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	**Α**
Α	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	**Α**
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	**Α**
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	**Ψ**
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	**Α**
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	**Ψ**
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	**Α**
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	**Α**

Παραδείγματα

- Νδο $\psi \equiv ((p \to q) \to p) \to p$ ταυτολογία.

Ιδιότητες Λογικών Συνδέσμων (Ι)

Αντιμεταθετική	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$
Προσεταιριστική	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
Επιμεριστική	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
ιπλή άρνηση	$\neg\neg p \equiv p$
Αντικατάσταση συνεπαγωγής	$p \to q \equiv \neg p \vee q$

Ιδιότητες Λογικών Συνδέσμων (ΙΙ)

Αποκλεισμός τρίτου	$p \vee \neg p \equiv \mathrm{A}$
Αντιθετοαναστροφή	$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
Εξαγωγή	$p \wedge q \to r \equiv p \to (q \to r)$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
Άρνηση συνεπαγωγής	$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$

Παράδειγμα

- Απλοποίηση προτασιακού τύπου: $((\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

$$
\begin{aligned}
\ldots &\equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee ((\neg\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)) \\
&\equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee ((\neg\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi)) \\
&\equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee \neg\varphi \\
&\equiv (\varphi \vee \neg\varphi) \wedge (\neg\psi \vee \neg\varphi) \\
&\equiv \neg\psi \vee \neg\varphi \\
&\equiv \neg(\psi \wedge \varphi)
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

- Ύποπτος δηλώνει: «Λέω την αλήθεια ανν είμαι ένοχος».
  - Γνωρίζουμε ότι είτε λέει πάντα αλήθεια είτε πάντα ψέματα.
  - Μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι ένοχος;
- $p \equiv$ «λέει αλήθεια»
  $q \equiv$ «είναι ένοχος»
  - Δήλωση: $p \leftrightarrow q$.
  - Πρέπει να αληθεύει ότι: $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
Α	**Α**	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	**Α**	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ

Παράδειγμα

- Ο κόσμος χωρίζεται σε ευγενείς και μη-ευγενείς.
  - Ευγενείς: πάντα αλήθεια. Μη-ευγενείς: πάντα ψέματα.
- Κάποιος δηλώνει:
  «Αν είμαι ευγενής, τότε η σύζυγός μου είναι ευγενής».
  - Είναι ευγενής; Η σύζυγός του;
- $p \equiv$ «άνδρας ευγενής»
  $\equiv$ «άνδρας λέει αλήθεια»
  $q \equiv$ «σύζυγος ευγενής»
  - Δήλωση: $p \rightarrow q$.
  - Πρέπει να αληθεύει ότι: $p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

p	q	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
Α	**Α**	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ

Παραδείγματα

- Είναι οι δηλώσεις: «το καλό φαγητό δεν είναι φθηνό» και «το φθηνό φαγητό δεν είναι καλό» ισοδύναμες;
  - Ισοδυναμία $\kappa \rightarrow \neg\varphi$ και $\varphi \rightarrow \neg\kappa$;
- Είναι το «αυτή η πρόταση είναι ψευδής» **μαθ.** πρόταση;
  - Μπορεί να είναι αληθής; Ψευδής;
- Δείτε ακόμη:
  - Liu, ενότητα 1.8 (σελ. 33-40), ασκήσεις 1.65-1.74.
    - Παραδείγματα: 1.15, 1.16, 1.17, και 1.18.
    - Ασκήσεις: 1.69-1.74.
  - Rosen, ενότητες 1.1, 1.2, και (εν μέρει) 1.3.

Κατηγορήματα και Ποσοδείκτες

- Κατηγορήματα: «προτάσεις με μεταβλητές» (σχέσεις).
  - $P(x)$: «ο x είναι περιττός αριθμός».
  - $Q(x,y)$: «ο x είναι μεγαλύτερος του y».
  - Μπορεί να ερμηνευθούν διαφορετικά!
- Ποσοδείκτες: $\exists$ υπάρχει, $\forall$ για κάθε.
  - $\exists x P(x)$, $\exists x \exists y Q(x,y)$, $\exists x \forall y Q(x,y)$, $\forall x \exists y Q(x,y)$.
  - Δύο τελευταίες μπορεί όχι ισοδύναμες (πχ. φυσικοί).
  - Για διαφορετικούς ποσοδείκτες, έχει σημασία η σειρά.
- Τύπος **λογικά έγκυρος**: αληθής (ανεξαρτ. ερμηνείας)
  - $\forall x \forall y Q(x,y) \rightarrow \forall x Q(x,x)$.
  - Αποδεικνύεται με εφαρμογή ορισμού Tarski.

Κατηγορήματα και Ποσοδείκτες

- Τύπος **αληθής** σε συγκεκριμένη **ερμηνεία**.
- $\exists x(P(x) \rightarrow Z(x))$.
  - Αληθεύει (στην ερμηνεία) αν **υπάρχει** στοιχείο α που είτε δεν έχει ιδιότητα *P* είτε έχει ιδιότητα *Z* (δηλ. $\neg P(\alpha) \vee Z(\alpha)$).
  - Δεν αληθεύει (στην ερμηνεία) αν **όλα** τα στοιχεία α έχουν την ιδιότητα *P* και δεν έχουν ιδιότητα *Z* (δηλ. $P(\alpha) \wedge \neg Z(\alpha)$).
- $\forall x(P(x) \rightarrow Z(x))$.
  - Δεν αληθεύει (στην ερμηνεία) αν **υπάρχει** στοιχείο α που έχει την ιδιότητα *P* και δεν έχει ιδιότητα *Z* (δηλ. $P(\alpha) \wedge \neg Z(\alpha)$).
  - Αληθεύει (στην ερμηνεία) αν **όλα** τα στοιχεία α είτε δεν έχουν ιδιότητα *P* είτε έχουν ιδιότητα *Z* (δηλ. $\neg P(\alpha) \vee Z(\alpha)$).