



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Διακριτά Μαθηματικά
Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου
5η Σειρά Προτεινόμενων Ασκήσεων

Θέμα 1. Να υπολογίσετε με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε n (διακεκριμένους) φοιτητές σε 6 (διακεκριμένα) αμφιθέατρα ώστε κανένα αμφιθέατρο να μην μείνει κενό, το πρώτο και το τρίτο αμφιθέατρο να έχουν περιττό αριθμό φοιτητών, και το δεύτερο και το τέταρτο αμφιθέατρο να έχουν άρτιο αριθμό φοιτητών.

Θέμα 2. Έχουμε n ίδιες πράσινες μπάλες και k αριθμημένες (διακεκριμένες) κόκκινες μπάλες που διανέμονται σε m διακεκριμένες υποδοχές. Θεωρούμε ότι $m \leq \min\{k, n\}$, και ότι δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία τοποθετούνται οι μπάλες στις υποδοχές. Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων για:

1. την διανομή των πράσινων και των κόκκινων μπαλών στις υποδοχές ώστε καμία υποδοχή να μην μείνει κενή και κάθε υποδοχή να έχει ίδιο αριθμό από πράσινες και κόκκινες μπάλες (μόνο για αυτή την περίπτωση, θεωρούμε ότι $k = n$).
2. την διανομή των πράσινων και των κόκκινων μπαλών στις υποδοχές ώστε κάθε υποδοχή να έχει τουλάχιστον μία πράσινη και τουλάχιστον μία κόκκινη μπάλα.

Θέμα 3. Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να τοποθετηθούν 200 διαφορετικά βιβλία σε 4 διακεκριμένα ράφια, όταν:

1. κάθε ράφι πρέπει να έχει τουλάχιστον 10 και το πολύ 100 βιβλία, και δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία τοποθετούνται τα βιβλία σε κάθε ράφι.
2. κάθε ράφι πρέπει να έχει περισσότερα βιβλία από το επόμενο του, το πρώτο ράφι δεν πρέπει να μείνει κενό, και έχει σημασία η σειρά με την οποία τοποθετούνται τα βιβλία στα ράφια.

Θέμα 4. Προμηθεύστε αναψυκτικά για το πάρτυ σας, και έχετε να διαλέξετε ανάμεσα σε 6 είδη. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι να αγοράσετε 32 συσκευασίες αναψυκτικών, αν θέλετε να αγοράσετε τουλάχιστον 1 και το πολύ 8 συσκευασίες από κάθε είδος; Να υπολογίσετε το ζητούμενο (i) με συνδυαστικά επιχειρήματα, και (ii) με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων.

Θέμα 5. Να υπολογίσετε τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας της οποίας ο n -οστός όρος δίνει τον αριθμό των δυαδικών συμβολοσειρών μήκους n που δεν περιέχουν την υποσυμβολοσειρά 111.