Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

4η Σειρά Προτεινόμενων Ασκήσεων, Σχέδιο Λύσεων

Άσκηση 1. (α) 75 παιδιά πήγαν σε ένα πάρκο διασκέδασης, όπου μπορούν να συμμετέχουν σε τρία παιχνίδια. Είναι γνωστό ότι 20 από αυτά συμμετείχαν και στα τρία παιχνίδια, και ότι 55 από αυτά συμμετείχαν τουλάχιστον σε δύο από τα τρία παιχνίδια. Η συμμετοχή σε κάθε παιχνίδι κοστίζει 1 ευρώ, και η συνολική είσπραξη ήταν 140 ευρώ. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των παιδιών που δεν συμμετείχαν σε κανένα παιχνίδι.

(β) Χρησιμοποιώντας την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, να υπολογίσετε το πλήθος των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι του 120.

(γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των φυσικών αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι του 1000 και διαιρούνται από το 4, αλλά δεν διαιρούνται από το 5 και το 6.

Λύση. (α) Έστω A_i, $i = 1, 2, 3$, το σύνολο των παιδιών που συμμετείχαν στο παιχνίδι i. Το ζητούμενο είναι ίσο με $75 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$, όπου ο όρος $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ θα υπολογιστεί με εφαρμογή της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού.

Από τα δεδομένα του προβλήματος, προκύπτει ότι $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 20$, ότι $|A_1| + |A_2| + |A_3| = 140$, και ότι

$$\#\text{παιδιών σε} \geq 2 \text{ παιχνίδια} = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - 2\,|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 55\,,$$

από το οποίο προκύπτει ότι $|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| = 95$. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, προκύπτει ότι

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 140 - 95 + 20 = 65$$

Συνεπώς $75 - 65 = 10$ παιδιά δεν συμμετείχαν σε κανένα παιχνίδι.

(β) Κάθε φυσικός αριθμός μικρότερος ή ίσος του 120 που δεν είναι πρώτος, έχει έναν πρώτο παράγοντα μικρότερο του 11, και συνεπώς αποτελεί πολλαπλάσιο τουλάχιστον ενός από τα 2, 3, 5, ή 7. Επομένως, το πλήθος των πρώτων αριθμών στο σύνολο $\{2, 3, \dots, 120\}$ είναι ίσο με τον πληθάριθμο του συνόλου (119) μείον το πλήθος των αριθμών που διαιρούνται από τα 2, 3, 5, ή 7, συν 4 (γιατί ο προηγούμενος υπολογισμός εξαιρεί τους 2, 3, 5, και 7, που διαιρούνται με τον εαυτό τους, αλλά είναι πρώτοι). Το ζητούμενο λοιπόν ανάγεται στον υπολογισμό του πλήθους των στοιχείων του $\{2, 3, \dots, 120\}$ που έχουν ως διαιρέτη κάποιο από τα 2, 3, 5, ή 7. Για τον υπολογισμό αυτού θα εφαρμόσουμε την αρχή του εγκλεισμού-αποκλεισμού.

Έστω A_i, $i = 2, 3, 5, 7$, το σύνολο των φυσικών στο $\{2, 3, \dots, 120\}$ που έχουν διαιρέτη το i. Για να υπολογίσουμε το $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{array}{llll}
|A_2| = 60 & |A_2 \cap A_3| = 20 & |A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 4 & |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = 0 \\
|A_3| = 40 & |A_2 \cap A_5| = 12 & |A_2 \cap A_3 \cap A_7| = 2 & \\
|A_5| = 24 & |A_2 \cap A_7| = 8 & |A_2 \cap A_5 \cap A_7| = 1 & \\
|A_7| = 17 & |A_3 \cap A_5| = 8 & |A_3 \cap A_5 \cap A_7| = 1 & \\
 & |A_3 \cap A_7| = 5 & & \\
 & |A_5 \cap A_7| = 3 & &
\end{array}$$

Με βάση τα παραπάνω, από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, προκύπτει ότι υπάρχουν

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| = (60 + 40 + 24 + 17) - (20 + 12 + 8 + 8 + 5 + 3) + (4 + 2 + 1 + 1) - 0 = 93$$

πολλαπλάσια των 2, 3, 5, ή 7 στο σύνολο $\{2, 3, \ldots, 120\}$. Συνεπώς το πλήθος των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι του 120 είναι $119 - 93 + 4 = 30$.

(γ) Έστω A_i, $i = 4, 5, 6$, το σύνολο των φυσικών που είναι μικρότεροι ή ίσοι του 1000 και έχουν διαιρέτη το i, και έστω $\overline{A_i}$ το (συμπληρωματικό) σύνολο των φυσικών που είναι μικρότεροι ή ίσοι του 1000 και *δεν* έχουν διαιρέτη το i. Το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε το $|A_4 \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_6}|$, το οποίο ισούται με $1000 - |\overline{A_4} \cup A_5 \cup A_6|$ (η ισότητα προκύπτει θεωρώντας τον πληθάριθμο του συμπληρωματικού συνόλου και εφαρμόζοντας τον αντίστοιχο νόμο de Morgan). Για τον υπολογισμό του $|\overline{A_4} \cup A_5 \cup A_6|$, εφαρμόζουμε την αρχή του εγκλεισμού-αποκλεισμού. Παρατηρούμε ότι:

$$|\overline{A_4}| = 1000 - |A_4| = 1000 - 250 = 750 \qquad |\overline{A_4} \cap A_5| = |A_5| - |A_4 \cap A_5| = 200 - 50 = 150$$
$$|A_5| = 200 \qquad |\overline{A_4} \cap A_6| = |A_6| - |A_4 \cap A_6| = 166 - 83 = 83$$
$$|A_6| = 166 \qquad |A_5 \cap A_6| = 33$$
$$|\overline{A_4} \cap A_5 \cap A_6| = |A_5 \cap A_6| - |A_4 \cap A_5 \cap A_6| = 33 - 16 = 17$$

Με βάση τα παραπάνω, από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, προκύπτει ότι:

$$|\overline{A_4} \cup A_5 \cup A_6| = (750 + 200 + 166) - (150 + 83 + 33) + 17 = 867\,.$$

Συνεπώς το πλήθος των φυσικών αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι του 1000 και διαιρούνται από το 4, αλλά δεν διαιρούνται από το 5 και το 6, είναι $1000 - 867 = 133$. □

Άσκηση 2. (α) Έχουμε 4 ίδια βιβλία με πάχος 10 εκατοστά και 20 διαφορετικά μεταξύ τους βιβλία με πάχος 5 εκατοστά το καθένα. Να υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων να γεμίσει ένα ράφι που έχει μήκος 1 μέτρο, αν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων στο ράφι.

(β) Έχουμε στη διάθεσή μας 10 ίδια βιβλία με πάχος 10 εκατοστά και 20 διαφορετικά μεταξύ τους βιβλία με πάχος 5 εκατοστά το καθένα. Να υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων να τοποθετηθούν όλα τα βιβλία σε 3 διακεκριμένα ράφια μήκους 2 μέτρων το καθένα, αν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων σε κάθε ράφι.

Λύση. (α) Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Να μην μπει στο ράφι κανένα βιβλίο 10 εκατοστών. Όλα τα “λεπτά” βιβλία μπορούν να τοποθετηθούν με 20! τρόπους.
- Να μπουν στο ράφι ένα βιβλίο 10 εκατοστών και 18 “λεπτά” βιβλία για τα οποία υπάρχουν $C(20, 18)$ επιλογές. Τα 19 βιβλία (όλα διαφορετικά μεταξύ τους) μπορούν να τοποθετηθούν με 19! τρόπους. Συνολικά έχουμε $C(20, 18) \cdot 19!$ τρόπους.
- Να μπουν στο ράφι στο ράφι δύο (ίδια) βιβλία 10 εκατοστών και 16 (διαφορετικά) “λεπτά” βιβλία για τα οποία υπάρχουν $C(20, 16)$ επιλογές. Τα 18 βιβλία μπορούν να τοποθετηθούν με $18!/2!$ τρόπους. Συνολικά έχουμε $C(20, 16) \cdot 18!/2!$ τρόπους.
- Να μπουν στο ράφι τρία (ίδια) βιβλία 10 εκατοστών και 14 (διαφορετικά) “λεπτά” βιβλία για τα οποία υπάρχουν $C(20, 14)$ επιλογές. Τα 17 βιβλία μπορούν να τοποθετηθούν με $17!/3!$ τρόπους. Συνολικά έχουμε $C(20, 14) \cdot 17!/3!$ τρόπους.
- Να μπουν στο ράφι τέσσερα (ίδια) βιβλία 10 εκατοστών και 12 (διαφορετικά) “λεπτά” βιβλία για τα οποία υπάρχουν $C(20, 12)$ επιλογές. Τα 16 βιβλία μπορούν να τοποθετηθούν με $16!/4!$ τρόπους. Συνολικά έχουμε $C(20, 12) \cdot 16!/4!$ τρόπους.

Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις είναι αμοιβαία αποκλειόμενες. Άρα εφαρμόζοντας τον κανόνα του αθροίσματος, έχουμε ότι οι τρόποι τοποθέτησης συνολικά είναι:

$$20! + \binom{20}{18} \cdot 19! + \binom{20}{16} \cdot \frac{18!}{2!} + \binom{20}{14} \cdot \frac{17!}{3!} + \binom{20}{12} \cdot \frac{16!}{4!}$$

(β) Παρατηρούμε ότι το μήκος των ραφιών δεν συνιστά περιορισμό, με την έννοια ότι όλα τα βιβλία χωρούν σε ένα ράφι μήκους 2 μέτρων. Υπολογίζουμε λοιπόν τους διαφορετικούς τρόπους να διανείμουμε 10 ίδια αντικείμενα ("χοντρά" βιβλία) και 20 διαφορετικά αντικείμενα ("λεπτά" βιβλία) σε 3 διακεκριμένες υποδοχές (ράφια), με την σειρά των αντικειμένων στις υποδοχές να έχει σημασία (χωρίς κανέναν περιορισμό). Το πλήθος των διαφορετικών διανομών ισούται με το πλήθος των μεταθέσεων 10 ίδιων αντικειμένων ("χοντρών" βιβλίων), 20 διαφορετικών αντικειμένων ("λεπτών" βιβλίων), και 2 ίδιων αντικειμένων ("διαχωριστικών"). Το πλήθος αυτών των μεταθέσεων είναι:

$$\frac{32!}{10!2!}$$

Για περαιτέρω εξάσκηση, να υπολογίσετε το πλήθος των διαφορετικών διανομών που δεν αφήνουν καμία υποδοχή κενή. □

Άσκηση 3. (α) Να υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων να καθήσουν 20 (διακεκριμένοι) φοιτητές σε μια σειρά 90 θρανίων, ώστε να υπάρχουν τουλάχιστον δύο κενά θρανία ανάμεσα σε κάθε δύο φοιτητές.

(β) Να υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων να μοιράσουμε 30 ίδια κουπόνια σίτισης σε 5 φοιτητές, ώστε κάθε φοιτητής να πάρει τουλάχιστον 3 και το πολύ 10 κουπόνια.

(γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων να κατανείμουμε 40 φοιτητές σε 4 διαφορετικά εστιατόρια ώστε κανένα εστιατόριο να μην μείνει άδειο, αν η κατανομή καθορίζει και τη σειρά με την οποία οι φοιτητές γευματίζουν.

Λύση. (α) Υπάρχουν 20! διαφορετικές μεταθέσεις των (διακεκριμένων) φοιτητών. Για κάθε τέτοια μετάθεση, δεσμεύουμε ένα θρανίο για κάθε φοιτητή, και δύο κενά θρανία ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι φοιτητών που κάθονται σε διαδοχικές θέσεις, σύνολο $20 + 19 \cdot 2 = 58$ θρανία. Απομένουν $90 - 58 = 32$ (μη διακεκριμένα) θρανία, τα οποία διανέμονται στις 21 διακεκριμένες "υποδοχές" που σχηματίζει η μετάθεση των φοιτητών. Αυτό γίνεται με

$$\binom{32+21-1}{32} = \binom{52}{32} = \frac{52!}{32!20!}$$

διαφορετικούς τρόπους. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου, προκύπτει ότι το πλήθος των διαφορετικών τρόπων είναι:

$$20! \cdot \frac{52!}{32!20!} = \frac{52!}{32!}$$

(β) Μοιράζουμε από 3 κουπόνια σε κάθε φοιτητή, δεσμεύοντας έτσι 15 κουπόνια συνολικά. Αυτό γίνεται με έναν τρόπο, αφού τα κουπόνια δεν είναι διακεκριμένα. Απομένουν 15 ίδια κουπόνια για να διανεμηθούν σε 5 φοιτητές (διακεκριμένες "υποδοχές") ώστε κάθε φοιτητής να πάρει το πολύ 7 κουπόνια. Το πλήθος των τρόπων να διανεμηθούν 15 ίδια κουπόνια σε 5 διακεκριμένους φοιτητές είναι $C(15 + 5 - 1, 15) = C(19, 4)$.

Από αυτές τις διανομές πρέπει να (υπολογίσουμε και να) αφαιρέσουμε τις διανομές όπου κάποιος φοιτητής παίρνει 8 ή περισσότερα κουπόνια. Παρατηρούμε ότι ένας το πολύ φοιτητής μπορεί να πάρει 8 ή περισσότερα κουπόνια. Για να υπολογίσουμε λοιπόν το πλήθος των διανομών όπου κάποιος φοιτητής παίρνει 8 ή περισσότερα κουπόνια, επιλέγουμε τον φοιτητή που παίρνει 8 ή περισσότερα κουπόνια (αυτό γίνεται με 5 διαφορετικούς τρόπους, όσοι είναι οι φοιτητές), του δίνουμε 8 κουπόνια, και διανέμουμε τα υπόλοιπα 7 κουπόνια στους 5 φοιτητές χωρίς περιορισμούς. Επομένως, το πλήθος αυτών των διανομών είναι $5C(7+5-1,7) = 5C(11,4)$.

Τελικά, το πλήθος των διανομών όπου κάθε φοιτητής παίρνει τουλάχιστον 3 και το πολύ 10 κουπόνια είναι:

$$\binom{19}{4} - 5\binom{11}{4} = \frac{19!}{15!4!} - \frac{5 \cdot 11!}{7!4!} = 2.226$$

(γ) Υπολογίζουμε τους διαφορετικούς τρόπους να διανείμουμε 40 διαφορετικά αντικείμενα (φοιτητές) σε 4 διακεκριμένες υποδοχές (εστιατόρια), με την σειρά των αντικειμένων στις υποδοχές να έχει σημασία, ώστε καμία υποδοχή να μην μείνει κενή. Επιλέγουμε με $P(40,4) = \frac{40!}{36!} = 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37$ τρόπους τον πρώτο φοιτητή σε κάθε εστιατόριο (τέσσερις φοιτητές συνολικά). Έτσι εξασφαλίζουμε ότι κανένα εστιατόριο δεν θα μείνει άδειο. Οι υπόλοιποι 36 φοιτητές κατανέμονται στα 4 εστιατόρια χωρίς περιορισμούς. Αφού η σειρά των φοιτητών έχει σημασία, αυτό γίνεται με $\frac{(36+4-1)!}{(4-1)!} = \frac{39!}{3!}$ τρόπους. Από τον κανόνα του γινομένου, το πλήθος των τρόπων είναι:

$$\frac{40!}{36!} \cdot \frac{39!}{3!}$$

Άσκηση 4. Σε ένα ντουλάπι υπάρχουν 10 ζευγάρια παπουτσιών (κάθε ζευγάρι αποτελείται από ένα δεξί και από ένα αριστερό παπούτσι, και κάθε ζευγάρι είναι διαφορετικό από οποιοδήποτε άλλο). Αν επιλέξουμε τυχαία 8 παπούτσια, ποια η πιθανότητα να μην επιλέξουμε κανένα ζευγάρι παπουτσιών και ποια η πιθανότητα να επιλέξουμε ένα ακριβώς ζευγάρι παπουτσιών;

Λύση. Όλες οι δυνατές επιλογές 8 παπουτσιών από 20 διαφορετικά παπούτσια είναι $C(20,8)$. Για την πρώτη περίπτωση, όπου δεν θέλουμε να επιλέξουμε κανένα ζευγάρι παπουτσιών, επιλέγουμε πρώτα τα 8 ζευγάρια από τα 10, από τα οποία θα διαλέξουμε ένα παπούτσι, και έπειτα ένα παπούτσι από καθένα από τα 8 ζευγάρια. Η επιλογή των 8 ζευγαριών από τα 10 γίνεται με $C(10,8)$ τρόπους. Στη συνέχεια, για καθένα από τα 8 ζευγάρια έχουμε 2 επιλογές (αριστερό ή δεξιό παπούτσι), οπότε υπάρχουν 2^8 τρόποι συνολικά να επιλέξουμε ένα παπούτσι από καθένα από τα 8 επιλεγμένα ζευγάρια. Άρα υπάρχουν $2^8 C(10,8)$ τρόποι συνολικά να επιλέξουμε 8 παπούτσια από τα 20 ώστε όλα να ανήκουν σε διαφορετικά ζευγάρια. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{2^8 \frac{10!}{2!8!}}{\frac{20!}{12!8!}} = \frac{2^7 \cdot 10! \cdot 12!}{20!} = \frac{2^7 \cdot 3}{19 \cdot 17 \cdot 13} \approx 0.0915$$

Για την δεύτερη περίπτωση, όπου θέλουμε να επιλέξουμε ακριβώς ένα ζευγάρι παπουτσιών, επιλέγουμε πρώτα αυτό το ζευγάρι (με 10 τρόπους), στη συνέχεια επιλέγουμε τα υπόλοιπα 6 ζευγάρια (από τα 9 διαθέσιμα, με $C(9,6)$ τρόπους) από τα οποία θα διαλέξουμε ένα παπούτσι, και τέλος επιλέγουμε ένα παπούτσι από καθένα από τα 6 επιλεγμένα ζευγάρια (με 2^6 τρόπους). Υπάρχουν λοιπόν $10 \cdot 2^6 \cdot C(9,6)$ τρόποι συνολικά να επιλέξουμε 8 παπούτσια από τα 20 ώστε δύο (ακριβώς) να ανήκουν στο ίδιο ζευγάρι. Έτσι η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{10 \cdot 2^6 \frac{9!}{3!6!}}{\frac{20!}{12!8!}} = \frac{7 \cdot 2^8}{19 \cdot 17 \cdot 13} \approx 0.4268$$

Άσκηση 5. Έχουμε n θέσεις στις οποίες θα καθήσουν $k+m$ καλεσμένοι, k (διακεκριμένοι) άνδρες και m (διακεκριμένες) γυναίκες, $n \geq \max\{k+m, 2k\}$. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθήσουν οι καλεσμένοι αν δεν μπορούν να κάθονται άνδρες σε διπλανές θέσεις (δηλ. ανάμεσα σε δύο άνδρες πρέπει να μεσολαβεί τουλάχιστον μία θέση που είτε είναι κενή είτε καταλαμβάνεται από γυναίκα) αν:

1. οι καλεσμένοι κάθονται σε μία σειρά;
2. οι καλεσμένοι κάθονται σε ένα κυκλικό τραπέζι; Να θεωρήσετε ως διαφορετικά τα ενδεχόμενα ο Α να κάθεται δεξιά του Β και ο Α να κάθεται αριστερά του Β.

Λύση. (1) Ας φανταστούμε ότι έχουμε n ίδιες καρέκλες που θα τοποθετηθούν στις n θέσεις, και ότι αρχικά δίνουμε σε κάθε άνδρα και σε κάθε γυναίκα από μία καρέκλα. Αυτό γίνεται με μοναδικό τρόπο, αφού οι καρέκλες δεν είναι διακεκριμένες. Απομένουν $n-k-m$ καρέκλες, οι οποίες θα παραμείνουν άδειες. Υπάρχουν $\frac{(n-k)!}{(n-k-m)!}$ διαφορετικές μεταθέσεις για τις γυναίκες και τις άδειες καρέκλες. Κάθε τέτοια μετάθεση ορίζει $n-k+1$ διακεκριμένες θέσεις στις οποίες μπορεί να τοποθετηθεί ένας άνδρας το πολύ. Έτσι ικανοποιείται ο περιορισμός να μην κάθονται δύο άνδρες σε διπλανές θέσεις. Ο αριθμός των διαφορετικών διατάξεων των k ανδρών στις $n-k+1$ διακεκριμένες θέσεις είναι $\frac{(n-k+1)!}{(n-2k+1)!}$. Ο συνολικός αριθμός των τρόπων να καθήσουν οι καλεσμένοι στη σειρά δίνεται από τον κανόνα του γινομένου και είναι ίσος με

$$\frac{(n-k)!}{(n-k-m)!} \cdot \frac{(n-k+1)!}{(n-2k+1)!}$$

(2) Αντίστοιχα υπολογίζεται ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να καθήσουν οι καλεσμένοι σε ένα κυκλικό τραπέζι. Οι μοναδικές διαφορές είναι ότι οι κυκλικές μεταθέσεις των m γυναικών και των $n-k-m$ άδειων καρεκλών είναι $\frac{(n-k-1)!}{(n-k-m)!}$ (παρατηρήστε ότι από μία κυκλική μετάθεση προκύπτουν $n-k$ διαφορετικές γραμμικές μεταθέσεις, μία για κάθε επιλογή του πρώτου στοιχείου στη γραμμική μετάθεση), και ότι κάθε κυκλική μετάθεση ορίζει $n-k$ διακεκριμένες θέσεις στις οποίες μπορεί να τοποθετηθεί ένας άνδρας το πολύ. Έτσι οι διαφορετικές διατάξεις των k ανδρών στις $n-k$ διακεκριμένες θέσεις είναι $\frac{(n-k)!}{(n-2k)!}$, και ο συνολικός αριθμός των τρόπων να καθήσουν οι καλεσμένοι σε ένα κυκλικό τραπέζι δίνεται είναι ίσος με

$$\frac{(n-k-1)!}{(n-k-m)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-2k)!}$$