Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

3η Σειρά Προτεινόμενων Ασκήσεων

Άσκηση 1 (Κατηγορηματική Λογική και Μαθηματική Επαγωγή). Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Έστω η πρόταση:

$$\varphi \equiv [\forall x P(x,x) \land \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \land P(y,z) \to P(x,z)) \land \forall x \forall y (P(x,y) \lor P(y,x))] \to \exists y \forall x P(y,x)$$

1. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της φ.
2. Να διατυπώσετε ερμηνεία που δεν αποτελεί μοντέλο της φ.

Άσκηση 2 (Αλυσίδες και Αντιαλυσίδες). Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ μια ακολουθία από n^2+1 διαφορετικούς ακεραίους. Θεωρούμε το σύνολο A που αποτελείται από n^2+1 διατεταγμένα ζεύγη ακεραίων της μορφής (a_k, k), $k \in \{1, \ldots, n^2+1\}$, και ορίζουμε μια διμελή σχέση R στο A τέτοια ώστε $((a_k, k), (a_\ell, \ell)) \in R$ αν και μόνο αν $a_k \leq a_\ell$ *και* $k \leq \ell$ (όπου $\leq$ η συνήθης διάταξη των αριθμών).

1. Να δείξετε ότι η σχέση R είναι μια σχέση μερικής διάταξης.
2. Ποια είναι η σημασία μιας αλυσίδας και μιας αντιαλυσίδας στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο (A, R);
3. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ περιέχει είτε μία αύξουσα υπακολουθία μήκους $n+1$ είτε μία φθίνουσα υπακολουθία μήκους $n+1$.

Άσκηση 3 (Γραφήματα). Να δείξετε ότι το συμπληρωματικό κάθε μη συνεκτικού γραφήματος είναι συνεκτικό.

Άσκηση 4 (Γραφήματα). Να αποδείξετε ότι κάθε απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με 11 κορυφές και 53 ακμές δεν έχει κύκλο Euler και έχει κύκλο Hamilton.

Άσκηση 5 (Γραφήματα). Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός ακμών που μπορεί να περιέχει ένα απλό διμερές γράφημα με n κορυφές.

Άσκηση 6 (Γραφήματα). Να χαρακτηρίσετε την κλάση των γραφημάτων στα οποία κάθε κύκλος Euler είναι επίσης και κύκλος Hamilton.

Άσκηση 7 (Γραφηματικές Ακολουθίες). Η *ακολουθία βαθμών* (degree sequence) ενός γραφήματος είναι η ακολουθία των βαθμών των κορυφών του, συνήθως σε φθίνουσα σειρά. Μια ακολουθία $n \geq 1$ φυσικών αριθμών ονομάζεται *γραφηματική* (graphic sequence) αν αποτελεί την ακολουθία βαθμών ενός *απλού* μη κατευθυνόμενου γραφήματος n κορυφών. Η μοναδική γραφηματική ακολουθία με ένα στοιχείο είναι η $d_1 = 0$.

Να δείξετε ότι μια ακολουθία $n > 1$ φυσικών $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_n)$, $d_1 \geq \cdots \geq d_n$, είναι γραφηματική αν και μόνο αν η ακολουθία $\boldsymbol{d'}$ που προκύπτει από την $\boldsymbol{d}$ αν αφαιρέσουμε το μεγαλύτερο στοιχείο d_1 και μειώσουμε τα d_1 επόμενα μεγαλύτερα στοιχεία της $\boldsymbol{d}$ κατά 1 είναι επίσης γραφηματική.

Άσκηση 8 (Διαχωριστές Δέντρων). Σε ένα δένδρο χωρίς προκαθορισμένη ρίζα ένας κόμβος λέγεται $1/k$-διαχωριστής αν μετά την αφαίρεσή του, οι συνεκτικές συνιστώσες που απομένουν έχουν το πολύ n/k κόμβους, όπου n ο αρχικός αριθμός των κόμβων του δένδρου.

1. Να δείξετε ότι σε κάθε δένδρο υπάρχει $1/2$-διαχωριστής.
2. Να δείξετε ότι αν σε ένα δένδρο υπάρχει $1/k$-διαχωριστής ($k < n$), τότε υπάρχει κόμβος με βαθμό τουλάχιστον k. Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο.

Άσκηση 9 (Διάβαση του Ποταμού). (α) Στην όχθη ενός ποταμού βρίσκονται ένας λύκος, ένα πρόβατο κι ένα καφάσι με μαρούλια. Υπάρχει μόνο μια βάρκα, η οποία εκτός από το βαρκάρη μπορεί να μεταφέρει μόνο ένα από τα προηγούμενα φορτία κάθε φορά. Όταν ο βαρκάρης είναι παρών τότε επικρατεί ηρεμία. Αλλά όταν ο βαρκάρης απουσιάζει, κάποια από τα παραπάνω μπορούν το ένα να φάει το άλλο. Συγκεκριμένα ισχύουν τα εξής:

– Αν ο λύκος και το πρόβατο μείνουν αφύλακτα στην όχθη όσο ο βαρκάρης μεταφέρει το καφάσι με τα μαρούλια, ο λύκος μπορεί να φάει το πρόβατο.
– Αν το πρόβατο μείνει αφύλακτο μαζί με τα μαρούλια στην όχθη όσο ο βαρκάρης μεταφέρει το λύκο, το πρόβατο θα φάει τα μαρούλια.

Περιγράψτε έναν τρόπο για να μεταφέρει ο βαρκάρης και τα τρία φορτία άθικτα στην απέναντι όχθη.

(β) Γενικεύοντας, έστω ότι υπάρχουν n αντικείμενα $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ τα οποία ο βαρκάρης επιθυμεί να περάσει στην απέναντι όχθη. Δίνεται γι' αυτά ένα γράφημα ασυμβατοτήτων, του οποίου οι κορυφές είναι τα n αντικείμενα και το x_i συνδέεται με το x_j όταν τα x_i και x_j δεν επιτρέπεται να μείνουν αφύλακτα μαζί στην ίδια όχθη (δηλαδή όταν κάποιο από τα δύο μπορεί να φάει το άλλο).

Βρείτε ποια είναι η ελάχιστη χωρητικότητα της βάρκας ώστε το πρόβλημα να λύνεται όταν το γράφημα ασυμβατοτήτων είναι:

– Το απλό μονοπάτι P_n
– Ο κύκλος C_n
– Ο αστέρας S_n

Πόσες φορές πρέπει ο βαρκάρης να διασχίσει τον ποταμό σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις;