Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

2η Σειρά Προτεινόμενων Ασκήσεων, Σχέδιο Λύσεων

Άσκηση 1 (Κατηγορηματική Λογική). (α) Δίνονται οι προτάσεις φ και ψ:

$$\varphi \equiv \forall x(Q(x) \lor P(x)) \to (\exists x Q(x) \lor \forall x P(x))$$
$$\psi \equiv (\exists x Q(x) \lor \forall x P(x)) \to \forall x(Q(x) \lor P(x))\,,$$

όπου $Q(x)$ και $P(x)$ μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα. Να εξετάσετε τις προτάσεις φ και ψ ως προς την λογική τους εγκυρότητα. Να αιτιολογήσετε κατάλληλα τους ισχυρισμούς σας.

(β) Έστω $\psi(x)$ τύπος με μία ελεύθερη μεταβλητή x, και φ πρόταση. Να δείξετε ότι η παρακάτω πρόταση είναι λογικά έγκυρη:

$$(\exists x \psi(x) \to \varphi) \leftrightarrow \forall x(\psi(x) \to \varphi)$$

Λύση. (α) Αρχικά αποδεικνύουμε ότι η ψ δεν είναι λογικά έγκυρη, παρουσιάζοντας ερμηνεία που δεν αποτελεί μοντέλο για την ψ. Στη δομή των φυσικών αριθμών, έστω ότι το $Q(x)$ αληθεύει ανν $x = 0$, και το $P(x)$ αληθεύει ανν ο x είναι άρτιος. Τότε στην πρόταση ψ, η υπόθεση $\exists x Q(x) \lor \forall x P(x)$ αληθεύει, αφού δηλώνει ότι "υπάρχει φυσικός που ισούται με το 0 ή κάθε φυσικός είναι άρτιος", ενώ το συμπέρασμα $\forall x(Q(x) \lor P(x))$, δεν αληθεύει, αφού δηλώνει ότι "κάθε φυσικός ισούται με το 0 ή είναι άρτιος".

Στην συνέχεια αποδεικνύουμε ότι η φ είναι λογικά έγκυρη. Θεωρούμε μια αυθαίρετη ερμηνεία $\mathcal{A}$ με σύμπαν το A. Υποθέτουμε ότι αληθεύει η υπόθεση της φ στην $\mathcal{A}$, δηλ. ότι για κάθε $\alpha \in A$, $\mathcal{A} \models Q(\alpha)$ ή $\mathcal{A} \models P(\alpha)$. Θα δείξουμε ότι αληθεύει και το συμπέρασμα, δηλαδή ότι $\mathcal{A} \models \exists x Q(x) \lor \forall x P(x)$. Πράγματι, αν υπάρχει στοιχείο $\beta \in A$ τέτοιο ώστε να αληθεύει το $Q(\beta)$, τότε $\mathcal{A} \models \exists x Q(x)$, και το συμπέρασμα της φ αληθεύει. Αν δεν υπάρχει κανένα $\beta \in A$ για το οποίο αληθεύει το $Q(\beta)$, ο μοναδικός τρόπος να αληθεύει η υπόθεση της φ είναι να ισχύει ότι για κάθε $\beta \in A$, $\mathcal{A} \models P(\beta)$. Άρα $\mathcal{A} \models \forall x P(x)$, οπότε το συμπέρασμα της φ αληθεύει και σε αυτή την περίπτωση.

(β) Έστω αυθαίρετα επιλεγμένη ερμηνεία $\mathcal{A}$ με σύμπαν το A. Πρέπει να δείξουμε ότι οι (1) και (2) είναι ισοδύναμες:

$$\mathcal{A} \models \exists x \psi(x) \to \varphi \tag{1}$$

$$\mathcal{A} \models \forall x(\psi(x) \to \varphi) \tag{2}$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι η (1) συνεπάγεται λογικά την (2). Με βάση τον ορισμό αλήθειας του Tarski, η (1) αληθεύει ανν

$$\text{αν } \mathcal{A} \models \exists x \psi(x)\,, \text{ τότε } \mathcal{A} \models \varphi$$

Έστω ότι υπάρχει $\alpha \in A$ τέτοιο ώστε $\mathcal{A} \models \psi(\alpha)$. Αφού η (1) είναι αληθής, $\mathcal{A} \models \varphi$. Επομένως, η (2) αληθεύει στην $\mathcal{A}$, αφού για κάθε $\beta \in A$, το συμπέρασμα της συνεπαγωγής $\psi(\beta) \to \varphi$ είναι αληθές. Αν δεν υπάρχει $\alpha \in A$ για το οποίο το $\psi(\alpha)$ αληθεύει στην $\mathcal{A}$, για κάθε στοιχείο $\beta \in A$, η υπόθεση της συνεπαγωγής $\psi(\beta) \to \varphi$ είναι ψευδής. Άρα για κάθε $\beta \in A$, η συνεπαγωγή $\psi(\beta) \to \varphi$ είναι αληθής. Επομένως, η (2) αληθεύει στην $\mathcal{A}$.

Πρέπει να δείξουμε και το αντίστροφο, δηλαδή ότι η (2) συνεπάγεται λογικά την (1). Με βάση τον ορισμό αλήθειας του Tarski, η (2) αληθεύει ανν

$$\text{για κάθε } \alpha \in A \text{ (αν } \mathcal{A} \models \psi(\alpha)\text{, τότε } \mathcal{A} \models \varphi)$$

Έστω ότι υπάρχει $\alpha \in A$ τέτοιο ώστε $\mathcal{A} \models \psi(\alpha)$. Αφού η συνεπαγωγή $\psi(\alpha) \to \varphi$ αληθεύει, $\mathcal{A} \models \varphi$. Επομένως, η (1) αληθεύει στην $\mathcal{A}$, αφού πρόκειται για συνεπαγωγή με αληθές συμπέρασμα. Αν δεν υπάρχει $\alpha \in A$ για το οποίο το $\psi(\alpha)$ αληθεύει, η (1) αληθεύει γιατί η υπόθεση της (δηλ. ο υποτύπος $\exists x \psi(x)$) είναι ψευδής. □

Άσκηση 2 (Μαθηματική Επαγωγή). (α) Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$,

$$1^2 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 \tag{3}$$

(β) Σε πόσες (μη επικαλυπτόμενες) περιοχές χωρίζουν το επίπεδο n ευθείες που ανά δύο δεν είναι παράλληλες και ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας με μαθηματική επαγωγή στον αριθμό των ευθειών n.

Λύση. (α). Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς.
Βάση της επαγωγής: Η (3) ισχύει προφανώς για $n = 1$.
Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι η (3) ισχύει για έναν αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό $n \geq 1$.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι η (3) ισχύει για τον επόμενο φυσικό $n + 1$. Πράγματι:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \overbrace{(1 + 2 + \cdots + n)^2}^{\text{επαγωγική υπόθεση}} + (n+1)^3 \\
&= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + \overbrace{2\tfrac{n(n+1)}{2}(n+1) + (n+1)^2}^{=(n+1)^3} \\
&= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + 2\overbrace{(1 + 2 + \cdots + n)}^{=\frac{n(n+1)}{2}}(n+1) + (n+1)^2 \\
&= [(1 + 2 + \cdots + n) + (n+1)]^2
\end{aligned}$$

(β) Έστω a_n ο αριθμός των περιοχών που ορίζουν n τέτοιες ευθείες στο επίπεδο. Σκεπτόμενοι επαγωγικά, θα διατυπώσουμε την αναδρομική εξίσωση που περιγράφει το a_n. Ως βάση του συλλογισμού, παρατηρούμε ότι $a_0 = 1$ (αν δεν υπάρχει καμία ευθεία, το επίπεδο αποτελείται από μία περιοχή), $a_1 = 2$ (μία ευθεία χωρίζει το επίπεδο σε δύο περιοχές), και $a_2 = 4$ (δύο ευθείες χωρίζουν το επίπεδο σε 4 περιοχές).

Για το βήμα, έστω ότι έχουμε $n - 1$ ευθείες που χωρίζουν το επίπεδο σε a_{n-1} περιοχές. Η n-οστή ευθεία έχει $n-1$ σημεία τομής με τις υπόλοιπες ευθείες. Τα σημεία αυτά χωρίζουν την n-οστή ευθεία σε n τμήματα. Κάθε τέτοιο τμήμα της n-οστής ευθείας διαιρεί μια από τις υπάρχουσες a_{n-1} περιοχές στα δύο (με άλλα λόγια, κάθε τμήμα της n-οστής ευθείας προσθέτει μια νέα περιοχή στις ήδη υπάρχουσες). Επομένως, ισχύει ότι $a_n = a_{n-1} + n$ με αρχική συνθήκη $a_0 = 1$. Είναι εύκολο (είτε με μαθηματική επαγωγή, είτε παρατηρώντας ότι $a_n = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 + 1$) να δείξουμε ότι $a_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$. □

Άσκηση 3 (Μαθηματική Επαγωγή). Θεωρούμε n φίλους που ο καθένας ξέρει ένα διαφορετικό μυστικό και επικοινωνούν μεταξύ τους τηλεφωνικά ανά δύο. Κάθε φορά που δύο φίλοι μιλούν στο τηλέφωνο, ανταλλάσσουν όλα τα μυστικά που γνωρίζουν εκείνη τη στιγμή. Συμβολίζουμε με $A(n)$ τον ελάχιστο αριθμό τηλεφωνημάτων που απαιτούνται για να μάθουν όλοι οι φίλοι όλα τα μυστικά.

1. Να υπολογίσετε τα $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, και $A(5)$. Να περιγράψετε τις αντίστοιχες ακολουθίες τηλεφωνημάτων.
2. Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό $n \geq 4$, $A(n) \leq 2n - 4$.

Λύση. (1) Είναι $A(2) = 1$, $A(3) = 3$, $(4) = 4$, και $A(5) = 6$.

(2) *Βάση της επαγωγής*: Αν έχουμε 4 φίλους $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, αυτοί μαθαίνουν όλα τα μυστικά αν επικοινωνήσουν πρώτα οι α_1 και α_2 και οι α_3 και α_4, και έπειτα οι α_1 και α_3 και οι α_2 και α_4. Αυτό απαιτεί 4 τηλεφωνήματα. Συνεπώς $A(4) \leq 4$.
Επαγωγική Υπόθεση: Έστω ότι για αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό $n \geq 4$, ισχύει ότι $A(n) \leq 2n - 4$.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι $A(n+1) \leq 2(n+1) - 4$. Έστω ότι έχουμε $n+1$ φίλους, τους $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$. Θεωρούμε ότι αρχικά επικοινωνούν οι α_n και α_{n+1} (ένα τηλεφώνημα). Τώρα ο α_n γνωρίζει το μυστικό του α_{n+1}, και στο εξής το μεταδίδει μαζί με το δικό του μυστικό.

Στη συνέχεια, αγνοούμε προσωρινά τον α_{n+1}, και θεωρούμε ότι οι πρώτοι n φίλοι ανταλλάσσουν τα μυστικά τους με την βέλτιστη ακολουθία τηλεφωνημάτων ($A(n)$ τηλεφωνήματα). Αφού το μυστικό του α_{n+1} μεταδίδεται με το μυστικό του α_n, με την ολοκλήρωση αυτής της ακολουθίας τηλεφωνημάτων, οι πρώτοι n φίλοι γνωρίζουν όλα τα μυστικά (συμπεριλαμβανομένου και του μυστικού του α_{n+1}).

Τέλος ο α_n τηλεφωνεί στον α_{n+1} (ένα τηλεφώνημα), και τον ενημερώνει για τα μυστικά που ο τελευταίος δεν γνωρίζει. Έτσι ο α_{n+1} μαθαίνει όλα τα μυστικά.

Αφού $A(n) \leq 2n - 4$, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, ο συνολικός αριθμός τηλεφωνημάτων για $n+1$ φίλους είναι $A(n+1) \leq 2 + A(n) \leq 2(n+1) - 4$. □

Άσκηση 4 (Κατηγορηματική Λογική και Μαθηματική Επαγωγή). Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Έστω η πρόταση:

$$\varphi \equiv [\forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x))] \to \exists y \forall x P(y,x)$$

1. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της φ.
2. Να διατυπώσετε ερμηνεία που δεν αποτελεί μοντέλο της φ.

Λύση. (1) Έστω ερμηνεία $\mathcal{A}$ με πεπερασμένο (μη-κενό) σύμπαν A. Παρατηρούμε ότι λόγω της υπόθεσης, η πρόταση φ αφορά σε σχέσεις P με τις παρακάτω ιδιότητες: (i) ανακλαστική ιδιότητα, $\forall x P(x,x)$, (ii) μεταβατική ιδιότητα, $\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$, και (iii) ότι για κάθε ζεύγος στοιχείων, κάποιο σχετίζεται με το άλλο, $\forall x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x))$ (στην συνέχεια, θα αναφερόμαστε σε αυτή την ιδιότητα ως Ιδ3, χάριν συντομίας). Αν η σχέση P δεν έχει κάποια από τις παραπάνω ιδιότητες στην $\mathcal{A}$, τότε η φ αληθεύει τετριμμένα, ως συνεπαγωγή με ψευδή υπόθεση. Αν η σχέση P έχει τις τρεις παραπάνω ιδιότητες, τότε η φ αληθεύει ανν υπάρχει στοιχείο του A που P-σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του A.

Η απόδειξη είναι με επαγωγή στον αριθμό των στοιχείων του $|A|$. Με βάση την παραπάνω παρατήρηση, εστιάζουμε στην περίπτωση που η P έχει τις τρεις παραπάνω ιδιότητες στην $\mathcal{A}$.
Βάση της επαγωγής: Έστω $|A| = 1$ και αυθαίρετη ερμηνεία $\mathcal{A}$ στο A. Αν η P είναι ανακλαστική, το μοναδικό στοιχείο του σύμπαντος P-σχετίζεται με τον εαυτό του. Διαφορετικά, η φ αληθεύει γιατί έχει ψευδή υπόθεση. Άρα η φ αληθεύει στην $\mathcal{A}$.
Επαγωγική Υπόθεση: Για αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό $n \geq 1$, θεωρούμε σύμπαν $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ και αυθαίρετη ερμηνεία $\mathcal{A}$ στο A, και υποθέτουμε ότι η φ αληθεύει στην $\mathcal{A}$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι αν η P είναι ανακλαστική, μεταβατική, και έχει την Ιδ3 στην $\mathcal{A}$, τότε υπάρχει στοιχείο $\alpha \in A$ που P-σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του A.

Επαγωγικό βήμα: Θεωρούμε σύμπαν $A' = A \cup \{\alpha_{n+1}\}$ και αυθαίρετη ερμηνεία $\mathcal{A}'$ στο A'. Θα δείξουμε ότι η φ αληθεύει στην $\mathcal{A}'$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι η P είναι ανακλαστική, μεταβατική, και έχει την Ιδ3 στην $\mathcal{A}'$ (διαφορετικά η φ αληθεύει επειδή έχει ψευδή υπόθεση). Παρατηρούμε ότι η P διατηρεί αυτές τις ιδιότητες αν περιορίσουμε την ερμηνεία $\mathcal{A}'$ στο A (δηλ. αν αγνοήσουμε προσωρινά το στοιχείο α_{n+1}). Συνεπώς, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, υπάρχει στοιχείο $\alpha \in A$ που P-σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του A.

Για να εξετάσουμε την τιμή αλήθειας της φ στην $\mathcal{A}'$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: Αν το $P(\alpha, \alpha_{n+1})$ αληθεύει στην $\mathcal{A}'$, τότε το στοιχείο α P-σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του A', και η φ αληθεύει. Αν το $P(\alpha, \alpha_{n+1})$ δεν αληθεύει, πρέπει λόγω της Ιδ3, να αληθεύει ότι $P(\alpha_{n+1}, \alpha)$. Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, το στοιχείο α P-σχετίζεται με κάθε στοιχείο $\alpha_i \in A$. Άρα, λόγω της μεταβατικής ιδιότητας, το στοιχείο α_{n+1} P-σχετίζεται με κάθε στοιχείο $\alpha_i \in A$. Επιπλέον, λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας, το α_{n+1} P-σχετίζεται με τον εαυτό του. Άρα το στοιχείο α_{n+1} P-σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του A', και η φ αληθεύει. Συνεπώς η φ αληθεύει στην $\mathcal{A}'$.

(2) Εφόσον όλες οι ερμηνείες με πεπερασμένο σύμπαν είναι μοντέλα της φ, πρέπει να εξετάσουμε ερμηνείες με άπειρο σύμπαν. Έστω ότι το σύμπαν είναι οι φυσικοί αριθμοί και ότι το κατηγορηματικό σύμβολο P ερμηνεύεται με την σχέση "μεγαλύτερο ή ίσο" (δηλ. το $P(x, y)$ αληθεύει ανν $x \geq y$). Σε αυτή την ερμηνεία, η σχέση P είναι ανακλαστική, μεταβατική, και έχει την Ιδ3. Όμως, δεν υπάρχει φυσικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος ή ίσος όλων των φυσικών (το σύνολο των φυσικών αριθμών εκτείνεται στο άπειρο, δεν είναι φραγμένο άνω). Επομένως η φ δεν αληθεύει σε αυτή την ερμηνεία. □

Άσκηση 5 (Αλυσίδες και Αντιαλυσίδες). Έστω $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ μια ακολουθία από $n^2 + 1$ διαφορετικούς ακεραίους. Θεωρούμε το σύνολο A που αποτελείται από $n^2 + 1$ διατεταγμένα ζεύγη ακεραίων της μορφής (a_k, k), $k \in \{1, \dots, n^2 + 1\}$, και ορίζουμε μια διμελή σχέση R στο A τέτοια ώστε $((a_k, k), (a_\ell, \ell)) \in R$ αν και μόνο αν $a_k \leq a_\ell$ *και* $k \leq \ell$ (όπου $\leq$ η συνήθης διάταξη των αριθμών).

1. Να δείξετε ότι η σχέση R είναι μια σχέση μερικής διάταξης.
2. Ποια είναι η σημασία μιας αλυσίδας και μιας αντιαλυσίδας στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο (A, R);
3. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ περιέχει είτε μία αύξουσα υπακολουθία μήκους $n + 1$ είτε μία φθίνουσα υπακολουθία μήκους $n + 1$.

Λύση. (1) Η σχέση R είναι *ανακλαστική* γιατί για κάθε $k \in \{1, \dots, n^2 + 1\}$, $a_k \leq a_k$ και $k \leq k$, άρα $((a_k, k), (a_k, k)) \in R$. Η σχέση R είναι *μεταβατική* γιατί για κάθε $((a_k, k), (a_\ell, \ell)), ((a_\ell, \ell), (a_j, j)) \in R$, έχουμε ότι $a_k \leq a_\ell \leq a_j$ και ότι $k \leq \ell \leq j$, και συνεπώς $((a_k, k), (a_j, j)) \in R$. Η σχέση R είναι *αντισυμμετρική* γιατί για κάθε $((a_k, k), (a_\ell, \ell)) \in R$ με $k \neq \ell$, έχουμε ότι $((a_\ell, \ell), (a_k, k)) \notin R$, γιατί $\ell > k$. Άρα η σχέση R είναι σχέση μερικής διάταξης.
(2) Κάθε αλυσίδα μήκους m της R αντιστοιχεί σε μία αύξουσα υπακολουθία μήκους m της $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$, και αντίστροφα. Πράγματι, τα $(a_{k_1}, k_1), (a_{k_2}, k_2), \dots, (a_{k_m}, k_m)$ αποτελούν μια αλυσίδα μήκους m της R ανν (λόγω του ορισμού της R) $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$ και $a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq \cdots \leq a_{k_m}$ ανν η ακολουθία $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_m}$ αποτελεί μια αύξουσα υπακολουθία μήκους m της $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$.

Κάθε αντιαλυσίδα μεγέθους m της R αντιστοιχεί σε μία φθίνουσα υπακολουθία μήκους m της $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$, και αντίστροφα. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι αν τα $(a_{k_1}, k_1), (a_{k_2}, k_2), \dots, (a_{k_m}, k_m)$ αποτελούν μια αντιαλυσίδα της R, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$ (δηλ. απαριθμούμε τα στοιχεία της αντιαλυσίδας σε αύξουσα σειρά των δεικτών τους). Επομένως τα $(a_{k_1}, k_1), (a_{k_2}, k_2), \dots, (a_{k_m}, k_m)$, $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$, αποτελούν μια αντιαλυσίδα μεγέθους m της R ανν $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$ και (λόγω του ορισμού της R) $a_{k_1} > a_{k_2} > \cdots > a_{k_m}$ ανν η ακολουθία $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_m}$ αποτελεί μια φθίνουσα υπακολουθία μήκους m της $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$.

(3) Αποτελεί άμεση συνέπεια του (2) και του ότι το μερικώς διατεταγμένο σύνολο (A, R) είτε περιέχει μια αλυσίδα μήκους n είτε περιέχει μια αντιαλυσίδα μεγέθους n. $\square$

Θέμα 1 (Αρχή Περιστερώνα). (α) Να δείξετε ότι ανάμεσα σε $n+2$ αυθαίρετα επιλεγμένους ακεραίους, είτε υπάρχουν δύο που η διαφορά τους διαιρείται από το $2n$ είτε υπάρχουν δύο που το άθροισμά τους διαιρείται από το $2n$.
(β) Έστω n αυθαίρετα επιλεγμένοι ακέραιοι $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Να δείξετε ότι υπάρχουν φυσικοί ℓ, k, $1 \leq \ell \leq n$, $0 \leq k \leq n - \ell$, τέτοιοι ώστε το άθροισμα $a_\ell + a_{\ell+1} + \cdots + a_{\ell+k}$ να διαιρείται από το n.

Λύση. (α) Ως "φωλιές" θεωρούμε τα $n+1$ ζεύγη φυσικών $\{i, 2n-i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, και ως "περιστέρια" τους $n + 2$ ακεραίους στους οποίους αναφέρεται η εκφώνηση. Κάθε "περιστέρι" x ανατίθεται στη "φωλιά" $\{i, 2n-i\}$ ανν είτε $x \mod 2n = i$ είτε $x \mod 2n = 2n-i$. Λόγω της αρχής του περιστερώνα, θα υπάρχει μία "φωλιά" i που δέχεται δύο (τουλάχιστον) "περιστέρια" x, y. Για απλότητα και χβτγ, θεωρούμε ότι $x \geq y$ και ότι $x \mod 2n = i$. Αν $y \mod 2n = i$, τότε το $x - y$ διαιρείται από το $2n$. Αν $y \mod 2n = 2n - i$, τότε το $x + y$ διαιρείται από το $2n$.

(β) Ως "φωλιές" θεωρούμε τους n φυσικούς αριθμούς $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Ως "περιστέρια" θεωρούμε τα n μερικά αθροίσματα $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$, $k = 1, \ldots, n$. Κάθε "περιστέρι" S_k ανατίθεται στη "φωλιά" i ανν $S_k \mod n = i$. Αν υπάρχει "περιστέρι" στη "φωλιά" 0, τότε το αντίστοιχο μερικό άθροισμα διαιρείται από το n. Διαφορετικά η "φωλιά" 0 μένει κενή, και λόγω της αρχής του περιστερώνα, θα υπάρχει μια "φωλιά" i, $i = 1, \ldots, n - 1$, που δέχεται τουλάχιστον δύο "περιστέρια" S_k και S_m. Έστω ότι $k < m$. Παρατηρούμε ότι η διαφορά $S_m - S_k = a_{k+1} + \cdots + a_m$ διαιρείται από το n. $\square$