Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

2η Σειρά Προτεινόμενων Ασκήσεων

Άσκηση 1 (Κατηγορηματική Λογική). (α) Δίνονται οι προτάσεις φ και ψ:

$$\varphi \equiv \forall x(Q(x) \lor P(x)) \to (\exists x Q(x) \lor \forall x P(x))$$
$$\psi \equiv (\exists x Q(x) \lor \forall x P(x)) \to \forall x(Q(x) \lor P(x))\,,$$

όπου $Q(x)$ και $P(x)$ μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα. Να εξετάσετε τις προτάσεις φ και ψ ως προς την λογική τους εγκυρότητα. Να αιτιολογήσετε κατάλληλα τους ισχυρισμούς σας.

(β) Έστω $\psi(x)$ τύπος με μία ελεύθερη μεταβλητή x, και φ πρόταση. Να δείξετε ότι η παρακάτω πρόταση είναι λογικά έγκυρη:

$$(\exists x \psi(x) \to \varphi) \leftrightarrow \forall x(\psi(x) \to \varphi)$$

Άσκηση 2 (Μαθηματική Επαγωγή). (α) Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$,

$$1^2 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

(β) Σε πόσες (μη επικαλυπτόμενες) περιοχές χωρίζουν το επίπεδο n ευθείες που ανά δύο δεν είναι παράλληλες και ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας με μαθηματική επαγωγή στον αριθμό των ευθειών n.

Άσκηση 3 (Μαθηματική Επαγωγή). Θεωρούμε n φίλους που ο καθένας ξέρει ένα διαφορετικό μυστικό και επικοινωνούν μεταξύ τους τηλεφωνικά ανά δύο. Κάθε φορά που δύο φίλοι μιλούν στο τηλέφωνο, ανταλλάσσουν όλα τα μυστικά που γνωρίζουν εκείνη τη στιγμή. Συμβολίζουμε με $A(n)$ τον ελάχιστο αριθμό τηλεφωνημάτων που απαιτούνται για να μάθουν όλοι οι φίλοι όλα τα μυστικά.

1. Να υπολογίσετε τα $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, και $A(5)$. Να περιγράψετε τις αντίστοιχες ακολουθίες τηλεφωνημάτων.
2. Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό $n \geq 4$, $A(n) \leq 2n - 4$.

Άσκηση 4 (Κατηγορηματική Λογική και Μαθηματική Επαγωγή). Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Έστω η πρόταση:

$$\varphi \equiv [\forall x P(x,x) \land \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \land P(y,z) \to P(x,z)) \land \forall x \forall y (P(x,y) \lor P(y,x))] \to \exists y \forall x P(y,x)$$

1. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της φ.
2. Να διατυπώσετε ερμηνεία που δεν αποτελεί μοντέλο της φ.

Άσκηση 5 (Αρχή Περιστερώνα). (α) Να δείξετε ότι ανάμεσα σε $n+2$ αυθαίρετα επιλεγμένους ακεραίους, είτε υπάρχουν δύο που η διαφορά τους διαιρείται από το $2n$ είτε υπάρχουν δύο που το άθροισμά τους διαιρείται από το $2n$.

(β) Έστω n αυθαίρετα επιλεγμένοι ακέραιοι $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Να δείξετε ότι υπάρχουν φυσικοί ℓ, k, $1 \leq \ell \leq n$, $0 \leq k \leq n - \ell$, τέτοιοι ώστε το άθροισμα $a_\ell + a_{\ell+1} + \cdots + a_{\ell+k}$ να διαιρείται από το n.

Άσκηση 6 (Αλυσίδες και Αντιαλυσίδες). Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ μια ακολουθία από $n^2 + 1$ διαφορετικούς ακεραίους. Θεωρούμε το σύνολο A που αποτελείται από $n^2 + 1$ διατεταγμένα ζεύγη ακεραίων της μορφής (a_k, k), $k \in \{1, \ldots, n^2 + 1\}$, και ορίζουμε μια διμελή σχέση R στο A τέτοια ώστε $((a_k, k), (a_\ell, \ell)) \in R$ αν και μόνο αν $a_k \leq a_\ell$ *και* $k \leq \ell$ (όπου $\leq$ η συνήθης διάταξη των αριθμών).

1. Να δείξετε ότι η σχέση R είναι μια σχέση μερικής διάταξης.
2. Ποια είναι η σημασία μιας αλυσίδας και μιας αντιαλυσίδας στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο (A, R);
3. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ περιέχει είτε μία αύξουσα υπακολουθία μήκους $n + 1$ είτε μία φθίνουσα υπακολουθία μήκους $n + 1$.