Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Ηλεκτρολογων Μηχανικων &
Μηχανικων Υπολογιστων

Μαθηματική Επαγωγή

Συμπληρωματικές Σημειώσεις για το Μάθημα
"Διακριτές Μέθοδοι για την Επιστήμη των Υπολογιστών"

Δημήτρης Φωτάκης

Λέκτορας

Απρίλιος 2009

Περιεχόμενα

1 Μαθηματική Επαγωγή στους Φυσικούς Αριθμούς

Η *μαθηματική επαγωγή* αποτελεί μια ισχυρή αποδεικτική τεχνική που χρησιμοποιείται για να δείξουμε ότι όλα τα στοιχεία ενός άπειρου συνόλου έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Η πιο συνηθισμένη εφαρμογή της μαθηματικής επαγωγής αφορά στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Η μαθηματική επαγωγή όμως εφαρμόζεται σε κάθε μαθηματικό αντικείμενο που μπορεί να οριστεί αναδρομικά. Εφαρμόζοντας μαθηματική επαγωγή μπορούμε, μεταξύ άλλων, να αποδείξουμε ιδιότητες των τύπων στη Μαθηματική Λογική, σημαντικά αποτελέσματα της Θεωρίας Γραφημάτων και της Θεωρίας Αριθμών, και αποτελέσματα που αφορούν στη λειτουργία, στην ορθότητα, και στην υπολογιστική πολυπλοκότητα αλγορίθμων.

Αυτές οι σημειώσεις αποτελούν μια εκτενή εισαγωγή στην αποδεικτική τεχνική της Μαθηματικής Επαγωγής και στις (σχετικές με το πλαίσιο του μαθήματος "Διακριτές Μέθοδοι για την Επιστήμη των Υπολογιστών") εφαρμογές της. Η μελέτη αυτών των σημειώσεων δεν προϋποθέτει κάποιες γνώσεις, εκτός ίσως από έναν μικρό βαθμό εξοικείωσης με τη βασική ορολογία της Προτασιακής Λογικής και της Θεωρίας Γραφημάτων. Στις σημειώσεις παρουσιάζονται οι αρχές της Μαθηματικής Επαγωγής και της Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής, και περιγράφεται ένα πλαίσιο διατύπωσης επαγωγικών αποδείξεων. Μέσα από παραδείγματα, γίνεται εκτενής αναφορά στο ρόλο της επαγωγικής υπόθεσης κατά τη διατύπωση μιας επαγωγικής απόδειξης, σε συνηθισμένα σφάλματα κατά τη διατύπωση επαγωγικών αποδείξεων, και στον τρόπο με τον οποίο η τεχνική της Μαθηματικής Επαγωγής μπορεί να εφαρμοστεί για την απόδειξη χρήσιμων ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών, των προτασιακών τύπων, και των γραφημάτων, και για την ανάλυση αναδρομικών αλγόριθμων.

Παράδειγμα 1.1. Για να δείξουμε τη βασική ιδέα της μαθηματικής επαγωγής, ας ξεκινήσουμε με ένα οικείο παράδειγμα που αφορά στους φυσικούς αριθμούς. Θέλουμε να δείξουμε ότι το άθροισμα των φυσικών αριθμών από 1 μέχρι n είναι ίσο με $\frac{n(n+1)}{2}$. Με άλλα λόγια, θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, ισχύει ότι

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1.1}$$

Είναι φανερό ότι η (1.1) ισχύει για $n = 1$. Ίσως κάποιοι δοκιμάσουμε να επαληθεύσουμε το ζητούμενο για λίγες ακόμη τιμές του n. Π.χ. για $n = 2$, έχουμε ότι $1 + 2 = 3 = \frac{2\cdot3}{2}$, για $n = 3$, έχουμε ότι $1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3\cdot4}{2}$, για $n = 4$, έχουμε ότι $1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \frac{4\cdot5}{2}$, κοκ.

Έτσι καταφέρνουμε να επαληθεύσουμε την ισότητα (1.1) μέχρι κάποιον φυσικό $n \geq 1$ (καθένας μας επιλέγει αυθαίρετα που θα σταματήσει τη διαδικασία επαλήθευσης, οπότε ας μην υποθέσουμε τίποτα για την τιμή του n). Θεωρούμε λοιπόν ως δεδομένο ότι η (1.1) ισχύει για κάποιον (αυθαίρετα επιλεγμένο) φυσικό $n \geq 1$. Ως επόμενο βήμα, θεωρούμε το αντίστοιχο άθροισμα με όριο τον επόμενο φυσικό αριθμό $n+1$. Χρησιμοποιώντας ότι το άθροισμα των φυσικών από 1 μέχρι n είναι ίσο με $\frac{n(n+1)}{2}$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\overbrace{1+\ldots+n}^{=\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι:

(α) Η (1.1) ισχύει για $n = 1$.

(β) Αν η (1.1) ισχύει για κάποιον (συγκεκριμένο) φυσικό $n \geq 1$, τότε η αντίστοιχη ισότητα ισχύει και για τον επόμενο φυσικό $n+1$.

Τα (α) και (β) αρκούν για να αποδείξουμε ότι η (1.1) ισχύει για κάθε φυσικό $n \geq 1$. Πράγματι, το (α) δείχνει ότι η (1.1) ισχύει για $n = 1$. Εφαρμόζοντας τώρα το (β) για $n = 1$, έχουμε ότι η (1.1) ισχύει για $n = 2$. Συνεχίζουμε εφαρμόζοντας το (β) για $n = 2$, οπότε έχουμε ότι η (1.1) ισχύει για $n = 3$, κοκ. Με αυτή τη διαδικασία, αποδεικνύουμε διαδοχικά ότι η (1.1) ισχύει για $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$, και τελικά για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$. □

1.1 Η Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

Το Παράδειγμα 1.1 αποτελεί μια απλή εφαρμογή της αποδεικτικής τεχνικής της μαθηματικής επαγωγής. Πριν προχωρήσουμε σε κάποια πιο σύνθετα και ενδιαφέροντα παραδείγματα, είναι χρήσιμο να διατυπώσουμε στη γενική της μορφή την *αρχή της μαθηματική επαγωγή* για φυσικούς αριθμούς.

Πρόταση 1.1 (Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής). *Έστω $P(n)$ μια λογική πρόταση που εξαρτάται από έναν φυσικό αριθμό n. Αν*

(α) η πρόταση $P(n_0)$ είναι αληθής για κάποιον φυσικό αριθμό n_0, και

(β) για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq n_0$, αν αληθεύει η πρόταση $P(n)$, τότε αληθεύει και η πρόταση $P(n+1)$,

τότε η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq n_0$.

Θεωρούμε λοιπόν μια λογική πρόταση $P(n)$, η οποία εκφράζει κάποια ιδιότητα του φυσικού αριθμού n (π.χ. τέτοιες προτάσεις είναι η ισότητα (1.1), η δήλωση ότι "ο αριθμός $2n+1$ είναι περιττός", κοκ.), και θέλουμε να αποδείξουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος ενός δεδομένου n_0 έχει αυτή την ιδιότητα. Με βάση την Πρόταση 1.1, αρκεί να αποδείξουμε (α) ότι η πρόταση $P(n_0)$ ισχύει για την αρχική τιμή n_0 (δηλ. το n_0 έχει την ιδιότητα), και (β) ότι για κάθε φυσικό $n \geq n_0$, αν ο αριθμός n έχει την ιδιότητα που εκφράζεται από το $P(n)$, τότε και ο επόμενός του $n+1$ έχει την αντίστοιχη ιδιότητα που εκφράζεται από το $P(n+1)$ (δηλ. αποδεικνύουμε ότι το $P(n)$ συνεπάγεται το $P(n+1)$). Αυτή η μέθοδος απόδειξης είναι γνωστή ως *μαθηματική επαγωγή* (ή απλά *επαγωγή* χάριν συντομίας). Σε μια επαγωγική απόδειξη, το (α) αναφέρεται ως *βάση της επαγωγής*, το (β) ως *επαγωγικό βήμα*, και η υπόθεση ότι η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής ως *επαγωγική υπόθεση*.

Στο Παράδειγμα 1.1, η λογική πρόταση $P(n)$, για την οποία αποδεικνύουμε ότι ισχύει για κάθε $n \geq 1$, δηλώνει ότι "το άθροισμα των φυσικών αριθμών από 1 μέχρι n είναι ίσο με $\frac{n(n+1)}{2}$" (με άλλα λόγια, το $P(n)$ αντιστοιχεί στην ισότητα (1.1)). Έχοντας αποδείξει (α) ότι η ισότητα ισχύει για $n = 1$ (άρα το $P(1)$ είναι αληθές), και (β) ότι αν η ισότητα ισχύει για κάποιον φυσικό n, τότε ισχύει και για τον επόμενό του $n+1$ (δηλ. ότι αν αληθεύει το $P(n)$, τότε αληθεύει και το $P(n+1)$), η αρχή της μαθηματικής επαγωγής εξασφαλίζει ότι η ισότητα (1.1) ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$.

Σε διαισθητικό επίπεδο, θα μπορούσαμε να παραλληλίσουμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής με μια άπειρου μήκους σειρά από ντόμινο τοποθετημένα έτσι ώστε η πτώση ενός ντόμινο να παρασύρει σε πτώση και το επόμενο. Σε μια τέτοια σειρά, η πτώση του πρώτου ντόμινο παρασύρει σε πτώση το δεύτερο ντόμινο, αυτό το τρίτο, το τέταρτο, κοκ., και τελικά όλα τα ντόμινο πέφτουν[1].

1.2 Εφαρμογές της Μαθηματικής Επαγωγής

Η διατύπωση μιας απόδειξης με μαθηματική επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς συνήθως ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

1. Ξεκινάμε αναφέροντας ότι χρησιμοποιούμε **επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς**.
2. Διατυπώνουμε ρητά την αποδεικτέα[2] **λογική πρόταση** $P(n)$. Η διατύπωση της $P(n)$ εξαρτάται από έναν φυσικό αριθμό n. Το τελικό συμπέρασμα της επαγωγικής απόδειξης θα είναι ότι η λογική πρόταση $P(n)$ είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq n_0$ (όπου n_0 η τιμή βάσης της επαγωγής, δηλ. η ελάχιστη τιμή για την οποία αποδεικνύουμε ότι η $P(n)$ αληθεύει). Όταν η επαγωγική υπόθεση διατυπώνεται ρητά και η αποδεικτέα πρόταση $P(n)$ προκύπτει άμεσα από το ζητούμενο, το βήμα αυτό μπορεί να παραληφθεί, αφού η διατύπωση της $P(n)$ ουσιαστικά εμπεριέχεται στη διατύπωση της επαγωγικής υπόθεσης.
3. **Βάση της επαγωγής**: Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση $P(n_0)$ είναι αληθής (δηλ. ότι το ζητούμενο ισχύει για την τιμή n_0).

[1] Στην ορολογία της Πρότασης 1.1, η λογική πρόταση $P(n)$ δηλώνει ότι "το n-οστό ντόμινο πέφτει". Τα ντόμινο είναι τοποθετημένα έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$, η πτώση του n-οστού ντόμινο συνεπάγεται την πτώση του $(n+1)$-όστου ντόμινο (φορμαλιστικά, $P(n) \to P(n+1)$). Όταν λοιπόν "το πρώτο ντόμινο πέφτει" (δηλ. ισχύει ότι $P(1)$), τότε, ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, όλα τα ντόμινο πέφτουν, αφού $P(1) \to P(2), P(2) \to P(3), P(3) \to P(4), \ldots, P(n) \to P(n+1), \ldots$.

[2] Χάριν συντομίας και σαφήνειας στη διατύπωση, συχνά αναφερόμαστε στην πρόταση $P(n)$ με τον όρο *αποδεικτέα* λογική πρόταση $P(n)$. Αν και εύχρηστη, αυτή η διατύπωση είναι **καταχρηστική**, αφού αυτό που πρέπει να αποδειχθεί είναι ότι "η λογική πρόταση $P(n)$ αληθεύει για κάθε $n \geq n_0$", δηλ. η αποδεικτέα πρόταση στην πραγματικότητα είναι "$\forall n \geq n_0, P(n)$".

4. **Επαγωγική υπόθεση**: Υποθέτουμε ότι η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής για κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq n_0$ (δηλ. υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για κάποια τιμή n - αυτή η τιμή δεν πρέπει να είναι συγκεκριμένη ούτε ειδικά επιλεγμένη).
5. **Επαγωγικό βήμα**: Θεωρώντας ως δεδομένο το περιεχόμενο της επαγωγικής υπόθεσης, αποδεικνύουμε ότι η πρόταση $P(n+1)$ είναι αληθής (δηλ. ότι το ζητούμενη ισχύει και για τον επόμενο φυσικό αριθμό $n+1$). Η απόδειξη του επαγωγικού βήματος είναι το σημαντικότερο τμήμα μιας επαγωγικής απόδειξης. Κατά την απόδειξη του επαγωγικού βήματος πρέπει να σημειώνεται με σαφήνειατο σημείο (ή τα σημεία) όπου χρησιμοποιείται η επαγωγική υπόθεση.
6. **Συμπέρασμα**: Ολοκληρώνουμε την απόδειξη παρατηρώντας ότι το ζητούμενο αποτελεί άμεση συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής.

Παράδειγμα 1 (συνέχεια). Με βάση τα παραπάνω, η λύση του Παραδείγματος 1.1 μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς. Έστω $P(n)$ η λογική πρόταση

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Θα δείξουμε ότι αυτό αληθεύει για κάθε $n \geq 1$.
Βάση της επαγωγής: Παρατηρούμε ότι το $P(1)$ αληθεύει, αφού $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.
Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 1$, αληθεύει η πρόταση $P(n)$, δηλ. ισχύει ότι $1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι αληθεύει η πρόταση $P(n+1)$, δηλ. ότι $1+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \overbrace{1 + \ldots + n}^{=\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από την επαγωγική υπόθεση.

Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, έχουμε ότι για κάθε $n \geq 1$, $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. □

Άσκηση 1.1. Να συμπληρώσετε τα κενά στην επαγωγική απόδειξη:

Ζητούμενο: Να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$, το άθροισμα των n πρώτων περιττών αριθμών είναι ίσο με n^2, δηλ. ότι $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

Λύση: ... ...
Έστω $P(n)$ η λογική πρόταση

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Θα δείξουμε ότι αυτό αληθεύει για κάθε $n \geq 1$.

Βάση της επαγωγής: ... ...
Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι ... ... αληθεύει η πρόταση $P(n)$, δηλ. ισχύει ότι ... ...
Επαγωγικό βήμα: ... ... Πράγματι,

$$\overbrace{1 + \ldots + (2n-1)}^{\ldots\ \ldots} + (2n+1) = \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$= \ldots\ \ldots\ \ldots\ ,$$

όπου ... ...
... ... □

Άσκηση 1.2. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$, το άθροισμα των n πρώτων άρτιων αριθμών είναι ίσο με $n(n+1)$, δηλ. ότι $2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$.

Άσκηση 1.3. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 0$, $1+2+2^2+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$.

Άσκηση 1.4. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Άσκηση 1.5. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$,

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

1.2.1 Αλγεβρικές Ταυτότητες

Ίσως η πιο απλή εφαρμογή της αποδεικτικής τεχνικής της μαθηματικής επαγωγής αφορά στην επαλήθευση απλών αλγεβρικών ταυτοτήτων ή άλλων απλών ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών. Τέτοια παραδείγματα αποτελούν το Παράδειγμα 1.1, και οι Ασκήσεις 1.1, 1.2, και 1.3 παραπάνω, και τα Παραδείγματα 1.2, 1.3, και 1.4, και οι Ασκήσεις 1.8 και 1.9 παρακάτω.

Το κοινό χαρακτηριστικό αυτών των πρώτων (και σχετικά απλών) παραδειγμάτων είναι ο προφανής τρόπος με τον οποίο το ζητούμενο κατά την απόδειξη του επαγωγικού βήματος μετασχηματίζεται ώστε να χρησιμοποιηθεί η επαγωγική υπόθεση. Αυτό το χαρακτηριστικό προσδίδει απλότητα στα παραδείγματα που ακολουθούν. Στόχος αυτών των πρώτων παραδειγμάτων είναι ο αναγνώστης να κατανοήσει τα βασικά βήματα από τα οποία αποτελείται μία επαγωγική απόδειξη και να αποκτήσει ευχέρεια στη διατύπωση (σχετικά απλών) επαγωγικών αποδείξεων.

Παράδειγμα 1.2 (Άθροισμα Όρων Γεωμετρικής Προόδου). Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 0$, το άθροισμα των $n+1$ πρώτων όρων μια γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α και λόγο $r \neq 1$ δίνεται τον τύπο:

$$\alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \ldots + \alpha r^n = \frac{\alpha r^{n+1} - \alpha}{r-1} \tag{1.2}$$

Λύση: Η ισότητα (1.2) παίζει το ρόλο της πρότασης $P(n)$. Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς για να δείξουμε ότι η (1.2) αληθεύει για κάθε $n \geq 0$.
Βάση της επαγωγής: Παρατηρούμε ότι η (1.2) αληθεύει για $n = 0$, αφού $\alpha = \frac{\alpha r - \alpha}{r-1}$.
Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 0$, η ισότητα (1.2) αληθεύει. δηλ. ισχύει ότι $\alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \ldots + \alpha r^n = \frac{\alpha r^{n+1} - \alpha}{r-1}$.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι η ισότητα (1.2) αληθεύει και για τον επόμενο φυσικό $n+1$, δηλ. θα δείξουμε ότι $\alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \ldots + \alpha r^n + \alpha r^{n+1} = \frac{\alpha r^{n+2} - \alpha}{r-1}$. Παρατηρούμε ότι οι πρώτοι $n+1$ όροι $\alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \ldots + \alpha r^n$ στο παραπάνω άθροισμα εμφανίζονται στην επαγωγική υπόθεση και μπορούν άμεσα να αντικατασταθούν από το ίσον τους $\frac{\alpha r^{n+1} - \alpha}{r-1}$. Το ζητούμενο προκύπτει εύκολα μετά από αυτή την αντικατάσταση:

$$\begin{aligned}
\overbrace{\alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \ldots + \alpha r^n}^{=\frac{\alpha r^{n+1} - \alpha}{r-1}} + \alpha r^{n+1} &= \frac{\alpha r^{n+1} - \alpha}{r-1} + \alpha r^{n+1} \\
&= \frac{\alpha r^{n+1} - \alpha}{r-1} + \frac{\alpha r^{n+1}(r-1)}{r-1} \\
&= \frac{\alpha r^{n+2} - \alpha}{r-1},
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από την επαγωγική υπόθεση, η δεύτερη ισότητα πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας τον όρο αr^{n+1} με $r-1$, και η τρίτη ισότητα κάνοντας τις αλγεβρικές πράξεις. Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, η (1.2) ισχύει για κάθε $n \geq 0$.

Παρατήρηση. Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα της Άσκησης 1.3 προκύπτει ως ειδική περίπτωση της (1.2), αν θέσουμε όπου $\alpha = 1$ και $r = 2$. □

Άσκηση 1.6. Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, όπου a, b πραγματικοί αριθμοί. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, $A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 1.3 (Άνω και Κάτω Φράγμα για τους Αρμονικούς Αριθμούς). Για κάθε θετικό φυσικό αριθμό $k = 1, 2, 3, \ldots$, ο *αρμονικός αριθμός* k *τάξης* H_k ορίζεται ως το άθροισμα των αντίστροφων των φυσικών αριθμών από 1 μέχρι k:

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}$$

Για παράδειγμα, $H_1 = 1$, $H_2 = 3/2$, $H_3 = \frac{11}{6}$, $H_4 = \frac{25}{12}$, κοκ.

Σε αυτό το παράδειγμα, θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή για να δείξουμε ότι για κάθε φυσικό $n \geq 0$,

$$1 + \frac{n}{2} \leq H_{2^n} \leq 1 + n$$

Οι παραπάνω ανισότητες οδηγούν στο συμπέρασμα ότι για κάθε φυσικό k που είναι δύναμη του 2 (δηλαδή γράφεται ως $k = 2^n$, για κάποιο $n \geq 0$), ισχύει ότι $1 + 0.5 \log_2 k \leq H_k \leq 1 + \log_2 k$, το οποίο υποδεικνύει ότι οι αρμονικοί αριθμοί (ως συνάρτηση του k) είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το $\log_2 k$.

Πρώτα θα δείξουμε ότι για κάθε $n \geq 0$, $H_{2^n} \leq 1+n$ (αυτή η ανισότητα αντιστοιχεί στην αποδεικτέα πρόταση $P(n)$). Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς.
Βάση της επαγωγής: Παρατηρούμε ότι η ανισότητα ισχύει για $n = 0$, αφού $H_1 = 1 = 1 + 0$.
Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 0$, αληθεύει η ανισότητα $H_{2^n} \leq 1 + n$.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι η ανισότητα αληθεύει και για τον επόμενο φυσικό $n + 1$, δηλ. θα δείξουμε ότι $H_{2^{n+1}} \leq 1 + (n + 1)$. Παρόμοια με το Παράδειγμα 1.2, οι πρώτοι όροι $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ στο άθροισμα-ορισμό του $H_{2^{n+1}}$ δίνουν το H_{2^n}. Η επαγωγική υπόθεση μπορεί να χρησιμοποιηθεί άμεσα για την αντικατάσταση του H_{2^n} από το άνω φράγμα $1 + n$. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
H_{2^{n+1}} &= \overbrace{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}^{=H_{2^n}\leq 1+n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}} \\
&\leq 1+n+\overbrace{\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}}^{2^n \text{ όροι} < \frac{1}{2^n}} \\
&\leq 1+n+2^n\frac{1}{2^n} \\
&= 1+(n+1)
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από τον ορισμό των αρμονικών αριθμών, η πρώτη ανισότητα (στη δεύτερη γραμμή) από την επαγωγική υπόθεση, και η δεύτερη ανισότητα από το γεγονός ότι στην αγκύλη περιλαμβάνονται 2^n όροι και ο καθένας τους είναι μικρότερος από $\frac{1}{2^n}$. Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, έχουμε ότι για κάθε $n \geq 0$, $H_{2^n} \leq 1 + n$.

Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$. Η μοναδική διαφορά έγκειται στην απόδειξη του επαγωγικού βήματος, όπου χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι οι 2^n όροι από $\frac{1}{2^n+1}$ μέχρι $\frac{1}{2^{n+1}}$ είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του $\frac{1}{2^{n+1}}$. Έτσι προκύπτει ότι η διαφορά του $H_{2^{n+1}}$ από τον H_{2^n} είναι τουλάχιστον $\frac{1}{2}$. Η ολοκλήρωση της επαγωγικής απόδειξης αφήνεται ως άσκηση. □

Άσκηση 1.7. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι για κάθε φυσικό $n \geq 1$,

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_n = (n + 1)H_n - n\,,$$

όπου H_n είναι ο αρμονικός αριθμός τάξης n.

1.2.2 Εφαρμογές σε Συνδυαστική, Λογική, και Θεωρία Αριθμών

Όλα τα προηγούμενα παραδείγματα μαθηματικής επαγωγής στους φυσικούς αριθμούς αφορούσαν στην απόδειξη αλγεβρικών ταυτοτήτων. Χαρακτηριστικό τους ήταν ο προφανής τρόπος με τον οποίο η απόδειξη του επαγωγικού βήματος προέκυπτε από την επαγωγική υπόθεση.

Στη συνέχεια θα δούμε μερικά πιο ενδιαφέρονται παραδείγματα επαγωγής στους φυσικούς αριθμούς που αφορούν στην απόδειξη απλών ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών και ιδιοτήτων άλλων συνδυαστικών δομών, όπως συνόλων και τύπων της προτασιακής λογικής, και θα επισημάνουμε ένα σημείο που μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένες επαγωγικές αποδείξεις. Χαρακτηριστικό των παρακάτω παραδειγμάτων είναι ότι, αν και ο βαθμός δυσκολίας τους είναι μικρός, η απόδειξη του επαγωγικού βήματος δεν προκύπτει με προφανή τρόπο από την επαγωγική υπόθεση, αλλά χρειάζονται κάποια επιπλέον βήματα που εξαρτώνται από το πρόβλημα. Μέχρι αυτό σημείο, ο αναγνώστης πρέπει να έχει εξοικειωθεί πλήρως με τα βασικά βήματα μιας επαγωγικής απόδειξης και να μπορεί να διατυπώσει απλές επαγωγικές αποδείξεις στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Έτσι θα είναι σε θέση να κατανοήσει τα πιο σύνθετα παραδείγματα αυτής της ενότητας.

Παράδειγμα 1.4 (Διαιρετότητα). Σε αυτό το παράδειγμα θα δείξουμε ότι για κάθε φυσικό $n \geq 1$, ο αριθμός $n^3 + 2n$ διαιρείται ακριβώς από το 3. Η απόδειξη χρησιμοποιεί μαθηματική επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς.

Βάση της επαγωγής: Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = 1$, αφού ο αριθμός $1^3+2\cdot 1 = 3$ διαιρείται ακριβώς από το 3.

Επαγωγική υπόθεση[3]: Έστω ότι για κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 1$, ο αριθμός $n^3 + 2n$ διαιρείται ακριβώς από το 3.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο αληθεύει και για τον επόμενο φυσικό $n + 1$, δηλ. θα δείξουμε ότι ο αριθμός $(n + 1)^3 + 2(n + 1)$ διαιρείται ακριβώς από το 3. Για να χρησιμοποιήσουμε την επαγωγική υπόθεση, θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τον αριθμό $(n + 1)^3 + 2(n+1)$ ως άθροισμα του αριθμού $n^3 + 2n$ (για τον οποίο θεωρούμε ότι διαιρείται ακριβώς από τον 3 λόγω της επαγωγικής υπόθεσης) και κάποιας άλλης ποσότητας (η οποία πρέπει να διαιρείται από το 3). Για αυτό το σκοπό, αναλύουμε το $(n + 1)^3$ χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}(n + 1)^3 + 2(n + 1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 2(n + 1)\\ &= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)\,,\end{aligned}$$

το οποίο διαιρείται ακριβώς από το 3 αφού τόσο ο πρώτος όρος $n^3 + 2n$ διαιρείται ακριβώς από το 3, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, όσο και ο δεύτερος όρος $3(n^2 + n + 1)$ διαιρείται ακριβώς από το 3, ως ακέραιο πολλαπλάσιο του 3. Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, έχουμε ότι για κάθε $n \geq 1$, ο αριθμός $n^3 + 2n$ διαιρείται ακριβώς από το 3. □

Άσκηση 1.8. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$, ο αριθμός $n^3 - n$ διαιρείται ακριβώς από το 3.

[3] Βλέπουμε ότι μια επαγωγική απόδειξη μπορεί να μην ξεκινά με ρητή διατύπωση της αποδεικτέας λογικής πρότασης $P(n)$, όταν αυτή προκύπτει άμεσα από το ζητούμενο (όπως συμβαίνει σε αυτό το παράδειγμα). Σε αυτό το σημείο, ο αναγνώστης πρέπει να έχει εξοικειωθεί αρκετά με την εφαρμογή της τεχνικής της μαθηματικής επαγωγής και να κατανοεί ότι η αποδεικτέα πρόταση $P(n)$ δηλώνει ότι "ο αριθμός $n^3 + 2n$ διαιρείται ακριβώς από το 3".

Άσκηση 1.9. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$, ο αριθμός $n^5 - n$ διαιρείται ακριβώς από το 5.

Άσκηση 1.10. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$, ο αριθμός $2^{2n} - 1$ διαιρείται ακριβώς από το 3.

Άσκηση 1.11. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 2$, ο αριθμός $n^4 - 4n^2$ διαιρείται ακριβώς από το 3.

Παράδειγμα 1.5 (Αριθμός Υποσυνόλων με 2 Στοιχεία). Σε αυτό το παράδειγμα θα αποδείξουμε ότι κάθε μη κενό σύνολο με n στοιχεία έχει $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ διαφορετικά υποσύνολα με 2 στοιχεία.

Η απόδειξη χρησιμοποιεί μαθηματική επαγωγή στον πληθικό αριθμό του συνόλου (που είναι φυσικός αριθμός). Η αποδεικτέα λογική πρόταση $P(n)$ προκύπτει άμεσα από το ζητούμενο και δηλώνει ότι "κάθε σύνολο με n στοιχεία έχει $\frac{n(n-1)}{2}$ διαφορετικά υποσύνολα με 2 στοιχεία". Το ζητούμενο είναι να δείξουμε ότι η $P(n)$ αληθεύει για κάθε $n \geq 1$ (δεν θεωρούμε την περίπτωση του $n = 0$ διότι το ζητούμενο αναφέρεται σε μη κενά σύνολα).

Βάση της επαγωγής: Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = 1$, αφού κάθε σύνολο με ένα μόνο στοιχείο έχει $0 = \frac{1 \cdot 0}{2}$ υποσύνολα με 2 στοιχεία.

Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι το ζητούμενο αληθεύει για κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 1$, δηλ. ισχύει ότι κάθε σύνολο με n στοιχεία έχει $\frac{n(n-1)}{2}$ διαφορετικά υποσύνολα με 2 στοιχεία.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο αληθεύει και για τον επόμενο φυσικό $n + 1$, δηλ. θα δείξουμε ότι κάθε σύνολο με $n + 1$ στοιχεία έχει $\frac{(n+1)n}{2}$ διαφορετικά υποσύνολα με 2 στοιχεία.

Έστω S ένα αυθαίρετα επιλεγμένο σύνολο με $n + 1$ στοιχεία, και έστω $x \in S$ ένα οποιοδήποτε στοιχείο του S. Με σκοπό να αξιοποιήσουμε την επαγωγική υπόθεση (θυμηθείτε ότι πάντα η απόδειξη του επαγωγικού βήματος πρέπει να χρησιμοποιεί την επαγωγική υπόθεση), θεωρούμε το σύνολο $S_x = S \setminus \{x\}$, το οποίο έχει n στοιχεία (και συνεπώς έχει $\frac{n(n-1)}{2}$ υποσύνολα με 2 στοιχεία, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης). Σε αυτό το πρόβλημα όμως, η εφαρμογή της επαγωγικής υπόθεσης δεν μπορεί να γίνει άμεσα. Για να εκμεταλλευτούμε την επαγωγική υπόθεση, χρειαζόμαστε μια επιπλέον παρατήρηση που αφορά τη δομή των υποσυνόλων του S με 2 στοιχεία. Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι ένα υποσύνολο του S με 2 στοιχεία μπορεί (α) να μην περιέχει το στοιχείο x, και (β) να περιέχει το στοιχείο x.

Τα διαφορετικά υποσύνολα της περίπτωσης (α) ταυτίζονται με τα διαφορετικά υποσύνολα με 2 στοιχεία του συνόλου S_x. Από την επαγωγική υπόθεση, το S_x έχει $\frac{n(n-1)}{2}$ υποσύνολα με 2 στοιχεία. Άρα το S έχει $\frac{n(n-1)}{2}$ διαφορετικά υποσύνολα με 2 στοιχεία που δεν περιέχουν το στοιχείο x.

Τα διαφορετικά υποσύνολα της περίπτωσης (β) προκύπτουν συνδυάζοντας το x με καθένα από τα στοιχεία του S_x. Άρα το S έχει n διαφορετικά υποσύνολα με 2 στοιχεία που περιέχουν το στοιχείο x.

Επειδή οι περιπτώσεις (α) και (β) είναι αμοιβαία αποκλειόμενες, ο αριθμός των υποσυνόλων με 2 στοιχεία του S προκύπτει αθροίζοντας τον αριθμό των υποσυνόλων των περιπτώσεων (α) και (β) (εφαρμογή του κανόνα του αθροίσματος). Συνολικά το S έχει

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

διαφορετικά υποσύνολα με 2 στοιχεία. Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του επαγωγικού βήματος.

Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, έχουμε ότι κάθε μη κενό σύνολο με n στοιχεία έχει $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ διαφορετικά υποσύνολα με 2 στοιχεία. □

Άσκηση 1.12 (Αριθμός Υποσυνόλων). Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι κάθε μη κενό σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n διαφορετικά υποσύνολα.

Παράδειγμα 1.6 (Νόμοι de Morgan). Στην προτασιακή λογική, οι ταυτότητες $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$, και $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2$, είναι γνωστές ως νόμοι του de Morgan. Σε αυτό το παράδειγμα θα γενικεύσουμε τους νόμους του de Morgan για n προτασιακούς τύπους. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι για κάθε σύνολο $n \geq 1$ προτασιακών τύπων $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, ισχύει ότι $\neg(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) \equiv \neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n$ και ότι $\neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \equiv \neg\varphi_1 \vee \dots \vee \neg\varphi_n$.

Η απόδειξη χρησιμοποιεί επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς και αναφέρεται μόνο στην πρώτη ισοδυναμία (η απόδειξη της δεύτερης ισοδυναμίας είναι πανομοιότυπη και αφήνεται ως άσκηση).
Βάση της επαγωγής: Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = 1$, αφού αν έχουμε μόνο έναν προτασιακό τύπο φ_1, τότε τετριμμένα ισχύει ότι $\neg(\varphi_1) \equiv \neg\varphi_1$, και για $n = 2$, αφού σε αυτή την περίπτωση έχουμε τον αντίστοιχο νόμο του de Morgan.
Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι το ζητούμενο αληθεύει για κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 2$, δηλ. ισχύει ότι για κάθε σύνολο $n \geq 2$ προτασιακών τύπων $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, $\neg(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) \equiv \neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n$.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο ισχύει και για τον επόμενο φυσικό $n+1$, δηλ. θα δείξουμε ότι για κάθε σύνολο $n+1$ προτασιακών τύπων $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}$, $\neg(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n \vee \varphi_{n+1}) \equiv \neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n \wedge \neg\varphi_{n+1}$. Για να εκμεταλλευτούμε την επαγωγική υπόθεση, χρειάζεται πρώτα να εφαρμόσουμε την προσεταιριστική ιδιότητα του λογικού συνδέσμου $\vee$, και τον αντίστοιχο νόμο του de Morgan για δύο μόνο προτασιακούς τύπους. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
\neg(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n \vee \varphi_{n+1}) &\equiv \neg(\overbrace{(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n)}^{\equiv\varphi} \vee \varphi_{n+1}) \\
&\equiv \overbrace{\neg(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n)}^{\equiv\neg\varphi_1\wedge\dots\wedge\neg\varphi_n} \wedge \neg\varphi_{n+1} \\
&\equiv (\neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n) \wedge \neg\varphi_{n+1} \\
&\equiv \neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n \wedge \neg\varphi_{n+1}\,,
\end{aligned}$$

Η πρώτη ισοδυναμία προκύπτει από την προσεταιριστικότητα του λογικού συνδέσμου $\vee$. Η δεύτερη ισοδυναμία από τον αντίστοιχο νόμο de Morgan. Ειδικότερα, ο υποτύπος $\varphi \equiv (\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n)$

θεωρείται ενιαίος και εφαρμόζουμε την περίπτωση όπου έχουμε 2 προτασιακούς τύπους, τον φ και τον φ_{n+1}. Έτσι έχουμε ότι $\neg(\varphi \vee \varphi_{n+1}) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\varphi_{n+1}$. Σε αυτό το σημείο, έχουμε σχηματίσει την παράσταση $\neg(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n)$ (το ισοδύναμο του $\neg\varphi$) και μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση. Έτσι προκύπτει η τρίτη ισοδυναμία. Η τελευταία ισοδυναμία προκύπτει από την προσεταιριστικότητα του λογικού συνδέσμου $\wedge$.

Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, έχουμε ότι για κάθε σύνολο $n \geq 1$ προτασιακών τύπων $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, $\neg(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) \equiv \neg\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\varphi_n$. □

Παράδειγμα 1.7 (Αθροίσματα Πολλαπλασίων των 3 και 5). Σε αυτό το παράδειγμα, θα δείξουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 8$ μπορεί να σχηματιστεί από κουπόνια αξίας 3 και 5 μονάδων. Με άλλα λόγια, θα δείξουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 8$, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $\kappa_n, \lambda_n \geq 0$, τέτοιοι ώστε $n = 3\kappa_n + 5\lambda_n$. Η απόδειξη χρησιμοποιεί επαγωγή στην τιμή του n.

Βάση της επαγωγής: Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = 8$, αφού $8 = 5 + 3$ (άρα $\kappa_8 = \lambda_8 = 1$).

Επαγωγική υπόθεση [4]: Έστω ότι το ζητούμενο αληθεύει για κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 8$, δηλ. ισχύει ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $\kappa_n, \lambda_n \geq 0$ τέτοιοι ώστε $n = 3\kappa_n + 5\lambda_n$.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο ισχύει και για τον επόμενο φυσικό $n+1$, δηλ. θα δείξουμε ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $\kappa_{n+1}, \lambda_{n+1} \geq 0$ τέτοιοι ώστε $n + 1 = 3\kappa_{n+1} + 5\lambda_{n+1}$. Μάλιστα θα προσδιορίσουμε τις τιμές των κ_{n+1} και λ_{n+1} συναρτήσει των κ_n λ_n, δείχνοντας πως η έκφραση για τον αριθμό $n+1$ προκύπτει από την αντίστοιχη έκφραση για τον αριθμό n (η οποία θεωρείται δεδομένη λόγω της επαγωγικής υπόθεσης).

Από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε ως δεδομένο ότι ο αριθμός n εκφράζεται ως $n = 3\kappa_n + 5\lambda_n$ για κάποιους φυσικούς $\kappa_n, \lambda_n \geq 0$. Για να εκμεταλλευτούμε την επαγωγική υπόθεση, δοκιμάζουμε να αντικαταστήσουμε κάποια κουπόνια των 3 και των 5 μονάδων ώστε να προκύψει αύξησης της αξίας κατά 1 μονάδα. Παρατηρούμε ότι αύξηση της αξίας κατά 1 μονάδα προκύπτει αν αντικαταστήσουμε είτε ένα κουπόνι των 5 μονάδων με δύο κουπόνια των 3 μονάδων $(2 \cdot 3 - 5 = 1)$ είτε τρία κουπόνια των 3 μονάδων με δύο κουπόνια των 5 μονάδων $(2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 1)$. Έτσι διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με τον αριθμό των κουπονιών των 5 μονάδων που χρησιμοποιούμε για να εκφράσουμε τον αριθμό n (δηλ. ανάλογα με την τιμή του λ_n).

Αν για τον αριθμό n χρησιμοποιούμε τουλάχιστον ένα κουπόνι των 5 μονάδων (δηλ. αν $\lambda_n \geq 1$), τότε θέτουμε $\kappa_{n+1} = \kappa_n + 2$ και $\lambda_{n+1} = \lambda_n - 1 \geq 0$ (δηλ. αντικαθιστούμε ένα κουπόνι

[4]Για αυτό το παράδειγμα, η αποδεικτέα λογική πρόταση $P(n)$ δηλώνει ότι "υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $\kappa_n, \lambda_n \geq 0$ τέτοιοι ώστε $n = 3\kappa_n + 5\lambda_n$". Η χρήση του n ως δείκτη των συντελεστών κ_n και λ_n υπογραμμίζει την εξάρτηση τους από το n (δηλ. δηλώνει ότι τα κ_n, λ_n μπορεί να διαφέρουν ανάλογα με την τιμή του n).

των 5 μονάδων με δύο κουπόνια των 3 μονάδων), και έχουμε

$$\begin{aligned} 3\kappa_{n+1} + 5\lambda_{n+1} &= 3(\kappa_n + 2) + 5(\lambda_n - 1) \\ &= (\overbrace{3\kappa_n + 5\lambda_n}^{=n}) + (\overbrace{2 \cdot 3 - 5}^{=1}) \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

Αν για τον αριθμό n δεν χρησιμοποιούμε κανένα κουπόνι των 5 μονάδων (δηλ. αν $\lambda_n = 0$), τότε επειδή $n \geq 8$, πρέπει να χρησιμοποιούμε τουλάχιστον τρία κουπόνια των 3 μονάδων. Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε $\kappa_{n+1} = \kappa_n - 3 \geq 0$ και $\lambda_{n+1} = \lambda_n + 2$ (δηλ. αντικαθιστούμε τρία κουπόνια των 3 μονάδων με δύο κουπόνια των 5 μονάδων), και έχουμε

$$\begin{aligned} 3\kappa_{n+1} + 5\lambda_{n+1} &= 3(\kappa_n - 3) + 5(\lambda_n + 2) \\ &= (\overbrace{3\kappa_n + 5\lambda_n}^{=n}) + (\overbrace{2 \cdot 5 - 3 \cdot 3}^{=1}) \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη του επαγωγικού βήματος παρατηρώντας ότι, και στις δύο περιπτώσεις παραπάνω, η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την επαγωγική υπόθεση.

Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, έχουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 8$ μπορεί να σχηματιστεί από κουπόνια αξίας 3 και 5 μονάδων. □

Άσκηση 1.13 (Αθροίσματα Πολλαπλασίων των 4 και 5). Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 12$ μπορεί να σχηματιστεί από κουπόνια αξίας 4 και 5 μονάδων. Είναι δυνατόν η υπόθεση $n \geq 12$ να αντικατασταθεί από την (ισχυρότερη) υπόθεση ότι $n \geq 8$;

Παράδειγμα 1.8 (Λάθος Χρώμα!). Στην προσπάθειά του να μας πείσει να αγοράσουμε ένα αυτοκίνητο σε χρώμα που δεν μας ικανοποιεί, ο πωλητής ισχυρίζεται ότι όλα τα αυτοκίνητα που κυκλοφορούν έχουν το ίδιο χρώμα. Παρουσιάζει μάλιστα τον παρακάτω συλλογισμό, ο οποίος χρησιμοποιεί επαγωγή[5] στον αριθμό των αυτοκινήτων n.

Βάση της επαγωγής: Το ζητούμενο ισχύει για $n = 1$, αφού αν θεωρήσουμε ένα μόνο αυτοκίνητο, αυτό έχει το ίδιο χρώμα με τον εαυτό του.

Επαγωγική υπόθεση Έστω ότι το ζητούμενο αληθεύει για κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 1$, δηλ. ισχύει ότι σε κάθε σύνολο n αυτοκινήτων, όλα έχουν το ίδιο χρώμα.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο ισχύει και για τον επόμενο φυσικό $n + 1$, δηλ. θα δείξουμε ότι σε κάθε σύνολο $n + 1$ αυτοκινήτων, όλα έχουν το ίδιο χρώμα. Θεωρούμε ένα αυθαίρετα επιλεγμένο σύνολο με $n + 1$ αυτοκίνητα:

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$$

[5] Σε πιο αυστηρή γλώσσα, ο πωλητής επιχειρεί να αποδείξει ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, αληθεύει ότι "σε κάθε σύνολο n αυτοκινήτων, όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα". Η αποδεικτέα λογική πρόταση $P(n)$ είναι η πρόταση στα εισαγωγικά.

Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, τα n πρώτα αυτοκίνητα στο σύνολο A έχουν το ίδιο χρώμα:

$$A = \{\overbrace{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,}^{\text{ίδιο χρώμα}} \alpha_{n+1}\}$$

Επίσης, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, τα n τελευταία αυτοκίνητα στο σύνολο A έχουν το ίδιο χρώμα:

$$A = \{\alpha_1, \overbrace{\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}}^{\text{ίδιο χρώμα}}\}$$

Αφού τα σύνολα των n πρώτων αυτοκινήτων του A και των n τελευταίων αυτοκινήτων του A έχουν κοινά στοιχεία, όλα τα αυτοκίνητα στο σύνολο A έχουν το ίδιο χρώμα. Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, όλα τα αυτοκίνητα που κυκλοφορούν (ή πρόκειται να κυκλοφορήσουν) έχουν το ίδιο χρώμα.

Προφανώς ο ισχυρισμός του πωλητή δεν είναι αληθής, αφού το παλιό σας αυτοκίνητο έχει διαφορετικό χρώμα από αυτό που ο πωλητής προτείνει να αγοράσετε. Το ζητούμενο είναι να εντοπίσουμε το σημείο όπου ο παραπάνω επαγωγικός συλλογισμός είναι λανθασμένος.

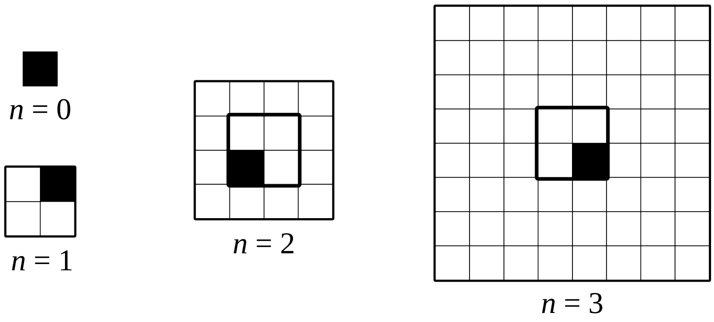
Μια προσεκτική ανάγνωση δείχνει ότι δεν υπάρχει σφάλμα ούτε στην απόδειξη της βάσης της επαγωγής (όπου το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα), ούτε στη διατύπωση της επαγωγικής υπόθεσης. Εστιάζουμε λοιπόν στην απόδειξη του επαγωγικού βήματος, η οποία είναι και το πλέον σημαντικό βήμα κάθε επαγωγικής απόδειξης.

Παρατηρούμε ότι η απόδειξη του επαγωγικού βήματος (και συγκεκριμένα το τελικό συμπέρασμα) απαιτεί την ύπαρξη τουλάχιστον ενός κοινού στοιχείου μεταξύ των υποσυνόλων $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ και $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$ του συνόλου A. Αυτό προφανώς ισχύει για κάθε $n \geq 2$, αλλά **δεν ισχύει** όταν $n = 1$. Τότε, μολονότι όλα τα αυτοκίνητα στο σύνολο $\{\alpha_1\}$ έχουν το ίδιο χρώμα, και όλα τα αυτοκίνητα στο σύνολο $\{\alpha_2\}$ έχουν το ίδιο χρώμα, μπορεί να υπάρχουν αυτοκίνητα διαφορετικού χρώματος στο σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ (π.χ. μπορεί το α_1 να είναι πράσινο και το α_2 κόκκινο).

Αυτό ακριβώς το σημείο καθιστά την επαγωγική απόδειξη λανθασμένη και το συμπέρασμά της αβάσιμο, και καταδεικνύει πόσο προσεκτικοί οφείλουμε να είμαστε κατά τη διατύπωση μιας επαγωγικής απόδειξης. Εδώ, αν και (α) αληθεύει το $P(1)$, και (β) ισχύει ότι το $P(n)$ συνεπάγεται το $P(n+1)$ για κάθε $n \geq 2$, η επαγωγική απόδειξη δεν είναι σωστή (οδηγεί άλλωστε σε προφανώς λανθασμένο συμπέρασμα) γιατί *το* $P(1)$ *δεν συνεπάγεται το* $P(2)$. Έτσι υπάρχει ενδεχόμενο να μην αληθεύει το $P(2)$, το οποίο δημιουργεί ενδεχόμενο να μην αληθεύει το $P(3)$, το οποίο δημιουργεί ενδεχόμενο να μην αληθεύει το $P(4)$, κοκ. $\square$

1.3 Ο Ρόλος της Επαγωγικής Υπόθεσης

Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα και ασκήσεις, η αποδεικτέα λογική πρόταση $P(n)$ προκύπτει άμεσα από το ζητούμενο. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που για να αποδείξουμε το ζητούμενο με



Σχήμα 1.1. Σκακιέρες με ένα μαύρο τετράγωνο στο κέντρο τάξης 0, 1, 2, και 3. Για τις σκακιέρες τάξης 2 και 3, σημειώνονται τα κεντρικά τετράγωνα με έντονο περίγραμμα (για τις σκακιέρες τάξης 0 και 1, όλα τα τετράγωνα θεωρούνται κεντρικά).

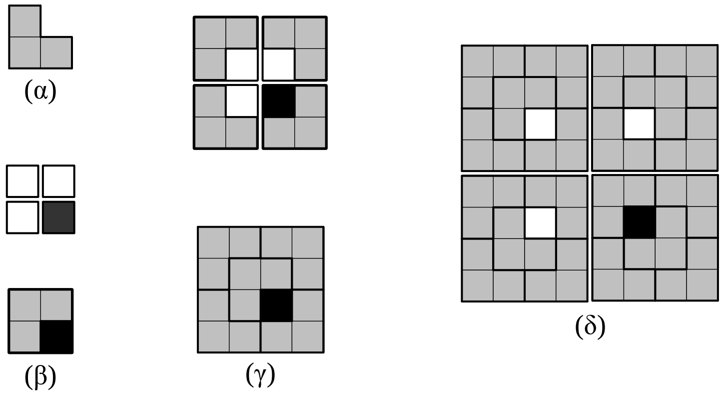
μαθηματική επαγωγή, χρειάζεται να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε επαγωγικά *κάτι ισχυρότερο*!

Αν και σε ένα γενικό πλαίσιο αυτό μπορεί να ακούγεται περίεργο (γιατί να αποδείξουμε κάτι ισχυρότερο από αυτό που χρειάζεται;), είναι απολύτως φυσικό στο πλαίσιο των επαγωγικών αποδείξεων. Αρκεί να αναλογιστούμε ότι η ουσία μιας επαγωγικής απόδειξης συνίσταται στην απόδειξη του επαγωγικού βήματος, δηλ. στο να δείξουμε ότι το $P(n+1)$ έπεται λογικά από την επαγωγική υπόθεση $P(n)$. Σε αυτό δε, σημαντικό ρόλο παίζει η ίδια η επαγωγική υπόθεση και ο χειρισμός της. Έτσι μπορεί να συμβαίνει το $P(n+1)$ να είναι δύσκολο (ή αδύνατο) να αποδειχθεί από την υπόθεση $P(n)$, αν αυτή δεν είναι αρκετά ισχυρή. Σε τέτοιες περιπτώσεις, διατυπώνουμε ως αποδεικτέα μια λογική πρόταση $P'(n)$ ισχυρότερη από το $P(n)$ (δηλ. το $P'(n)$ επιλέγεται ώστε να συνεπάγεται, συνήθως με προφανή τρόπο, το $P(n)$). Έτσι ενισχύεται η επαγωγική υπόθεση! Έχοντας υποθέσει κάτι ισχυρότερο (άρα πιο χρήσιμο και πιο εύκολο στο χειρισμό), μπορούμε πια να αποδείξουμε το $P'(n+1)$ (προσέξετε ότι **απαιτείται** να αποδείξουμε το ισχυρότερο $P'(n+1)$ και όχι το ασθενέστερο $P(n+1)$). Φυσικά καθοριστικό ρόλο στην επιτυχία αυτής της προσπάθειας παίζει η επιλογή της αποδεικτέας πρότασης $P'(n)$.

Παράδειγμα 1.9. Ας εξειδικεύσουμε τα παραπάνω με ένα ενδιαφέρον παράδειγμα. Θεωρούμε μια τετράγωνη σκακιέρα διάστασης $2^n \times 2^n$, $n \geq 0$, της οποίας ένα από τα τέσσερα κεντρικά τετράγωνα είναι μαύρο και τα υπόλοιπα τετράγωνα είναι λευκά. Παραδείγματα τέτοιας σκακιέρας εικονίζονται στο Σχήμα 1.1. Στο εξής θα αναφερόμαστε σε μια τέτοια σκακιέρα με τον όρο *σκακιέρα τάξης n με ένα μαύρο τετράγωνο στο κέντρο*.

Θέλουμε να δείξουμε, χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, ότι όλα τα λευκά τετράγωνα μιας τέτοιας σκακιέρας μπορούν να καλυφθούν από μη επικαλυπτόμενα πλακίδια σχήματος L (βλ. Σχήμα 1.2.α). Διατυπώνουμε τη λογική πρόταση $P(n)$ που δηλώνει ότι "όλα τα λευκά τετράγωνα μιας σκακιέρας τάξης n με ένα μαύρο τετράγωνο στο κέντρο μπορούν να καλυφθούν από μη επικαλυπτόμενα πλακίδια σχήματος L".

Η βάση της επαγωγής, δηλ. το $P(0)$, ισχύει τετριμμένα, αφού η σκακιέρα τάξης 0 δεν έχει

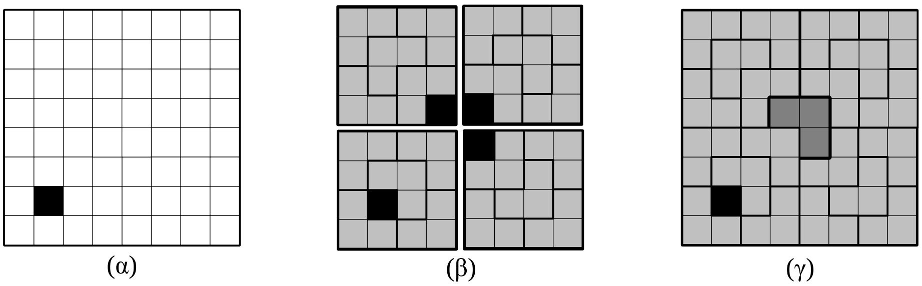


Σχήμα 1.2. (α). Το πλακίδιο σχήματος L που χρησιμοποιούμε για να καλύψουμε τα λευκά τετράγωνα της σκακιέρας. (β). $P(0) \to P(1)$: ενώνουμε 4 σκακιέρες τάξης 0 με ένα μαύρο τετράγωνο στο κέντρο, αλλάζουμε σε λευκό το χρώμα τριών από τα τέσσερα μαύρα τετράγωνα, και καλύπτουμε τα τρία νέα λευκά τετράγωνα με ένα πλακίδιο σχήματος L. (γ). $P(1) \to P(2)$: ενώνουμε 4 σκακιέρες τάξης 1 με μαύρο τετράγωνο στο κέντρο (των οποίων τα λευκά τετράγωνα είναι ήδη καλυμένα από πλακίδια σχήματος L, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης), και αλλάζουμε σε λευκό το χρώμα τριών μαύρων τετραγώνων. Έχουμε φροντίσει ώστε τα τέσσερα μαύρα τετράγωνα να καταλαμβάνουν τα κεντρικά τετράγωνα της σκακιέρας τάξης 2. Τέλος καλύπτουμε τα νέα λευκά τετράγωνα με ένα πλακίδιο σχήματος L. (δ). $P(2) \not\to P(3)$: Αν ενώσουμε 4 σκακιέρες τάξης 2 με ένα μαύρο τετράγωνο στο κέντρο, τα τρία νέα λευκά τετράγωνα δεν είναι γειτονικά και το μαύρο τετράγωνο δεν βρίσκεται στο κέντρο.

κανένα λευκό τετράγωνο (βλ. Σχήμα 1.1).

Για την απόδειξη του επαγωγικού βήματος, παρατηρούμε ότι μια σκακιέρα τάξης $n+1$ με ένα μαύρο τετράγωνο στο κέντρο προκύπτει αν ενώσουμε 4 σκακιέρες τάξης n με ένα μαύρο τετράγωνο στο κέντρο, αλλάξουμε σε λευκό το χρώμα τριών από τα τέσσερα μαύρα τετράγωνα που αυτές έχουν, και μετακινήσουμε (αν χρειάζεται) το τέταρτο μαύρο τετράγωνο στο κέντρο της σκακιέρας τάξης $n+1$. Με αυτό το σκεπτικό, βλέπουμε ότι το $P(0)$ συνεπάγεται το $P(1)$, αφού μπορούμε να ενώσουμε 4 σκακιέρες τάξης 0 σχηματίζοντας μια σκακιέρα τάξης 1, και να καλύψουμε τα τρία νέα λευκά τετράγωνα με ένα πλακίδιο σχήματος L (βλ. Σχήμα 1.2.β). Ομοίως, το $P(1)$ συνεπάγεται το $P(2)$. Συγκεκριμένα, μπορούμε να ενώσουμε 4 σκακιέρες τάξης 1 με ένα μαύρο τετράγωνο στο κέντρο ώστε τα τέσσερα μαύρα τετράγωνα να καταλαμβάνουν τα κεντρικά τετράγωνα της σκακιέρας τάξης 2 που προκύπτει. Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, τα λευκά τετράγωνα των σκακιέρων τάξης 1 καλύπτονται από μη επικαλυπτόμενα πλακίδια σχήματος L. Επειδή τα τρία νέα λευκά τετράγωνα καταλαμβάνουν γειτονικές θέσεις σε σχήμα L, και αυτά μπορούν να καλυφθούν από ένα νέο πλακίδιο χωρίς επικαλύψεις (βλ. Σχήμα 1.2.γ).

Αυτό το σκεπτικό δεν αρκεί για να δείξουμε ότι το $P(2)$ συνεπάγεται το $P(3)$. Ο λόγος είναι ότι όταν ενώσουμε 4 σκακιέρες τάξης 2 με ένα μαύρο τετράγωνο στο κέντρο, (i) τα τρία νέα λευκά τετράγωνα δεν είναι γειτονικά, και έτσι δεν μπορούν να καλυφθούν από ένα πλακίδιο, και (ii) το τετράγωνο που μένει μαύρο πρέπει να μετανικηθεί στο κέντρο της σκακιέρας τάξης 3, προκαλώντας αλλαγές στην διάταξη των πλακιδίων (τουλάχιστον) μιας σκακιέρας τάξης 2 (βλ. Σχήμα 1.2.δ).



Σχήμα 1.3. (α). Σκακιέρα τάξης 3 με ένα μαύρο τετράγωνο. (β). Η ανάλυσή της σε 4 σκακιέρες τάξης 3 με ένα μαύρο τετράγωνο. Οι θέσεις των μαύρων τετραγώνων στις σκακιέρες τάξης 3 επιλέγονται ώστε (i) το μαύρο τετράγωνο της αρχικής σκακιέρας να διατηρεί τη θέση του, και (ii) τα υπόλοιπα τρία μαύρα τετράγωνα να καταλαμβάνουν κεντρικά τετράγωνα της αρχικής σκακιέρας. Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, τα λευκά τετράγωνα των σκακιέρων τάξης 2 καλύπτονται από μη επικαλύπτομενα πλακίδια σχήματος L. (γ). Ένωση των 4 σκακιέρων τάξης 2 και κάλυψη των τριών νέων λευκών τετραγώνων με πλακίδιο σχήματος L (το νέο πλακίδιο σημειώνεται εντονότερα στο σχήμα).

Προφανώς, το σκεπτικό που αναπτύξαμε δεν αρκεί για την απόδειξη του επαγωγικού βήματος για $n \geq 2$. Παρατηρούμε όμως ότι αν η επαγωγική υπόθεση επιτρέπει να τοποθετήσουμε το μαύρο τετράγωνο οπουδήποτε στη σκακιέρα, τότε μπορούμε (για όλες τις τιμές του n) να ενώσουμε 4 σκακιέρες τάξης n ώστε τα τρία νέα λευκά τετράγωνα να καταλαμβάνουν κεντρικά (και γειτονικά) τετράγωνα της σκακιέρας τάξης $n+1$ που προκύπτει. Καλύπτοντας τα νέα λευκά τετράγωνα με ένα πλακίδιο σχήματος L, και επιλέγοντας κατάλληλα τη θέση του μαύρου τετραγώνου που απομένει, δημιουργούμε μια σκακιέρα τάξης $n+1$ που έχει το μαύρο της τετράγωνο σε οποιοδήποτε σημείο.

Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί να θεωρήσουμε την πιο γενική περίπτωση σκακιέρας διάστασης $2^n \times 2^n$, $n \geq 0$, η οποία έχει ένα (οποιοδήποτε) τετράγωνο μαύρο και τα υπόλοιπα τετράγωνα λευκά (βλ. Σχήμα 1.3.α). Αναφερόμαστε σε μια τέτοια σκακιέρα με τον όρο *σκακιέρα τάξης n με ένα μαύρο τετράγωνο* (όχι κατ' ανάγκη στο κέντρο).

Διατυπώνουμε την (ισχυρότερη) λογική πρόταση $P'(n)$ που δηλώνει ότι "όλα τα λευκά τετράγωνα μιας σκακιέρας τάξης n με ένα μαύρο τετράγωνο μπορούν να καλυφθούν από μη επικαλυπτόμενα πλακίδια σχήματος L". Είναι φανερό ότι η αρχική πρόταση $P(n)$ (που είναι το ζητούμενο) προκύπτει ως ειδική περίπτωση της πρότασης $P'(n)$. Δοκιμάζουμε λοιπόν να αποδείξουμε κάτι ισχυρότερο από το ζητούμενο. Θα αποδείξουμε την πρόταση $P'(n)$ με επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς.

Βάση της επαγωγής: Το $P'(0)$ αληθεύει τετριμμένα, αφού η σκακιέρα τάξης 0 δεν έχει λευκά τετράγωνα.

Επαγωγική υπόθεση: Θεωρούμε έναν αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 0$, και υποθέτουμε επαγωγικά ότι ισχύει το $P'(n)$, δηλ. ισχύει ότι όλα τα λευκά τετράγωνα μιας σκακιέρας τάξης n με ένα μαύρο τετράγωνο μπορούν να καλυφθούν από μη επικαλυπτόμενα πλακίδια σχήματος L.

Επαγωγικό βήμα: Θα αποδείξουμε ότι το ίδιο ισχύει για κάθε σκακιέρα τάξης $n+1$ με ένα μαύρο τετράγωνο[6]. Για να χρησιμοποιήσουμε την επαγωγική υπόθεση, πρέπει να δείξουμε πως μια σκακιέρα τάξης $n+1$ με ένα μαύρο τετράγωνο σχηματίζεται από την ένωση 4 σκακιέρων τάξης n με ένα μαύρο τετράγωνο ώστε (i) τα τρία νέα λευκά τετράγωνα να καταλαμβάνουν κεντρικά (και άρα γειτονικά) τετράγωνα της σκακιέρας τάξης $n+1$ που προκύπτει (συνεπώς, τα νέα λευκά τετράγωνα μπορούν να καλυφθούν από ένα πλακίδιο σχήματος L), και (ii) το μαύρο τετράγωνο να βρίσκεται στην επιθυμητή θέση (άρα να μην χρειάζεται να μετακινηθεί).

Θεωρούμε μια οποιαδήποτε σκακιέρα τάξης $n+1$ με ένα μαύρο τετράγωνο και τη διαιρούμε σε 4 τεταρτημόρια ίδιας διάστασης. Κάθε τεταρτημόριο είναι μια σκακιέρα τάξης n. Το ένα μάλιστα (αυτό που περιέχει το μαύρο τετράγωνο) είναι μια σκακιέρα τάξης n με ένα μαύρο τετράγωνο (άρα σε αυτή εφαρμόζεται η επαγωγική υπόθεση). Σε καθένα από τα υπόλοιπα τρία τεταρτημόρια, αλλάζουμε το χρώμα (από λευκό σε μαύρο) στο (μοναδικό) τετράγωνο της που καταλαμβάνει κεντρική θέση στην αρχική σκακιέρα τάξης $n+1$ (βλ. Σχήμα 1.3.β). Έτσι σχηματίζονται τρεις ακόμη σκακιέρες τάξης n με ένα μαύρο τετράγωνο (στις οποίες επίσης εφαρμόζεται η επαγωγική υπόθεση).

Με την αντίστροφη διαδικασία, κάθε σκακιέρα τάξης $n+1$ με ένα μαύρο τετράγωνο προκύπτει από την ένωση 4 (κατάλληλα επιλεγμένων) σκακιέρων τάξης n με ένα μαύρο τετράγωνο. Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, τα λευκά τετράγωνα αυτών των σκακιέρων τάξης n μπορούν να καλυφθούν από μη επικαλυπτόμενα πλακίδια σχήματος L. Απομένουν τα τρία νέα λευκά τετράγωνα που δημιουργούνται από την αλλαγή χρώματος στα τρία από τα τέσσερα μαύρα τετράγωνα. Είδαμε ότι η κατάλληλη επιλογή των 4 σκακιέρων τάξης n εξασφαλίζει ότι (i) τα τρία νέα λευκά τετράγωνα καταλαμβάνουν κεντρικά τετράγωνα της σκακιέρας τάξης $n+1$, και μπορούν να καλυφθούν από ένα πλακίδιο σχήματος L, και (ii) το μαύρο τετράγωνο να βρίσκεται στην επιθυμητή θέση, και δεν χρειάζεται μετακίνηση. Έτσι προκύπτει ότι όλα τα λευκά τετράγωνα της σκακιέρας τάξης $n+1$ μπορούν να καλυφθούν από μη επικαλυπτόμενα πλακίδια σχήματος L (βλ. Σχήμα 1.3.γ). Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του επαγωγικού βήματος.

Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, όλα τα λευκά τετράγωνα μιας σκακιέρας με ένα μαύρο τετράγωνο μπορούν να καλυφθούν από μη επικαλυπτόμενα πλακίδια σχήματος L. Αυτό βέβαια ισχύει και στην ειδική περίπτωση που το μαύρο τετράγωνο βρίσκεται στο κέντρο. □

Παράδειγμα 1.10. Το ζητούμενο είναι να δείξουμε ότι για κάθε $n \geq 1$,

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^n} \leq 2$$

Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή. Η αποδεικτέα πρόταση $P(n)$ δηλώνει ότι “$S_n \leq 2$”. Παρατηρούμε ότι $S_1 = \frac{1}{2} \leq 2$, άρα αληθεύει το $P(1)$. Υποθέτοντας επαγωγικά ότι $S_n \leq 2$, έχουμε:

$$S_{n+1} = \overbrace{\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^n}}^{=S_n \leq 2} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \leq 2 + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

[6]Στο επαγωγικό βήμα πρέπει να αποδείξουμε το $P'(n+1)$, και όχι το ασθενέστερο $P(n+1)$.

Άρα η επαγωγική υπόθεση $S_n \leq 2$ δεν συνεπάγεται την ανισότητα $S_{n+1} \leq 2$, που πρέπει να αποδείξουμε στο επαγωγικό βήμα.

Για να ξεπεράσουμε το πρόβλημα, δοκιμάζουμε να αποδείξουμε κάτι ισχυρότερο. Συγκεκριμένα θα δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε την ακριβή τιμή του αθροίσματος S_n (και όχι απλά ένα άνω φράγμα, που είναι το ζητούμενο). Υπολογίζοντας το S_n για μικρές τιμές του n (π.χ. $1 \leq n \leq 10$), παρατηρούμε ότι το S_n παραμένει μικρότερο του 2 και προσεγγίζει (γρήγορα) το 2 όσο οι τιμές του n μεγαλώνουν. Έτσι συμπεραίνουμε ότι η ακριβής τιμή του S_n έχει τη μορφή $2 - A_n$, όπου A_n μια θετική ποσότητα που τείνει (γρήγορα) στο 0 όσο αυξάνεται το n. Παρατηρώντας τη διαφορά $2 - S_n$ για μικρές τιμές του n και πειραματιζόμενοι[7], καταλήγουμε ότι $A_n = \frac{n+2}{2^n}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή στο n για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας σε σχέση με την ακριβή τιμή του S_n. Η αποδεικτέα πρόταση $P'(n)$ δηλώνει ότι "$S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$" και συνεπάγεται την αρχική πρόταση $P(n)$.

Βάση της επαγωγής: Παρατηρούμε ότι ισχύει το $P'(1)$, αφού $S_1 = \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2}$.

Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 1$, ισχύει ότι $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι $S_{n+1} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$. Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}},
\end{aligned}
$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από τον ορισμό του S_n και η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την επαγωγική υπόθεση.

Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, έχουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n} \leq 2$. □

1.4 Ισχυρή Μαθηματική Επαγωγή

Μια γενικότερη μορφή μαθηματικής επαγωγής προκύπτει αν δεχθούμε ότι η αποδεικτέα λογική πρόταση αληθεύει για κάθε φυσικό αριθμό $k \in \{n_0, \ldots, n\}$, και αποδείξουμε ότι το $P(n+1)$ έπεται λογικά από αυτή την ισχυρότερη επαγωγική υπόθεση. Αυτή η μορφή επαγωγής ονομάζεται *ισχυρή μαθηματική επαγωγή*.

[7] Εναλλακτικά, μπορούμε να ορίσουμε αναδρομικά την ποσότητα A_n (ή ισοδύναμα την ποσότητα S_n) και να λύσουμε την αναδρομική εξίσωση. Παρατηρούμε ότι διαφορά των A_n και A_{n+1} είναι ίση με $\frac{n+1}{2^{n+1}}$. Επομένως η ποσότητα A_n δίνεται από τον γενικό όρο της ακολουθίας που ορίζεται από την αναδρομική εξίσωση $A_{n+1} = A_n - \frac{n+1}{2^{n+1}}$ με αρχική τιμή $A_1 = \frac{3}{2}$. Ισοδύναμα, η ποσότητα S_n δίνεται από τον γενικό όρο της ακολουθίας που ορίζεται από την αναδρομική εξίσωση $S_{n+1} = S_n + \frac{n+1}{2^{n+1}}$ με αρχική τιμή $S_1 = \frac{1}{2}$.

Πρόταση 1.2 (Αρχή της Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής). *Έστω $P(n)$ μια λογική πρόταση που εξαρτάται από έναν φυσικό αριθμό n. Αν*

(α) η πρόταση $P(n_0)$ είναι αληθής για κάποιον φυσικό αριθμό n_0, και

(β) για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq n_0$, αν το $P(k)$ αληθεύει για κάθε $k \in \{n_0, \dots, n\}$, τότε αληθεύει και το $P(n+1)$,

τότε η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq n_0$.

Το νέο στοιχείο στην αρχή της ισχυρής επαγωγής είναι ότι για την απόδειξη του επαγωγικού βήματος, θεωρούμε μια ισχυρότερη επαγωγική υπόθεση (συγκρίνετε το σημείο (β) της Πρότασης 1.2 με το σημείο (β) της Πρότασης 1.1). Δηλαδή με την αρχή της ισχυρής επαγωγής, κατά την απόδειξη του επαγωγικού βήματος, μπορούμε να υποθέσουμε περισσότερα για να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα[8]. Η ισχυρή μαθηματική επαγωγή χρησιμοποιείται συχνά γιατί η ισχυρότερη επαγωγική υπόθεση διευκολύνει και απλοποιεί τη διατύπωση των επαγωγικών αποδείξεων.

Παράδειγμα 1.11. Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα ισχυρής μαθηματικής επαγωγής. Το ζητούμενο είναι να δείξουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 2$ που δεν είναι πρώτος[9] αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Θα χρησιμοποιήσουμε ισχυρή μαθηματική επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς. Η αποδεικτέα λογική πρόταση $P(n)$ δηλώνει ότι "το n είτε είναι πρώτος είτε αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων" (παρατηρείστε ότι αυτή η δήλωση είναι ταυτολογικά ισοδύναμη με τη δήλωση "αν το n δεν είναι πρώτος, τότε αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων").

Βάση της επαγωγής: Το $P(2)$ αληθεύει γιατί το 2 είναι πρώτος αριθμός.

Επαγωγική υπόθεση: Θεωρούμε κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 2$, και υποθέτουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός k, $2 \leq k \leq n$, είτε είναι πρώτος είτε αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι και το $n+1$ είτε είναι πρώτος είτε γράφεται ως γινόμενο πρώτων. Αν το $n+1$ είναι πρώτος, τότε το $P(n+1)$ αληθεύει. Αν το $n+1$ δεν είναι πρώτος, εξ΄ ορισμού αναλύεται σε γινόμενο δύο παραγόντων m, ℓ που είναι διαφορετικοί από το $n+1$ και τη μονάδα (αλλά δεν είναι αναγκαστικά πρώτοι). Δηλαδή, αν το $n+1$ δεν είναι πρώτος, υπάρχουν φυσικοί m, ℓ, $2 \leq m, \ell \leq n$, τέτοιοι ώστε $n+1 = m \cdot \ell$.

Μπορούμε λοιπόν να επικαλεστούμε την επαγωγική υπόθεση, που ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό k, $2 \leq k \leq n$. Εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση, έχουμε ότι τα m, ℓ είτε είναι πρώτοι αριθμοί είτε αναλύονται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έτσι το $n+1$ αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, το οποίο προκύπτει από το γινόμενο της αντίστοιχης ανάλυσης των m, k.

[8] Αυτό είναι εντελώς διαφορετικό από την ισχυροποίηση της επαγωγικής υπόθεσης που συζητήσαμε στην Ενότητα 1.3 (βλ. Παραδείγματα 1.9 και 1.10). Εκεί η ισχυρότερη επαγωγική υπόθεση οδηγούσε σε αντίστοιχα ισχυρότερο συμπέρασμα που έπρεπε να αποδειχθεί στο επαγωγικό βήμα.

[9] Υπενθυμίζεται ότι ένας φυσικός αριθμός ονομάζεται *πρώτος* όταν διαιρείται ακριβώς μόνο από τον ευατό του και τη μονάδα.

Σύμφωνα με την αρχή της ισχυρής μαθηματικής επαγωγής, κάθε φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 2 που δεν είναι πρώτος αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. □

Το παρακάτω παράδειγμα είναι αντίστοιχο του Παραδείγματος 1.7 και της Άσκησης 1.13. Στόχος είναι να δείξουμε πως η χρήση ισχυρής επαγωγής μπορεί να απλοποιήσει τη διατύπωση κάποιων επαγωγικών αποδείξεων, αλλά και ότι χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στο τι ακριβώς πρέπει να αποδειχθεί ως βάση της επαγωγής όταν χρησιμοποιούμε ισχυρή μαθηματική επαγωγή.

Παράδειγμα 1.12 (Αθροίσματα Πολλαπλασίων των 4 και 7). Το ζητούμενο είναι να δείξουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 18$ μπορεί να σχηματιστεί από κουπόνια αξίας 4 και 7 μονάδων. Δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 18$, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $\kappa_n, \lambda_n \geq 0$, τέτοιοι ώστε $n = 4\kappa_n + 7\lambda_n$. Θα χρησιμοποιήσουμε ισχυρή επαγωγή στο n.

Ας ξεκινήσουμε με ένα σχεδιάγραμμα της επαγωγικής απόδειξης. Για τη βάση της επαγωγής, επιβεβαιώνουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για μικρές τιμές του n (για εξάσκηση, δοκιμάστε να επιβεβαιώσετε το ζητούμενο για $n = 18, \ldots, 30$). Για την επαγωγική υπόθεση, θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό $n \geq 18$, και υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε φυσικό k, $18 \leq k \leq n$. Για τον επόμενο φυσικό $n+1$, θεωρούμε τον αριθμό $n-3$. Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, ο $n-3$ σχηματίζεται από κουπόνια αξίας 4 και 7 μονάδων. Για να σχηματίσουμε τον $n+1$, προσθέτουμε σε αυτά ένα κουπόνι των 4 μονάδων.

Το σημείο που χρειάζεται προσοχή είναι ότι για να εφαρμοστεί η επαγωγική υπόθεση, πρέπει το $n-3$ να τουλάχιστον 18, δηλαδή να έχουμε $n \geq 21$. Συνεπώς ο παραπάνω συλλογισμός εφαρμόζεται[10] για να δείξουμε ότι ένας αριθμός $n+1 \geq 22$ μπορεί να σχηματιστεί από κουπόνια 4 και 7 μονάδων, θεωρώντας ως δεδομένο ότι όλοι οι φυσικοί k, $18 \leq k \leq n$, μπορούν να σχηματιστούν από κουπόνια 4 και 7 μονάδων[11]. Όμως αυτός ο συλλογισμός δεν καλύπτει τους φυσικούς 18, 19, 20, και 21. Για να έχουμε μια πλήρη επαγωγική απόδειξη, πρέπει στη βάσης της επαγωγής, να αποδείξουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = 18$, 19, 20, και 21.

Συνοψίζουμε τα παραπάνω σε μια τυπικά διατυπωμένη επαγωγική απόδειξη.

Βάση της επαγωγής: Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = 18$, 19, 20, και 21. Ειδικότερα, $18 = 4 + 7 \cdot 2$ (άρα $\kappa_{18} = 1$ και $\lambda_{18} = 2$), $19 = 4 \cdot 3 + 7$ (άρα $\kappa_{19} = 3$ και $\lambda_{19} = 1$), $20 = 4 \cdot 5$ (άρα $\kappa_{20} = 5$ και $\lambda_{20} = 0$), και $21 = 7 \cdot 3$ (άρα $\kappa_{21} = 0$ και $\lambda_{21} = 3$).

Επαγωγική υπόθεση: Έστω αυθαίρετα επιλεγμένος φυσικός αριθμός $n \geq 21$. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε φυσικό k, $18 \leq k \leq n$, δηλ. ότι για κάθε $k \in \{18, \ldots, n\}$, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $\kappa_k, \lambda_k \geq 0$ τέτοιοι ώστε $k = 4\kappa_k + 7\lambda_k$.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο ισχύει και για τον επόμενο φυσικό $n+1$, δηλ. υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $\kappa_{n+1}, \lambda_{n+1} \geq 0$ τέτοιοι ώστε $n+1 = 4\kappa_{n+1} + 7\lambda_{n+1}$. Επειδή $n-3 \geq 18$, η επαγωγική υπόθεση εφαρμόζεται σε αυτόν. Άρα υπάρχουν φυσικοί $\kappa_{n-3}, \lambda_{n-3} \geq 0$

[10] Για δούμε ότι ο παραπάνω συλλογισμός δεν εφαρμόζεται για $n \leq 20$, παρατηρούμε ότι για $n = 20$, έχουμε $n - 3 = 17$, το οποίο δεν μπορεί να σχηματιστεί από κουπόνια 4 και 7 μονάδων.

[11] Στην πραγματικότητα δεν χρειαζόμαστε μια τόσο ισχυρή επαγωγική υπόθεση. Ο επαγωγικός συλλογισμός απαιτεί μόνο ότι το $n-3$ σχηματίζεται από κουπόνια 4 και 7 μονάδων.

τέτοιοι ώστε $n-3 = 4\kappa_{n-3}+7\lambda_{n-3}$. Οι αντίστοιχοι αριθμοί για τον $n+1$ προκύπτουν αν θέσουμε $\kappa_{n+1} = \kappa_{n-3}+1$ και $\lambda_{n+1} = \lambda_{n-3}$ (δηλ. προσθέσουμε ένα κουπόνι των 4 μονάδων στα κουπόνια από τα οποία σχηματίζεται ο $n-3$). Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} 4\kappa_{n+1} + 7\lambda_{n+1} &= 4(\kappa_{n-3}+1) + 7\lambda_{n-3} \\ &= (\overbrace{4\kappa_{n-3} + 7\lambda_{n-3}}^{=n-3}) + 4 \\ &= n+1\,, \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από τον ορισμό των $\kappa_{n+1}, \lambda_{n+1}$ με βάση τα $\kappa_{n-3}, \lambda_{n-3}$, και η τελευταία ισότητα από την επαγωγική υπόθεση. Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του επαγωγικού βήματος.

Ως συνέπεια της αρχής της ισχυρής μαθηματικής επαγωγής, έχουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 18$ μπορεί να σχηματιστεί από κουπόνια αξίας 4 και 7 μονάδων. □

Η σύγκριση της παραπάνω επαγωγικής απόδειξης με τις αποδείξεις του Παραδείγματος 1.7 και της Άσκησης 1.13 είναι πολύ διαφωτιστική ως προς τα πλεονεκτήματα της ισχυρής μαθηματικής επαγωγής, αλλά και ως προς τα σημεία όπου χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή. Σε ένα τέτοιο σημείο εστιάζει η παρακάτω άσκηση αυτοξιολόγησης.

Άσκηση 1.14 (Κανένας Περιττός!). Να εντοπίσετε το λάθος στον παρακάτω συλλογισμό ο οποίος χρησιμοποιεί ισχυρή μαθηματική επαγωγή και καταλήγει στο (**λανθασμένο**) συμπέρασμα ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί είναι άρτιοι.

Βάση της επαγωγής: Ισχύει ότι ο 0 είναι άρτιος.

Επαγωγική υπόθεση: Θεωρούμε κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 0$, και υποθέτουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός k, $0 \leq k \leq n$, είναι άρτιος.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι και ο $n+1$ είναι άρτιος. Παρατηρούμε ότι το $n+1$ γράφεται ως άθροισμα των αριθμών n και 1, οι οποίοι είναι άρτιοι, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης. Έτσι ο $n+1$ είναι άρτιος ως άθροισμα δύο άρτιων.

2 Αναδρομικοί Ορισμοί και Μαθηματική Επαγωγή

Πολλά μαθηματικά αντικείμενα (π.χ. συναρτήσεις, σύνολα, κλάσεις γραφημάτων) μπορούν να οριστούν αναδρομικά. Ένας *αναδρομικός* (ή *επαγωγικός*) ορισμός ενός συνόλου (αντίστ. μιας συνάρτησης) αποτελείται από:

- Την **βάση**, όπου καθορίζεται μια αρχική συλλογή από στοιχεία του συνόλου (αντιστ. καθορίζονται οι αρχικές τιμές της συνάρτησης).
- Το **βήμα**, όπου καθορίζονται κανόνες με τους οποίους νέα στοιχεία του συνόλου προκύπτουν από στοιχεία που ανήκουν ήδη στο σύνολο (αντιστ. διατυπώνεται αναδρομική εξίσωση που εκφράζει τις επόμενες τιμές της συνάρτησης ως συνάρτηση των προηγούμενων).

Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, η βάση του αναδρομικού ορισμού καθορίζει τα "απλούστερα" στοιχεία του συνόλου (δηλ. αυτά που η περιγραφή τους έχει ελάχιστη πολυπλοκότητα). Πιο "σύνθετα" στοιχεία (δηλ. στοιχεία που η περιγραφή τους έχει αυξημένη πολυπλοκότητα) προκύπτουν με την εφαρμογή των κανόνων που καθορίζονται στο βήμα του αναδρομικού ορισμού.

Ένα τυπικό παράδειγμα αναδρομικού ορισμού είναι ο ορισμός των προτασιακών τύπων στη Μαθηματική Λογική. Στον ορισμό των προτασιακών τύπων, η βάση του ορισμού καθορίζει ότι κάθε προτασιακή μεταβλητή είναι προτασιακός τύπος (η απλούστερη μορφή του), και το βήμα του ορισμού καθορίζει ότι αν β, γ είναι ήδη κατασκευασμένοι προτασιακοί τύποι, τότε τα $(\neg\beta)$, $(\beta \vee \gamma)$, $(\beta \wedge \gamma)$, $(\beta \rightarrow \gamma)$, και $(\beta \leftrightarrow \gamma)$ είναι προτασιακοί τύποι.

Ακολουθούν μερικά ακόμη απλά παραδείγματα αναδρομικών ορισμών.

Παράδειγμα 2.1 (Φυσικοί Αριθμοί). Το σύνολο των θετικών φυσικών αριθμών $\mathbb{N}^*$ μπορεί να οριστεί αναδρομικά ως εξής:

Βάση: Το 1 ανήκει στο σύνολο $\mathbb{N}^*$.

Βήμα: Αν τα x, y ανήκουν στο $\mathbb{N}^*$, το $x + y$ ανήκει στο $\mathbb{N}^*$.

Το βήμα στον παραπάνω ορισμό μπορεί να αντικατασταθεί από το "αν το x ανήκει στο $\mathbb{N}^*$, το $x + 1$ ανήκει στο $\mathbb{N}^*$". □

Παράδειγμα 2.2 (Άρτιοι και Περιττοί Αριθμοί). Το σύνολο των άρτιων φυσικών αριθμών μπορεί να οριστεί αναδρομικά ως εξής:

Βάση: Τα 0, 2 είναι άρτιοι.

Βήμα: Αν τα x, y είναι άρτιοι, το $x + y$ είναι άρτιος.

Το βήμα στον παραπάνω ορισμό μπορεί να αντικατασταθεί από το "αν το x είναι άρτιος, το $x+2$ είναι άρτιος".

Το σύνολο των περιττών φυσικών αριθμών μπορεί να οριστεί αναδρομικά ως εξής:

Βάση: Το 1 είναι περιττός.

Βήμα: Αν τα x, y είναι περιττοί, το $x + y + 1$ είναι περιττός.

Το βήμα στον παραπάνω ορισμό μπορεί να αντικατασταθεί από το "αν το x είναι περιττός, το $x + 1 + 1$ είναι περιττός". □

Παράδειγμα 2.3 (Ακολουθία Fibonacci). Η ακολουθία (ή αριθμοί) Fibonacci F_n, $n \in \mathbb{N}^*$, ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

Βάση: $F_1 = F_2 = 1$ (αρχικές τιμές).

Βήμα: Για κάθε $n \geq 3$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (αναδρομική εξίσωση). □

Παράδειγμα 2.4 (Διωνυμικοί Συντελεστές). Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$ και κάθε φυσικό αριθμό k, $0 \leq k \leq n$, οι διωνυμικοί συντελεστές $C(n, k)$ (που δίνουν τον αριθμό των συνδυασμών k αντικειμένων από n) μπορούν να οριστούν αναδρομικά ως εξής:

Βάση: Για κάθε $n \geq 1$, $C(n, k) = 1$ αν $k = 0$ ή $k = n$ (αρχικές τιμές).

Βήμα: Για κάθε $n \geq 2$ και κάθε k, $0 < k < n$, $C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1, k)$ (αναδρομική εξίσωση).

Στην ενότητα της συνδυαστυικής, θα διατυπώσουμε μια απόδειξη (με συνδυαστικά επιχειρήματα) της παραπάνω αναδρομικής σχέσης. Τα στοιχεία του "τρίγωνου του Pascal", που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των διωνυμικών συντελεστών, υπολογίζονται από την παραπάνω αναδρομική σχέση. □

Παράδειγμα 2.5 (Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης). Ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης $\gcd(a, b)$ δύο φυσικών αριθμών a, b, με $a \geq b$, ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

Βάση: Αν $b = 0$, τότε $\gcd(a, b) = a$.

Βήμα: Αν $b > 0$, τότε $\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$.

Στον αναδρομικό ορισμό του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη βασίζεται ο αλγόριθμος του Ευκλείδη. Γενικότερα, ο αναδρομικός ορισμός μιας συνάρτησης οδηγεί (με προφανή τρόπο) σε έναν αναδρομικό αλγόριθμο υπολογισμού της. Σε κάποιες περιπτώσεις (βλ. αλγόριθμο του Ευκλείδη), αυτοί οι αναδρομικοί αλγόριθμοι είναι υπολογιστικά αποδοτικοί. Σε άλλες περιπτώσεις (βλ. αναδρομικό ορισμό των διωνυμικών συντελεστών στο Παράδειγμα 2.4), καταφεύγουμε στην τεχνική του δυναμικού προγραμματισμού για τον αποδοτικό υπολογισμό της συνάρτησης με βάση την αναδρομική σχέση. □

Παράδειγμα 2.6 (Δέντρα). Ένα (απλό, μη κατευθυνόμενο) γράφημα είναι δέντρο όταν είναι συνδεόμενο και δεν περιέχει κύκλους. Τα δέντρα είναι φύσει αναδρομικές δομές και μπορούν να οριστούν ως εξής:

Βάση: Μια απομονωμένη κορυφή είναι δέντρο (το μοναδικό δέντρο με μια κορυφή).

Βήμα: Αν T_1 και T_2 είναι δέντρα (με n_1 και n_2 κορυφές αντίστοιχα), το γράφημα που προκύπτει θεωρώντας τα T_1 και T_2, και συνδέοντας με ακμή μια οποιαδήποτε κορυφή του T_1 με μια οποιαδήποτε κορυφή του T_2 είναι δέντρο (με $n_1 + n_2$ κορυφές).

Το βήμα στον παραπάνω ορισμό μπορεί να αντικατασταθεί από το "αν T είναι δέντρο (με n κορυφές) και v μια απομονωμένη κορυφή, το γράφημα που προκύπτει συνδέοντας με ακμή τη v με μια οποιαδήποτε κορυφή του T είναι δέντρο (με $n + 1$ κορυφές)". □

Παράδειγμα 2.7 (Ύψος Δέντρου). Το ύψος $h(T)$ ενός δέντρου T με ρίζα μπορεί να οριστεί αναδρομικά ως εξής:

Βάση: Αν το T έχει μία μόνο κορυφή, τη ρίζα, τότε $h(T) = 0$.

Βήμα: Διαφορετικά, έστω $T_1, \ldots, T_k$ τα υποδέντρα του T που οι ρίζες τους είναι παιδιά της ρίζας του T. Τότε $h(T) = 1 + \max\{h(T_1), \ldots, h(T_k)\}$. □

Άσκηση 2.1. Να δώσετε έναν αναδρομικό ορισμό για τα παρακάτω:

- Το σύνολο των θετικών φυσικών αριθμών που είναι πολλαπλάσια του 3.
- Το σύνολο των φυσικών αριθμών που είναι δυνάμεις του 2.
- Την ακολουθία με τύπο $\alpha_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ (δηλ. την ακολουθία των δυνάμεων του 2).
- Την κλάση των δυαδικών δέντρων που είναι πλήρη (δηλ. κάθε εσωτερικός τους κόμβος έχει δύο παιδιά και όλα τους τα φύλλα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο).

2.1 Δομική Επαγωγή

Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής εφαρμόζεται για την απόδειξη ιδιοτήτων κάθε μαθηματικού αντικειμένου (π.χ. συνόλου, συνάρτησης, κλάσης γραφημάτων) που μπορεί να οριστεί αναδρομικά. Σε τέτοιες περιπτώσεις, γράφουμε ότι χρησιμοποιούμε επαγωγή στη δομή, ή στην πολυπλοκότητα, ή σε κάποια παράμετρο που χαρακτηρίζει την πολυπλοκότητα του αντικειμένου (π.χ. ύψος ενός δέντρου, αριθμός κορυφών ή ακμών ενός γραφήματος), αντί για επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς.

Η εφαρμογή μαθηματικής επαγωγής για την απόδειξη μιας ιδιότητας ενός αντικειμένου που ορίζεται αναδρομικά είναι απολύτως αντίστοιχη με την εφαρμογή επαγωγής στους φυσικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, έστω ένα σύνολο S που ορίζεται αναδρομικά, και έστω ότι θέλουμε να δείξουμε (με μαθηματική επαγωγή στη δομή του S) ότι όλα τα στοιχεία του S έχουν μια ιδιότητα P. Όπως και στην επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

Βάση Επαγωγής: Αποδεικνύουμε ότι όλα τα στοιχεία που αναφέρονται στη βάση του αναδρομικού ορισμού του S έχουν την ιδιότητα P.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι κάποια ήδη σχηματισμένα στοιχεία του S έχουν την ιδιότητα P.

Επαγωγικό Βήμα: Αποδεικνύουμε ότι κάθε νέο στοιχείο του S που προκύπτει από ήδη σχηματισμένα στοιχεία σύμφωνα με τους κανόνες στο βήμα του αναδρομικού ορισμού έχει την ιδιότητα P.

Δηλαδή αποδεικνύουμε ότι τα αρχικά στοιχεία του S (όπως αυτά καθορίζονται στη βάση του αναδρομικού ορισμού) έχουν την ιδιότητα P, και ότι η εφαρμογή των κανόνων στο βήμα του αναδρομικού ορισμού σε στοιχεία που έχουν την ιδιότητα P δίνει στοιχεία που επίσης έχουν την ιδιότητα P (με άλλα λόγια, ότι η ιδιότητα P ισχύει αρχικά και "διατηρείται" από τους κανόνες στο βήμα του αναδρομικού ορισμού). Επομένως όλα τα στοιχεία του S έχουν την ιδιότητα P.

Στο παραπάνω γενικό πλαίσιο εφαρμογής της μαθηματικής επαγωγής, παρατηρούμε ότι τα βήματα της επαγωγικής απόδειξης υπαγορεύονται από τον αναδρομικό ορισμό του συνόλου S (ακόμη και σε περιπτώσεις που αυτός δεν αναφέρεται ρητά, αλλά υπονοείται). Υπό αυτό το πρίσμα, είναι ενδιαφέρον να συσχετίσουμε τον αναδρομικό ορισμό των φυσικών αριθμών στο Παράδειγμα 2.1 με τις αρχές της μαθηματικής επαγωγής (Πρόταση 1.1) και της ισχυρής μαθηματικής επαγωγής (Πρόταση 1.2). Να σημειώσουμε ακόμη ότι όταν υπάρχει προφανής αντιστοιχία μεταξύ των φυσικών αριθμών και των στοιχείων ενός συνόλου (ή των όρων μιας ακολουθίας) που ορίζεται αναδρομικά (π.χ. όροι της ακολουθίας Fibonacci στο Παράδειγμα 2.3), η εφαρμογή επαγωγής στη δομή του συνόλου (ή της ακολουθίας) δεν έχει καμία ουσιαστική διαφορά από την εφαρμογή επαγωγής στους φυσικούς αριθμούς.

Παράδειγμα 2.8. Το σύνολο N_4 των θετικών φυσικών αριθμών που είναι πολλαπλάσια του 4 ορίζεται ως $\mathrm{N}_4 = \{x \in \mathbb{N}^* : x = 4n \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N}^*\}$. Θεωρούμε επίσης το υποσύνολο των φυσικών αριθμών S που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

Βάση: Το 4 ανήκει στο S.

Βήμα: Αν τα x, y ανήκουν στο S, το $x + y$ ανήκει στο S.

Αν και διαισθητικά είναι προφανές ότι τα σύνολα N_4 και S ταυτίζονται, θα το αποδείξουμε φορμαλιστικά χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή. Για να αποδείξουμε ότι τα δύο σύνολα ταυτίζονται, πρέπει να δείξουμε ότι $S \subseteq \mathrm{N}_4$ (δηλ. ότι κάθε φυσικός που προκύπτει από τον αναδρομικό ορισμό του S γράφεται ως $4n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$, και άρα είναι πολλαπλάσιο του 4), και ότι $\mathrm{N}_4 \subseteq S$ (δηλ. ότι κάθε φυσικός της μορφής $4n$ προκύπτει από τον παραπάνω αναδρομικό ορισμό, και άρα είναι στοιχείο του S).

Για να δείξουμε ότι $S \subseteq \mathrm{N}_4$, χρησιμοποιούμε επαγωγή στην δομή του S (δηλαδή ακολουθούμε τα βήματα που υπαγορεύονται από τον αναδρομικό ορισμό του S).

Βάση της επαγωγής: Το ζητούμενο ισχύει για τον αριθμό 4 (το μοναδικό στοιχείο του S που αναφέρεται στη βάση του αναδρομικού ορισμού), αφού το 4 είναι πολλαπλάσιο του εαυτού του, και άρα $4 \in \mathrm{N}_4$.

Επαγωγική υπόθεση: Θεωρούμε δύο αυθαίρετα επιλεγμένα στοιχεία $x, y \in S$, και υποθέτουμε επαγωγικά ότι αυτά είναι πολλαπλάσια του 4, δηλ. ότι $x, y \in \mathrm{N}_4$.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το $x + y$ είναι πολλαπλάσιο του 4 (σύμφωνα με το βήμα του αναδρομικού ορισμού, η πρόσθεση στοιχείων του S είναι ο μόνος τρόπος να προκύψουν νέα στοιχεία του S). Από την επαγωγική υπόθεση, τα x, y είναι πολλαπλάσια του 4. Άρα υπάρχουν $n_x, n_y \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε $x = 4n_x$ και $y = 4n_y$. Συνεπώς $x + y = 4n_x + 4n_y = 4(n_x + n_y)$, οπότε και το $x + y$ είναι πολλαπλάσιο του 4. Άρα $x + y \in \mathrm{N}_4$.

Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, $S \subseteq \mathrm{N}_4$.

Για να δείξουμε ότι $\mathrm{N}_4 \subseteq S$, χρησιμοποιούμε επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς (η οποία ακολουθεί τη δομή των στοιχείων του N_4, αφού αυτά βρίσκονται σε προφανή αντιστοιχία με τους φυσικούς αριθμούς).
Βάση της επαγωγής: Το ζητούμενο ισχύει για $n = 1$, αφού το 4 (που είναι το πρώτο / ελάχιστο στοιχείο του N_4) ανήκει στο σύνολο S.
Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 1$, το $4n$ (το n-οστό στοιχείο του N_4) ανήκει στο σύνολο S.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι και το $4(n+1)$ (το $(n+1)$-οστό στοιχείο του N_4) ανήκει στο S. Παρατηρούμε ότι το $4(n+1)$ είναι άθροισμα των $4n$, το οποίο ανήκει στο S λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, και 4, που επίσης ανήκει στο S. Σύμφωνα λοιπόν με το βήμα του αναδρομικού ορισμού του S, το $4n + 4 = 4(n + 1)$ ανήκει στο S.

Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, $\mathrm{N}_4 \subseteq S$.

Από τα $S \subseteq \mathrm{N}_4$ και $\mathrm{N}_4 \subseteq S$, προκύπτει ότι $S = \mathrm{N}_4$ (δηλ. ότι το S είναι το σύνολο των θετικών φυσικών αριθμών που είναι πολλαπλάσια του 4). Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε φορμαλιστικά ότι οι αναδρομικοί ορισμοί των Παραδειγμάτων 2.1, 2.2, 2.6, 2.7, και της Άσκησης 2.1 ανταποκρίνονται στο στόχο τους. □

Άσκηση 2.2 (Αριθμοί Fibonacci και Χρυσή Τομή). Οι *αριθμοί Fibonacci* F_n, $n \in \mathbb{N}^*$, ορίζονται αναδρομικά στο Παράδειγμα 2.3. Η *χρυσή τομή* είναι ο αριθμός $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ που αποτελεί την μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 = x + 1$. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε[1] ότι για κάθε $n \geq 1$, $\frac{3}{5}\phi^{n-1} \leq F_n \leq \phi^{n-1}$.

2.2 Εφαρμογές στη Μαθηματική Λογική

Παράδειγμα 2.9. Έστω $T_\wedge$ το υποσύνολο των προτασιακών τύπων που είτε είναι προτασιακές μεταβλητές είτε περιέχουν μόνο τον λογικό σύνδεσμο $\wedge$. Το σύνολο $T_\wedge$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

Βάση: Κάθε προτασιακή μεταβλητή ανήκει στο $T_\wedge$.

[1]Για μεγαλύτερες τιμές του n, το $\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\,\phi^{n-1} \approx 0.7236\,\phi^{n-1}$ αποτελεί μια πολύ ικανοποιητική προσέγγιση του n-οστού αριθμού Fibonacci. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε $n \geq 5$, $0.99\,\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\,\phi^{n-1} \leq F_n \leq 1.01\,\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\,\phi^{n-1}$.

Βήμα: Αν φ, ψ είναι προτασιακοί τύποι του $T_\wedge$, ο προτασιακός τύπος $(\varphi \wedge \psi)$ ανήκει στο $T_\wedge$.

Το ζητούμενο είναι να δείξουμε ότι οι προτασιακοί τύποι του $T_\wedge$ δεν είναι ταυτολογίες. Για την απόδειξη, θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα των τύπων του $T_\wedge$.

Βάση της επαγωγής: Στη βάση της επαγωγής πρέπει να δείξουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για όλους τους προτασιακούς τύπους που αναφέρονται στη βάση του επαγωγικού ορισμού του $T_\wedge$ (εν προκειμένω, για κάθε προτασιακή μεταβλητή). Πράγματι, μια προτασιακή μεταβλητή δεν είναι ταυτολογία, αφού μπορεί να αποτιμηθεί ως ψευδής.

Επαγωγική υπόθεση: Έστω φ, ψ αυθαίρετα επιλεγμένοι προτασιακοί τύποι στο σύνολο $T_\wedge$. Επαγωγικά υποθέτουμε ότι οι τύποι φ, ψ δεν είναι ταυτολογίες.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι ο προτασιακός τύπος $(\varphi \wedge \psi)$ δεν είναι ταυτολογία (σύμφωνα με τον αναδρομικό ορισμό, ο μόνος τρόπος σχηματισμού τύπου του $T_\wedge$ από ήδη κατασκευασμένους τύπους του $T_\wedge$ είναι να "συνδέσουμε" αυτούς τους τύπους με τον λογικό σύνδεσμο $\wedge$). Πράγματι, αφού ο προτασιακός τύπος φ δεν είναι ταυτολογία (λόγω της επαγωγικής υπόθεσης), υπάρχει αποτίμηση που τον καθιστά ψευδή. Με βάση τον πίνακα αλήθειας του λογικού συνδέσμου $\wedge$, αυτή η αποτίμηση καθιστά ψευδή και τον προτασιακό τύπο $(\varphi \wedge \psi)$. Άρα ο τελευταίος δεν είναι ταυτολογία.

Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, οι τύποι που είτε είναι προτασιακές μεταβλητές είτε περιέχουν μόνο τον λογικό σύνδεσμο $\wedge$ δεν είναι ταυτολογίες. □

Παράδειγμα 2.10. Για κάθε προτασιακό τύπο χ, ο αριθμός των αριστερών παρενθέσεων $\text{απ}(\chi)$ και το ύψος του δενδροδιαγράμματος $\text{υδ}(\chi)$ του χ ορίζονται αναδρομικά (με βάση τον αναδρομικό ορισμό των προτασιακών τύπων) ως εξής:

Βάση: Αν ο χ είναι προτασιακή μεταβλητή, τότε $\text{απ}(\chi) = 0$ και $\text{υδ}(\chi) = 0$.

Βήμα: Αν ο χ είναι της μορφής $(\neg\varphi)$, όπου φ κάποιος ήδη σχηματισμένος προτασιακός τύπος, τότε $\text{απ}(\chi) = 1 + \text{απ}(\varphi)$ και $\text{υδ}(\chi) = 1 + \text{υδ}(\varphi)$.

Αν ο χ είναι της μορφής $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, ή $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, όπου φ, ψ κάποιοι ήδη σχηματισμένοι προτασιακοί τύποι, τότε $\text{απ}(\chi) = 1 + \text{απ}(\varphi) + \text{απ}(\psi)$ και $\text{υδ}(\chi) = 1 + \max\{\text{υδ}(\varphi), \text{υδ}(\psi)\}$.

Το ζητούμενο είναι να δείξουμε ότι για κάθε προτασιακό τύπο χ, $\text{υδ}(\chi) \leq \text{απ}(\chi)$ (δηλ. το ύψος του δενδροδιαγράμματος του χ είναι μικρότερο ή ίσο του αριθμού των αριστερών παρενθέσεων του χ). Για την απόδειξη, θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή στην πολυπλοκότητα των προτασιακών τύπων. Έτσι τα βήματα της επαγωγικής απόδειξης υπαγορεύονται από τη δομή του αναδρομικού ορισμού των προτασιακών τύπων.

Βάση της επαγωγής: Αν θεωρήσουμε έναν προτασιακό τύπο χ που είναι προτασιακή μεταβλητή, το ζητούμενο ισχύει, αφού $\text{υδ}(\chi) = \text{απ}(\chi) = 0$.

Επαγωγική υπόθεση: Έστω φ, ψ αυθαίρετα επιλεγμένοι προτασιακοί τύποι. Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο αληθεύει για τα φ, ψ, δηλ. ισχύει ότι $\text{υδ}(\varphi) \leq \text{απ}(\varphi)$ και ότι $\text{υδ}(\psi) \leq \text{απ}(\psi)$.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε προτασιακό τύπο που προκύπτει από τους φ, ψ σύμφωνα με το βήμα του αναδρομικού ορισμού των προτασιακών τύπων. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι αν χ είναι προτασιακός τύπος της μορφής $(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, ή $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, τότε $\mathrm{υδ}(\chi) \leq \mathrm{απ}(\chi)$.

Αν ο προτασιακός τύπος χ είναι της μορφής $(\neg\varphi)$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathrm{υδ}(\chi) &= 1 + \mathrm{υδ}(\varphi) \\ &\leq 1 + \mathrm{απ}(\varphi) \\ &= \mathrm{απ}(\chi)\,, \end{aligned}$$

όπου οι δύο ισότητες προκύπτουν από τον ορισμό των $\mathrm{υδ}(\chi)$ και $\mathrm{απ}(\chi)$, και η ανισότητα από την επαγωγική υπόθεση ότι $\mathrm{υδ}(\varphi) \leq \mathrm{απ}(\varphi)$.

Αν ο προτασιακός τύπος χ είναι της μορφής $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, ή $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathrm{υδ}(\chi) &= 1 + \max\{\mathrm{υδ}(\varphi), \mathrm{υδ}(\psi)\} \\ &\leq 1 + \mathrm{υδ}(\varphi) + \mathrm{υδ}(\psi) \\ &\leq 1 + \mathrm{απ}(\varphi) + \mathrm{απ}(\psi) \\ &= \mathrm{απ}(\chi)\,, \end{aligned}$$

όπου οι δύο ισότητες προκύπτουν από τον ορισμό των $\mathrm{υδ}(\chi)$ και $\mathrm{απ}(\chi)$, η πρώτη ανισότητα από το $\max\{a, b\} \leq a + b$, που ισχύει για κάθε $a, b \geq 0$, και η δεύτερη ανισότητα από την επαγωγική υπόθεση ότι $\mathrm{υδ}(\varphi) \leq \mathrm{απ}(\varphi)$ και $\mathrm{υδ}(\psi) \leq \mathrm{απ}(\psi)$.

Δείξαμε λοιπόν ότι σε κάθε περίπτωση, $\mathrm{υδ}(\chi) \leq \mathrm{απ}(\chi)$. Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, προκύπτει ότι $\mathrm{υδ}(\chi) \leq \mathrm{απ}(\chi)$, δηλ. το ύψος του δενδροδιαγράμματος ενός προτασιακού τύπου είναι μικρότερο ή ίσο του αριθμού των αριστερών παρενθέσεων. □

Άσκηση 2.3. Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, θεωρούμε το σύνολο προτασιακών τύπων

$$T_n = \{\varphi_0, \varphi_0 \to \varphi_1, \varphi_1 \to \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1} \to \varphi_n\}$$

Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$, $T_n \vdash \varphi_n$.

2.3 Εφαρμογές στη Θεωρία Γραφημάτων

Η μαθηματική επαγωγή βρίσκει πολλές και σημαντικές εφαρμογές στη Θεωρία Γραφημάτων. Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια μερικά ενδιαφέροντα τέτοια παραδείγματα. Η μελέτη των παραδειγμάτων αυτής της ενότητας προϋποθέτει εξοικείωση με τις βασικές έννοιες της Θεωρίας Γραφημάτων.

Παράδειγμα 2.11. Ως πρώτο παράδειγμα, θα δείξουμε ότι κάθε δέντρο με n κορυφές έχει $n-1$ ακμές. Για την απόδειξη, θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή στη δομή των δέντρων (όπως αυτά ορίζονται αναδρομικά στο Παράδειγμα 2.6). Για την απόδειξη του επαγωγικού βήματος παρατηρούμε ότι όταν "συνδέουμε" δύο δέντρα (ένα με n_1 κορυφές και n_1-1 ακμές, και ένα με n_2 κορυφές και n_2-1 ακμές) με μία ακμή, κατασκευάζοντας έτσι ένα δέντρο με n_1+n_2 κορυφές (σύμφωνα με το βήμα του αναδρομικού ορισμού στο Παράδειγμα 2.6), ο αριθμός των ακμών του νέου δέντρου είναι n_1+n_2-1. Με άλλα λόγια, η σχέση του αριθμού κορυφών και ακμών του δέντρου "διατηρείται" από τους κανόνες στο βήμα του αναδρομικού ορισμού.

Βάση της επαγωγής: Προφανώς το ζητούμενο ισχύει για το δέντρο που αποτελείται από μία απομονωμένη κορυφή, αφού αυτό δεν έχει καμία ακμή.

Επαγωγική υπόθεση: Θεωρούμε δύο αυθαίρετα επιλεγμένα δέντρα T_1 και T_2 με n_1 και n_2 κορυφές αντίστοιχα. Επαγωγικά υποθέτουμε ότι το ζητούμενο αληθεύει για τα T_1 και T_2, δηλ. ότι ο αριθμός ακμών του T_1 είναι n_1-1 και ο αριθμός ακμών του T_2 είναι n_2-1.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο αληθεύει για το δέντρο T που προκύπτει θεωρώντας τα T_1 και T_2, και συνδέοντας με ακμή μια οποιαδήποτε κορυφή του T_1 με μια οποιαδήποτε κορυφή του T_2 (σύμφωνα με το βήμα του αναδρομικού ορισμού στο Παράδειγμα 2.6). Αφού το T έχει n_1+n_2 κορυφές, πρέπει να δείξουμε ότι έχει n_1+n_2-1 ακμές. Εκ κατασκευής, το T έχει μία ακμή παραπάνω από το άθροισμα των ακμών των T_1 και T_2. Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, τα T_1 και T_2 έχουν n_1-1 και n_2-1 ακμές αντίστοιχα. Άρα ο αριθμός των ακμών του T είναι ίσος με:

$$\overbrace{(n_1-1)}^{\text{ακμές } T_1}+\overbrace{(n_2-1)}^{\text{ακμές } T_2}+1=n_1+n_2-1$$

Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, κάθε δέντρο με n κορυφές έχει $n-1$ ακμές. □

Τα περισσότερα από τα παραδείγματα που ακολουθούν χρησιμοποιούν επαγωγή σε κάποια παράμετρο που χαρακτηρίζει την πολυπλοκότητα του γραφήματος (π.χ. ύψος δέντρου, αριθμός κορυφών, αριθμός ακμών). Επειδή αυτές οι παράμετροι είναι φυσικοί αριθμοί, οι αποδείξεις έχουν την τυπική δομή επαγωγής στους φυσικούς αριθμούς. Όμως ο συλλογισμός που χρησιμοποιείται για την απόδειξη του επαγωγικού βήματος αφορά στη δομή της κλάσης γραφημάτων όπου αναφέρεται το παράδειγμα. Ουσιαστικά λοιπόν έχουμε επαγωγή στη δομή της αντίστοιχης κλάσης γραφημάτων και όχι επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς.

Παράδειγμα 2.12 (Ισορροπημένα Δυαδικά Δέντρα). Ένα δυαδικό δένδρο ονομάζεται *ισορροπημένο* όταν για κάθε εσωτερική κορυφή v:

(α) Αν η v έχει ένα μόνο παιδί, αυτό είναι φύλλο.

(β) Αν η v έχει δύο παιδιά, τα ύψη των δύο υποδένδρων με ρίζες τα παιδιά της v διαφέρουν το πολύ κατά 1.

Θα δείξουμε ότι κάθε ισορροπημένο δυαδικό δέντρο ύψους $h \geq 0$ έχει τουλάχιστον $F_{h+3} - 1$ κόμβους, όπου F_{h+3} είναι ο $(h+3)$-οστός όρος της ακολουθίας Fibonacci.

Θα χρησιμοποιήσουμε ισχυρή μαθηματική επαγωγή στο ύψος h του δέντρου. Η απόδειξη του επαγωγικού βήματος βασίζεται στο γεγονός ότι ένα ισορροπημένο δυαδικό δέντρο ύψους $h+1$ αποτελείται από τη ρίζα, ένα υποδέντρο ύψους h (με τουλάχιστον $F_{h+3} - 1$ κόμβους), και ένα υποδέντρο ύψους είτε h είτε $h-1$ (με τουλάχιστον $F_{h+2} - 1$ κόμβους). Άρα ένα τέτοιο δέντρο έχει τουλάχιστον $F_{h+4} - 1$ κόμβους (παρατηρείστε ότι αν και η επαγωγή αφορά στο ύψος του δέντρου, δηλαδή σε μια παράμετρο που είναι φυσικός αριθμός, ο συλλογισμός που χρησιμοποιείται για την απόδειξη του επαγωγικού βήματος αναφέρεται στη δομή των ισορροπημένων δυαδικών δέντρων με τον ελάχιστο αριθμό κόμβων).

Βάση της επαγωγής: Το ζητούμενο αληθεύει για ισορροπημένα δυαδικά δέντρα ύψους 0 και 1 (λόγω του συλλογισμού που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του επαγωγικού βήματος, πρέπει να αποδείξουμε το ζητούμενο και για δέντρα ύψους 1 στη βάση της επαγωγής). Ειδικότερα, το μοναδικό (ισορροπημένο δυαδικό) δέντρο ύψους 0 αποτελείται από μια κορυφή. Αφού $F_3 = 2$, το ζητούμενο αληθεύει για $h = 0$. Το (ισορροπημένο δυαδικό) δέντρο με ύψος 1 και ελάχιστο αριθμό κόμβων αποτελείται από τη ρίζα και ένα φύλλο. Αφού $F_4 = 3$, το ζητούμενο αληθεύει και για $h = 1$.

Επαγωγική υπόθεση: Θεωρούμε έναν αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $h \geq 1$. Επαγωγικά υποθέτουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό k, $0 \leq k \leq h$, κάθε ισορροπημένο δυαδικό δέντρο ύψους k έχει τουλάχιστον $F_{k+3} - 1$ κόμβους.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο αληθεύει και για ισορροπημένα δυαδικά δέντρα ύψους $h+1$, δηλ. θα δείξουμε ότι κάθε ισορροπημένο δυαδικό δέντρο ύψους $h+1$ έχει τουλάχιστον $F_{h+4} - 1$ κόμβους.

Ένα δυαδικό δέντρο T αποτελείται από τη ρίζα r και δύο δυαδικά υποδέντρα T_1 και T_2 με ρίζες r_1 και r_2, οι οποίες είναι (τα μοναδικά) παιδιά της r. Για να έχει το T ύψος $h+1$, πρέπει το ένα από τα υποδέντρα (έστω το T_1) να έχει ύψος h, και το άλλο (έστω το T_2) να έχει ύψος το πολύ h (βλ. επίσης τον αναδρομικό ορισμό του ύψους ενός δέντρου στο Παράδειγμα 2.7, και τον αναδρομικό ορισμό των δυαδικών δέντρων που είναι πλήρη στην Άσκηση 2.1). Για να είναι το T ένα ισορροπημένο δυαδικό δέντρο ύψους $h+1$ πρέπει επιπλέον (α) τα T_1 και T_2 να είναι ισορροπημένα δυαδικά δέντρα (ώστε οι εσωτερικές κορυφές τους να ικανοποιούν τους περιορισμούς στον ορισμό των ισορροπημένων δυαδικών δέντρων), και (β) το T_2 να έχει ύψος τουλάχιστον $h-1$ (ώστε η ρίζα r να ικανοποιεί τους περιορισμούς στον ορισμό των ισορροπημένων δυαδικών δέντρων).

Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, το T_1 έχει τουλάχιστον $F_{h+3} - 1$ κόμβους και το T_2 έχει τουλάχιστον $F_{h+2} - 1$ κόμβους. Επομένως το T έχει τουλάχιστον:

$$\overbrace{(F_{h+3} - 1)}^{\text{κόμβοι } T_1} + \overbrace{(F_{h+2} - 1)}^{\text{κόμβοι } T_2} + 1 = F_{h+4} - 1\,,$$

όπου η ισότητα προκύπτει από τον αναδρομικό ορισμό της ακολουθίας Fibonacci.

Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, κάθε ισορροπημένο δυαδικό δέντρο ύψους h έχει τουλάχιστον $F_{h+3} - 1$ κόμβους. □

Άσκηση 2.4. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι κάθε δυαδικό δέντρο ύψους $h \geq 0$ έχει το πολύ $2^{h+1} - 1$ κόμβους.

Παράδειγμα 2.13. Έστω $\mathcal{G}$ η κλάση των απλών μη κατευθυνόμενων γραφημάτων που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

Βάση: Το K_3 (πλήρες γράφημα 3 κορυφών) ανήκει στην κλάση $\mathcal{G}$.

Βήμα: Αν G είναι ένα γράφημα της κλάσης $\mathcal{G}$, το γράφημα που προκύπτει από το G με την προσθήκη μιας νέας κορυφής που συνδέεται με περισσότερες από τις μισές κορυφές του G, ανήκει στην κλάση $\mathcal{G}$.

Το ζητούμενο είναι να δείξουμε ότι όλα τα γραφήματα της κλάσης $\mathcal{G}$ έχουν κύκλο Hamilton. Για την απόδειξη, θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή στη δομή των γραφημάτων της κλάσης $\mathcal{G}$. Η ιδέα για την απόδειξη του επαγωγικού βήματος είναι ότι αν συνδέσουμε μια νέα κορυφή u σε ένα γράφημα με κύκλο Hamilton, τουλάχιστον δύο από τους γείτονες της u θα είναι διαδοχικές κορυφές στον κύκλο Hamilton. Χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες ακμές μπορούμε να "παρεμβάλλουμε" την u στον κύκλο, δημιουργώντας έτσι έναν κύκλο Hamilton για το νέο γράφημα. Αναλυτικά:

Βάση της επαγωγής: Παρατηρούμε ότι το K_3 έχει κύκλο Hamilton.

Επαγωγική υπόθεση: Θεωρούμε ένα αυθαίρετα επιλεγμένο γράφημα G που ανήκει στην κλάση $\mathcal{G}$, και υποθέτουμε επαγωγικά ότι το G έχει κύκλο Hamilton.

Επαγωγικό βήμα: Έστω G' το γράφημα που προκύπτει από το G με την προσθήκη μιας νέας κορυφής u, η οποία συνδέεται με περισσότερες από τις μισές μορυφές του G. Θα δείξουμε ότι το γράφημα G' έχει κύκλο Hamilton.

Έστω $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_1)$ ένας κύκλος Hamilton στο G (ο οποίος υπάρχει λόγω της επαγωγικής υπόθεσης). Αφού η νέα κορυφή u συνδέεται με περισσότερες από τις μισές κορυφές του G, δύο τουλάχιστον από τους γείτονες της u είναι διαδοχικές στον κύκλο Hamilton $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_1)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε λοιπόν ότι η νέα κορυφή u συνδέεται με τις κορυφές v_1 και v_2 που είναι διαδοχικές στον κύκλο Hamilton $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_1)$. Αντικαθιστώντας την ακμή $\{v_1, v_2\}$ με τις ακμές $\{v_1, u\}$ και $\{u, v_2\}$ στον παραπάνω κύκλο (η u "παρεμβάλλεται" στον κύκλο), προκύπτει ο κύκλος $v_1, u, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_1$, ο οποίος είναι ένας κύκλος Hamilton για το γράφημα G'.

Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, κάθε γράφημα της κλάσης $\mathcal{G}$ έχει κύκλο Hamilton. □

Παράδειγμα 2.14 (Χρωματισμός Γραφημάτων). Ένας (γραφοθεωρητικά έγκυρος) χρωματισμός ενός γραφήματος είναι μία ανάθεση χρωμάτων στις κορυφές του γραφήματος ώστε τα άκρα κάθε ακμής να έχουν διαφορετικό χρώμα. Ο μέγιστος βαθμός $\Delta(G)$ ενός (μη κατευθυνόμενου) γραφήματος είναι ο μέγιστος βαθμός κάποιας κορυφής του G. Σε αυτό το παράδειγμα, θα αποδείξουμε ότι για κάθε γράφημα G, υπάρχει (έγκυρος) χρωματισμός που χρησιμοποιεί το πολύ $\Delta(G) + 1$ διαφορετικά χρώματα. Η απόδειξη εφαρμόζει μαθηματική επαγωγή στον αριθμό των κορυφών n του γραφήματος. Η ιδέα για την απόδειξη του επαγωγικού βήματος είναι να θεωρήσουμε ότι οι κορυφές (με τις αντίστοιχες ακμές) προστίθενται στο γράφημα μία-μία. Θεωρούμε λοιπόν έναν έγκυρο χρωματισμό για τις υπάρχουσες κορυφές, και μια νέα κορυφή v που συνδέεται με το πολύ Δ από τις υπάρχουσες (λόγω της υπόθεσης για το μέγιστο βαθμό). Παρατηρούμε ότι τουλάχιστον ένα από τα $\Delta + 1$ χρώματα που είναι διαθέσιμα δεν χρησιμοποιείται από κανένα γείτονα της v. Με την ανάθεση αυτού του χρώματος στη v ο έγκυρος χρωματισμός επεκτείνεται στη νέα κορυφή[2].

Βάση της επαγωγής: Το ζητούμενο ισχύει για γράφημα μίας κορυφής (δηλ. για $n = 1$), αφού αυτή η κορυφή με ένα μόνο χρώμα.

Επαγωγική υπόθεση: Θεωρούμε έναν αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 1$, και υποθέτουμε επαγωγικά ότι το ζητούμενο αληθεύει για κάθε γράφημα με n κορυφές.

Επαγωγικό βήμα: Έστω G ένα αυθαίρετα επιλεγμένο γράφημα με $n + 1$ κορυφές. Θα δείξουμε ότι οι κορυφές του G μπορούν να χρωματιστούν (με έγκυρο τρόπο) χρησιμοποιώντας το πολύ $\Delta(G) + 1$ διαφορετικά χρώματα.

Έστω v μια οποιαδήποτε κορυφή του G, και έστω G_v το γράφημα που προκύπτει από την αφαίρεση της κορυφής v και όλων των ακμών που προσπίπτουν σε αυτή. Το γράφημα G_v έχει n κορυφές, και ο μέγιστος βαθμός του δεν ξεπερνά τον μέγιστο βαθμό του G. Σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση, οι κορυφές του G_v μπορούν να χρωματιστούν με $\Delta(G_v) + 1 \leq \Delta(G) + 1$ διαφορετικά χρώματα το πολύ. Θεωρούμε λοιπόν έναν τέτοιο (έγκυρο) χρωματισμό των κορυφών του G_v.

Στην κορυφή v αναθέτουμε ένα οποιοδήποτε χρώμα διαφορετικό από τα χρώματα όλων των γειτόνων της. Έτσι δημιουργούμε έναν (έγκυρο) χρωματισμό του G. Ο αριθμός των γειτονικών κορυφών της v είναι μικρότερος ή ίσος του $\Delta(G)$ (αφού αυτός είναι ο μέγιστος βαθμός του G). Άρα στο χρωματισμό των κορυφών του G_v, οι γείτονες της v χρησιμοποιούν το πολύ $\Delta(G)$ διαφορετικά χρώματα. Άρα τουλάχιστον ένα από τα $\Delta(G) + 1$ διαθέσιμα χρώματα είναι διαφορετικό από τα χρώματα όλων των γειτόνων της v, και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το χρωματισμό της. Άρα έχουμε έναν (έγκυρο) χρωματισμό του G που χρησιμοποιεί το πολύ $\Delta(G) + 1$ διαφορετικά χρώματα.

Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, για κάθε γράφημα G, υπάρχει ένας (έγκυρος) χρωματισμός που χρησιμοποιεί το πολύ $D(G) + 1$ διαφορετικά χρώματα. □

Παράδειγμα 2.15 (Τύπος του Euler για Επίπεδα Γραφήματα). Έστω n ο αριθμός των κορυφών, και f ο αριθμός των όψεων ενός επίπεδου γραφήματος. Ο αριθμός των ακμών m ενός τέτοιου γραφήματος δίνεται από τη σχέση $m = n + f - 2$, η οποία είναι γνωστή ως τύπος του Euler για

[2]Παρατηρείστε ότι ο συλλογισμός για την απόδειξη του επαγωγικού βήματος αφορά στη δομή των γραφημάτων, και βασίζεται σε έναν αναδρομικό ορισμό τους σύμφωνα με τον οποίο ένα γράφημα με n κορυφές προκύπτει από ένα γράφημα με $n - 1$ κορυφές με την προσθήκη μιας νέας κορυφής και των αντίστοιχων ακμών.

επίπεδα γραφήματα. Σε αυτό το παράδειγμα, θα αποδείξουμε τον τύπο του Euler με επαγωγή στον αριθμό των όψεων f.

Για την απόδειξη, αρχικά παρατηρούμε ότι κάθε συνδεόμενο επίπεδο γράφημα με μία όψη είναι δέντρο, και συνεπώς επαληθεύει τον τύπο του Euler (ο αριθμός των ακμών είναι $n-1 = n+1-2$). Για την απόδειξη του επαγωγικού βήματος, παρατηρούμε ότι αν σε ένα συνδεόμενο επίπεδο γράφημα που επαληθεύει τον τύπο του Euler, διατηρήσουμε τις κορυφές και προσθέσουμε μία νέα ακμή (ώστε το γράφημα να παραμείνει επίπεδο), τότε δημιουργείται μια νέα όψη (π.χ. η προσθήκη μιας ακμής σε ένα δέντρο δημιουργεί κύκλο, ο οποίος ορίζει μια εσωτερική όψη). Επομένως τόσο ο αριθμός των ακμών όσο και ο αριθμός των όψεων αυξάνεται κατά 1, και η ισότητα #ακμών $=$ #κορυφών $+$ #όψεων $-$ 2 διατηρείται.

Βάση της επαγωγής: Η βάση της επαγωγής αφορά κάθε συνδεόμενο επίπεδο γράφημα με $n \geq 1$ κορυφές και μία μόνο όψη, την εξωτερική. Ένα επίπεδο γράφημα χωρίς εσωτερικές όψεις δεν περιέχει κύκλους. Ως συνδεόμενο και ακυκλικό, ένα τέτοιο γράφημα είναι δέντρο, και ικανοποιεί τον τύπο του Euler αφού $f = 1$ και $m = n - 1$ (παρατηρείστε ότι η βάση της επαγωγής αφορά κάθε δέντρο με n κορυφές).

Επαγωγική υπόθεση: Έστω $f \geq 1$ ένας αυθαίρετα επιλεγμένος φυσικός αριθμός. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι ο τύπος του Euler ισχύει για κάθε συνδεόμενο επίπεδο γράφημα με $n \geq 1$ κορυφές και f όψεις.

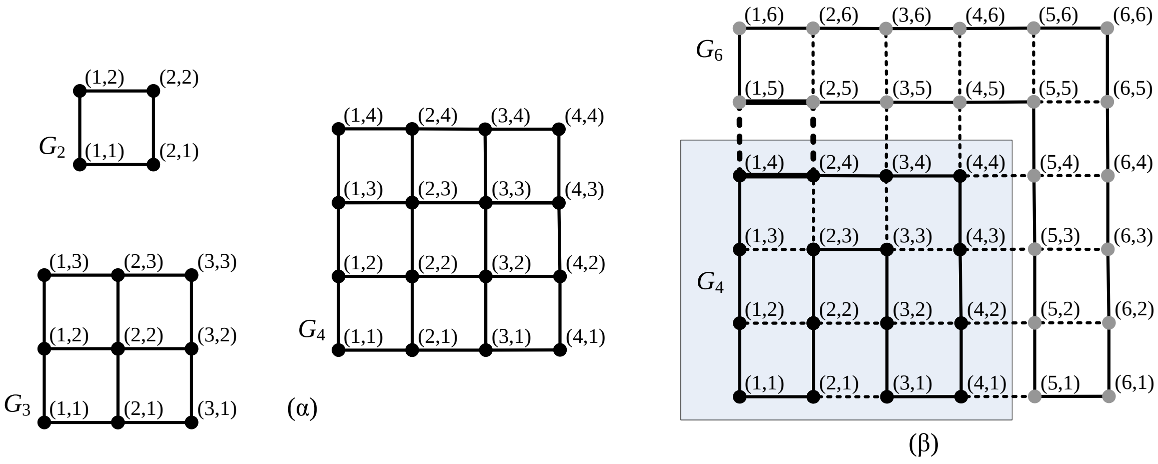
Επαγωγικό βήμα: Έστω G ένα αυθαίρετα επιλεγμένο συνδεόμενο επίπεδο γράφημα με $n \geq 1$ κορυφές, και $f+1$ όψεις. Θα δείξουμε ότι το G ικανοποιεί τον κύκλο του Euler, δηλ. ότι ο αριθμός των ακμών του m δίνεται από τη σχέση $m = n + (f+1) - 2$.

Αφού το G έχει τουλάχιστον δύο όψεις, περιέχει κύκλο. Έστω e μια ακμή του G που ανήκει σε κύκλο, και έστω G_e το γράφημα που προκύπτει από την αφαίρεση της ακμής e. Το γράφημα G_e είναι συνδεόμενο (η ακμή e ανήκει σε κύκλο, και η αφαίρεσή της δεν επηρεάζει την συνεκτικότητα του γραφήματος), είναι επίπεδο (κάθε υπογράφημα ενός επίπεδου γραφήματος είναι επίπεδο), έχει n κορυφές (όσες και το G), και $m-1$ ακμές (μία λιγότερη από το G). Επιπλέον, η αφαίρεση της ακμής e οδηγεί στην ένωση δύο όψεων σε μία. Επομένως το γράφημα G_e έχει f όψεις (μία όψη λιγότερη από το G).

Αφού το γράφημα G_e είναι ένα συνδεόμενο επίπεδο γράφημα με n κορυφές και f όψεις, ικανοποιεί τον τύπο του Euler λόγω της επαγωγικής υπόθεσης. Συνεπώς ο αριθμός των ακμών του G_e $(m-1)$ είναι ίσος με τον αριθμό των κορυφών (n) συν τον αριθμό των όψεων (f) μείον 2, δηλ. $m - 1 = n + f - 2$. Αυξάνοντας τα δύο μέλη της ισότητας κατά 1 (η αύξηση αντιστοιχεί στην όψη και την ακμή e που υπάρχουν στο G αλλά όχι στο G_e), έχουμε ότι $m = n + (f+1) - 2$. Συνεπώς το γράφημα G ικανοποιεί τον τύπο του Euler.

Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, ο τύπος του Euler ισχύει για κάθε συνδεόμενο επίπεδο γράφημα. □

Παράδειγμα 2.16 (Κύκλος Hamilton σε Πλέγμα). Το πλέγμα τάξης $n \geq 1$, το οποίο στο εξής θα συμβολίζουμε με G_n, είναι ένα απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα με $n \times n$ κορυφές. Οι κορυφές



Σχήμα 2.1. (α). Πλέγματα τάξης 2, 3, και 4 με τις συντεταγμένες των κορυφών τους. (β). Απεικόνιση της απόδειξης του επαγωγικού βήματος για $n = 4$. Το πλέγμα G_4 (στο σκιασμένο παραλληλόγραμμο) επαυξάνεται στο πλέγμα G_6 με την προσθήκη των γραμμών 5 και 6 και των στηλών 5 και 6 (οι κορυφές που προστίθενται έχουν γκρι χρώμα). Όλες οι ακμές σημειώνονται διακεκομμένες εκτός από τις ακμές ενός κύκλου Hamilton στο G_4 και τις ακμές του κύκλου $C_{5,6}$ στο G_6, ο οποίος καλύπτει όλες τις κορυφές που υπάρχουν στο G_6 αλλά όχι στο G_4 (δηλ. όλες τις κορυφές χρώματος γκρι). Ο κύκλος Hamilton του G_4 και ο κύκλος $C_{5,6}$ μπορούν να ενωθούν αντικαθιστώντας τις ακμές $\{(1,4),(2,4)\}$ και $\{(1,5),(2,5)\}$ με τις ακμές $\{(1,4),(1,5)\}$ και $\{(2,5),(2,4)\}$ (απεικονίζονται έντονες, οι πρώτες συμπαγείς, οι δεύτερες διακεκομμένες). Το αποτέλεσμα είναι ένας κύκλος Hamilton για το G_6.

του G_n οργανώνονται σε n γραμμές (των n κορυφών) και n στήλες (των n κορυφών). Έτσι προκύπτει ένα ζεύγος συντεταγμένων $(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$ για κάθε κορυφή, όπου το i δηλώνει τη στήλη και το j τη γραμμή στην οποία ανήκει η κορυφή. Οι n κορυφές με την ίδια τεταγμένη j συγκροτούν την γραμμή j, και οι n κορυφές με την ίδια τετμημένη i συγκροτούν την στήλη i. Η κορυφή με συντεταγμένες (i,j) συνδέεται με τις κορυφές $(i-1,j)$ και $(i+1,j)$, οι οποίες βρισκονται στην ίδια γραμμή και διπλανές στήλες, και με τις κορυφές $(i,j-1)$ και $(i,j+1)$, οι οποίες βρίσκονται στην ίδια στήλη και διπλανές γραμμές. Το πλέγμα G_1 τάξης 1 αποτελείται από μια απομονωμένη κορυφή. Τα πλέγματα G_2, G_3, και G_4, τάξης 2, 3, και 4 αντίστοιχα, απεικονίζονται στο Σχήμα 2.1.α.

Το ζητούμενο σε αυτό το παράδειγμα είναι να δείξουμε ότι κάθε πλέγμα άρτιας τάξης έχει κύκλο Hamilton. Αυτό είναι προφανές για το πλέγμα τάξης 2, το οποίο είναι ένας απλός κύκλος με 4 κορυφές, και μπορεί να αποδειχθεί κατασκευαστικά και για πλέγματα μεγαλύτερης τάξης. Εδώ θα δώσουμε μια απλή απόδειξη που χρησιμοποιεί μαθηματική επαγωγή στην άρτια τάξη του πλέγματος. Για την απόδειξη του επαγωγικού βήματος, παρατηρούμε ότι το πλέγμα G_{n+2} προκύπτει από το πλέγμα G_n με την προσθήκη δύο νέων γραμμών και δύο νέων στηλών (βλ. Σχήμα 2.1.β, για την επαύξηση του πλέγματος G_4 στο πλέγμα G_6), και ότι ένας κύκλος Hamilton στο G_n μπορεί να επεκταθεί και να ενσωματώσει τις νέες κορυφές.

Βάση της επαγωγής: Το ζητούμενο ισχύει για $n = 2$ (που είναι η ελάχιστη άρτια τάξη πλέγματος), αφού το G_2 έχει κύκλο Hamilton (βλ. Σχήμα 2.1.α).

Επαγωγική υπόθεση: Έστω $n \geq 1$ ένας αυθαίρετα επιλεγμένος άρτιος φυσικός αριθμός. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι το πλέγμα G_n τάξης n έχει κύκλο Hamilton. Παρατηρούμε μάλιστα ότι επειδή η κορυφή $(1, n)$ έχει βαθμό 2, κάθε κύκλος Hamilton στο G_n χρησιμοποιεί την ακμή που συνδέει την κορυφή $(1, n)$ με την κορυφή $(2, n)$ (το ίδιο ισχύει και για την ακμή $\{(1, n), (1, n-1)\}$, καθώς και για τις ακμές που προσπίπτουν στις κορυφές $(1, 1)$, $(n, 1)$, και (n, n), οι οποίες επίσης έχουν βαθμό 2).

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το πλέγμα G_{n+2} (που είναι το πλέγμα με την αμέσως μεγαλύτερη άρτια τάξη) έχει κύκλο Hamilton.

Παρατηρούμε ότι το G_{n+2} προκύπτει από το G_n με την προσθήκη δύο νέων γραμμών κορυφών (των γραμμών $n+1$ και $n+2$, με $n+2$ κορυφές η κάθε μία), δύο νέων στηλών κορυφών (των στηλών $n+1$ και $n+2$, με $n+2$ κορυφές η κάθε μία), και των αντίστοιχων ακμών (η επαύξηση του πλέγματος G_4 στο πλέγμα G_6 επεικονίζεται στο Σχήμα 2.1.β, όπου το G_4 σημειώνεται με το σκιασμένο παραλληλόγραμμο, οι κορυφές του G_4 έχουν μαύρο χρώμα, και οι κορυφές που προστέθηκαν έχουν γκρι χρώμα). Παρατηρούμε επίσης ότι υπάρχει απλός κύκλος ο οποίος διέρχεται από όλες τις νέες κορυφές. Ένας τέτοιος κύκλος ξεκινά από την κορυφή $(1, n+1)$ προχωρεί δεξιά στη γραμμή $n+1$ μέχρι την κορυφή $(n+1, n+1)$, "κατεβαίνει" τη στήλη $n+1$ μέχρι την κορυφή $(n+1, 1)$, συνεχίζει στην κορυφή $(n+2, 1)$, "ανεβαίνει" τη στήλη $n+2$ μέχρι την κορυφή $(n+2, n+2)$, συνεχίζει αριστερά στη γραμμή $n+2$ μέχρι την κορυφή $(1, n+2)$, και επιστέφει στην κορυφή $(1, n+1)$. Ας ονομάσουμε αυτόν τον κύκλο $C_{n+1,n+2}$ (στο Σχήμα 2.1.β, οι ακμές του κύκλου $C_{5,6}$ για το G_6 απεικονίζονται συμπαγείς).

Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, το G_n έχει κύκλο Hamilton (στο Σχήμα 2.1.β, οι ακμές ενός κύκλου Hamilton για το G_n απεικονίζονται συμπαγείς). Είδαμε μάλιστα ότι κάθε κύκλος Hamilton του G_n διέρχεται από την ακμή $\{(1, n), (2, n)\}$ (απεικονίζεται έντονη στο Σχήμα 2.1.β). Είδαμε επίσης ότι ο κύκλος $C_{n+1,n+2}$ στο G_{n+2}, ο οποίος διέρχεται από όλες τις κορυφές που υπάρχουν στο G_{n+2} αλλά όχι στο G_n, διέρχεται από την ακμή $\{(1, n+1), (2, n+1)\}$ (απεικονίζεται έντονη στο Σχήμα 2.1.β). Επομένως οι δύο κύκλοι μπορούν να "ενωθούν" αντικαθιστώντας τις ακμές $\{(1, n), (2, n)\}$ και $\{(1, n+1), (2, n+1)\}$ με τις ακμές $\{(1, n), (1, n+1)\}$ και $\{(2, n+1), (2, n)\}$ (απεικονίζονται έντονες και διακεκομμένες στο Σχήμα 2.1.β). Έτσι δημιουργείται ένας κύκλος που διέρχεται από κάθε κορυφή του G_{n+2} μία φορά (οι κορυφές του G_n καλύπτονται από τον αντίστοιχο κύκλο Hamilton, οι κορυφές που εντάσσονται στο G_{n+2} αλλά όχι στο G_n καλύπτονται από τον κύκλο $C_{n+1,n+2}$, και δεν υπάρχουν επαναλήψεις κορυφών). Άρα το G_{n+2} έχει κύκλο Hamilton. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του επαγωγικού βήματος. Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, κάθε πλέγμα άρτιας τάξης έχει κύκλο Hamilton. □

Άσκηση 2.5. Παρατηρείστε ότι για την απόδειξη του επαγωγικού βήματος στο Παράδειγμα 2.16, δεν είναι απαραίτητο το n να είναι άρτιος. Ισχύει λοιπόν ότι για κάθε $n \geq 2$ (άρτιο ή περιττό), αν το πλέγμα τάξης n έχει κύκλο Hamilton, τότε και το πλέγμα τάξης $n+2$ έχει κύκλο Hamilton. Μπορούμε από αυτό να συμπεράνουμε ότι κάθε πλέγμα περιττής τάξης $n \geq 3$ έχει κύκλο Hamilton;

2.4 Εφαρμογές στην Ανάλυση Αναδρομικών Αλγόριθμων

Μια άλλη, πολύ σημαντική για την Επιστήμη των Υπολογιστών, εφαρμογή της μαθηματικής επαγωγής αφορά στην απόδειξη ορθότητας και στην ανάλυση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας πολλών αλγορίθμων. Εδώ θα περιοριστούμε σε ένα παράδειγμα ανάλυσης ενός απλού αναδρομικού αλγόριθμου.

Παράδειγμα 2.17 (Ύψωση σε Δύναμη). Θεωρούμε τον παρακάτω αναδρομικό αλγόριθμο[3] για τον υπολογισμό της n-οστής δύναμης του αριθμού x.

```
pow(x, n)
    if n = 1 then return(x);
    y := pow(x, ⌊n/2⌋);
    y := y × y;
    if n περιττός then
        y = y × x;
    return(y);
```

Θεωρούμε ότι η κλήση pow(x, n) δέχεται σαν είσοδο έναν θετικό αριθμό x και έναν θετικό φυσικό αριθμό n, και επιστρέφει έναν θετικό αριθμό. Διαισθητικά είναι φανερό ότι η τιμή που επιστρέφεται από την κλήση pow(x, n) είναι ίση με τη n-οστή δύναμη του x. Το ζητούμενο είναι να αποδείξουμε αυτό τον ισχυρισμό φορμαλιστικά, δηλ. να δείξουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, η κλήση pow(x, n) επιστρέφει την τιμή x^n. Αυτή η διαδικασία συχνά αναφέρεται ως *απόδειξη ορθότητας* ενός αλγόριθμου. Για την απόδειξη ορθότητας του αναδρομικού αλγόριθμου pow, χρησιμοποιούμε ισχυρή μαθηματική επαγωγή στο n.

Αρχικά παρατηρούμε ότι η λειτουργία του pow βασίζεται στον ακόλουθο αναδρομικό ορισμό της n-οστής δύναμης του x. Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, ο παρακάτω ορισμός εκφράζει το x^n ως γινόμενο άλλων μικρότερων ακεραίων δυνάμεων του x.

Βάση: Για $n = 1$, η πρώτη δύναμη του x είναι ίση με x.

Βήμα: (Άρτιες Δυνάμεις) Για κάθε άρτιο $n \geq 2$, η n-οστή δύναμη του x είναι ίση με το γινόμενο της $\frac{n}{2}$-οστής δύναμης του x με τον εαυτό της (δηλ. $x^n = x^{n/2} \times x^{n/2}$(.

(Περιττές Δυνάμεις) Για κάθε περιττό $n \geq 3$, η n-οστή δύναμη του x είναι ίση με x επί το γινόμενο της $\frac{n-1}{2}$-οστής δύναμης του x με τον εαυτό της (δηλ. $x^n = x \times x^{(n-1)/2} \times x^{(n-1)/2}$).

Έτσι, αν και η απόδειξη έχει την τυπική διάρθρωση της ισχυρής επαγωγής στους φυσικούς αριθμούς, ουσιαστικά χρησιμοποιεί επαγωγή στη δομή της ακολουθίας των ακεραίων δυνάμεων του x (οι οποίες βρίσκονται σε προφανή αντιστοιχία με τους φυσικούς αριθμούς), και τα βήματά της υπαγορεύονται από τον παραπάνω αναδρομικό ορισμό του x^n.

[3] Στη διατύπωση του αλγόριθμου, το $\lfloor n/2 \rfloor$ συμβολίζει το κάτω ακέραιο μέρος της διαίρεσης n δια 2. Το $\lfloor n/2 \rfloor$ είναι ίσο με $n/2$ αν το n είναι άρτιος, και με $(n-1)/2$ αν το n είναι περιττός. Κατά την απόδειξη του επαγωγικού βήματος, χρησιμοποιούμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, το $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ είναι μικρότερο ή ίσο του n και μεγαλύτερο ή ίσο του 1.

Βάση της επαγωγής: Το ζητούμενο ισχύει για $n = 1$, αφού η κλήση pow(x, 1) ολοκληρώνεται στο βήμα (1) επιστρέφοντας την τιμή x.

Επαγωγική υπόθεση: Έστω $n \geq 1$ ένας αυθαίρετα επιλεγμένος φυσικός αριθμός. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι το ζητούμενο αληθεύει για κάθε φυσικό αριθμό k, $1 \leq k \leq n$, δηλ. η κλήση pow(x, k) επιστρέφει την τιμή x^k.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο αληθεύει και για την $(n+1)$-οστή δύναμη του x, δηλ. η κλήση pow(x, $n+1$) επιστρέφει την τιμή x^{n+1}.

Αφού $n + 1 \geq 2$, η κλήση pow(x, $n+1$) προχωρά στο βήμα (2), όπου καλεί αναδρομικά την pow(x, $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$) και αποθηκεύει την τιμή που αυτή επιστρέφει στη μεταβλητή y. Επειδή το $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ είναι ένας φυσικός αριθμός μεταξύ του 1 και του n, μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση, σύμφωνα με την οποία η αναδρομική κλήση pow(x, $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$) επιστρέφει την τιμή $x^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$. Άρα μετά την ολοκλήρωση του βήματος (2), η μεταβλητή y έχει την τιμή $x^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν το $n + 1$ είναι άρτιος ή περιττός (σύμφωνα με τη λειτουργία του αλγόριθμου και τον αναδρομικό ορισμό της n-οστής δύναμης του x).

Άρτιες δυνάμεις: Αν το $n+1$ είναι άρτιος, τότε $\lfloor (n+1)/2 \rfloor = (n+1)/2$. Άρα στο βήμα (3), η μεταβλητή y παίρνει την τιμή $x^{(n+1)/2} \times x^{(n+1)/2} = x^{n+1}$. Η κλήση pow($x$, $n+1$) δεν εκτελεί το βήμα (5), και επιστρέφει την τιμή x^{n+1}.

Περιττές δυνάμεις: Αν το $n+1$ είναι περιττός, τότε $\lfloor (n+1)/2 \rfloor = n/2$. Άρα στο βήμα (3), η μεταβλητή y παίρνει την τιμή $x^{n/2} \times x^{n/2} = x^n$. Στη συνέχεια η κλήση pow(x, $n+1$) εκτελεί το βήμα (5), όπου η μεταβλητή y παίρνει την τιμή $x^n \times x = x^{n+1}$. Τελικά η κλήση pow(x, $n+1$) επιστρέφει την τιμή x^{n+1}.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι και στις δύο περιπτώσεις η κλήση pow(x, $n+1$) επιστρέφει την τιμή x^{n+1}. Ως συνέπεια της αρχής της ισχυρής μαθηματικής επαγωγής, για κάθε φυσικό $n \geq 1$, η κλήση pow(x, n) υπολογίζει και επιστρέφει τη n-οστή δύναμη του αριθμού x. □

Άσκηση 2.6 (Ύψωση σε Δύναμη). Σε αυτή την άσκηση θα εκτιμήσουμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγόριθμου pow, αποδεικνύοντας ένα άνω φράγμα στον αριθμό των πολλαπλασιασμών που εκτελεί η κλήση pow(x, n). Έστω $M(n)$ ο συνολικός αριθμός πολλαπλασιασμών που εκτελούνται από την κλήση pow(x, n) (και όλες τις αναδρομικές κλήσεις που αυτή προκαλεί) στα βήματα (3) και (5). Χρησιμοποιώντας ισχυρή μαθηματική επαγωγή στο n, να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$, $M(n) \leq 2 \log_2 n$.

3 Οδηγός για Περαιτέρω Μελέτη

Η αποδεικτική τεχνική της μαθηματικής επαγωγής παρουσιάζεται σε όλα τα βιβλία Διακριτών Μαθηματικών, ενώ σχετικές ενότητες υπάρχουν στα περισσότερα βιβλία Θεωρίας Υπολογισμού και Θεωρίας Αλγορίθμων. Υπάρχουν ακόμη βιβλία που αφορούν αποκλειστικά την μαθηματική επαγωγή και τις εφαρμογές της (βλ. π.χ. [Pol54, Som63, GY63]). Σε αυτή την ενότητα, έχουμε επιλέξει (με βασικά κριτήρια την επιστημονική επάρκεια και την καταλληλότητα για τις ανάγκες του μαθήματος) και προτείνουμε ενότητες βιβλίων από την Ελληνική και διεθνή βιβλιογραφία που αφορούν στην μαθηματική επαγωγή και τις εφαρμογές της.

Από την Ελληνική βιβλιογραφία, προτείνουμε την Ενότητα 1.5 στο βιβλίο του C.L. Liu [Liu94], και τα Κεφάλαια 2 και 3 από το βιβλίο του Η. Κουτσουπιά [Κου08]. Τόσο στην [Liu94, Ενότητα 1.5] όσο και στα [Κου08, Κεφάλαια 2 και 3] θα βρείτε πολλά λυμένα παραδείγματα και κάποιες εξαιρετικές ασκήσεις. Προτείνουμε να δείτε με προσοχή τα Παραδείγματα 1.3, 1.6, 1.8, και 1.10, και τις Ασκήσεις 1.31, 1.39-1.45, 1.49, 1.50, και 1.52 από το [Liu94], και τα Παραδείγματα 2.7, 2.8, 2.9, και 3.5, και τις Ασκήσεις 2.13, 2.14, 2.15, 3.1-3.5, και 3.7 (πολλές από αυτές με τις λύσεις τους) από το [Κου08].

Από τη διεθνή βιβλιογραφία, προτείνουμε τις Ενότητες 3.2, 3.3, και 3.4 στο βιβλίο του K.H. Rosen [Ros98], όπου θα βρείτε πλήθος εξαιρετικών παραδειγμάτων και μεγάλη ποικιλία ασκήσεων, το Κεφάλαιο 1 από το κλασικό βιβλίο των R.L. Graham, D.E. Knuth, και O. Patashnik [GKP89], την Ενότητα 1.2.1 από το κλασικό βιβλίο του D.E. Knuth [Knu73], και την Ενότητα 2.1 από το βιβλίο των L. Lovasz, J. Pelikan, και K. Vesztergombi [LPV03].

Να επισημάνουμε τέλος ότι οι ενότητες που αναφέρονται παραπάνω αφορούν αποκλειστικά στην παρουσίαση της τεχνικής της μαθηματικής επαγωγής. Ενδιαφέρουσες εφαρμογές της μαθηματικής επαγωγής, θα συναντήσει κανείς στα περισσότερα από τα κεφάλαια των [Liu94, Κου08, Ros98, GKP89, Knu73, LPV03], και όλων των βιβλίων Διακριτών Μαθηματικών (αλλά και Θεωρίας Γραφημάτων, Θεωρίας Αριθμών, Θεωρίας Υπολογισμού, Θεωρίας Αλγορίθμων, κλπ.).

Βιβλιογραφία

[GKP89] R.L. Graham, D.E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, 1989.

[GY63] L.I. Golovina and I.M. Yaglom. *Induction in Geometry*. D.C. Heath, 1963.

[Knu73] D.E. Knuth. *The Art of Computer Programming: Vol. 1, Fundamental Algorithms (2nd Ed.)*. Addison-Wesley, 1973.

[Kou08] Η. Κουτσουπιάς. *Τα Μαθηματικά της Πληροφορικής*. Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Ιανουάριος 2008. Διαθέσιμο ηλεκτρονικά από τη διεύθυνση http://theory.di.uoa.gr/Math4CS/math4cs.pdf/view.

[Liu94] C.L. Liu. *Στοιχεία Διακριτών Μαθηματικών* (απόδοση στα Ελληνικά: Κ. Μπους και Δ. Γραμμένος). Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2003.

[LPV03] L. Lovasz, J. Pelikan, and K. Vesztergombi. *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond*. Springer, 2003.

[Pol54] G. Polya. *Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton University Press, 1954.

[Ros98] K.H. Rosen. *Discrete Mathematics and its Applications (4th Ed.)*. McGraw-Hill, 1998.

[Som63] I.S. Sominskii. *The Method of Mathematical Induction*. D.C. Heath, 1963.

A Λύσεις Ασκήσεων

Ασκήσεις Κεφαλαίου 1

Άσκηση 1.1. Τα σημεία που πρέπει να συμπληρώσετε εμφανίζονται υπογραμμισμένα:
Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς. Έστω $P(n)$ η λογική πρόταση

$$\underline{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2}$$

Θα δείξουμε ότι αυτό αληθεύει για κάθε $n \geq 1$.
Βάση της επαγωγής: Παρατηρούμε ότι το $P(1)$ αληθεύει, αφού $1 = 1^2$.
Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 1$ αληθεύει η πρόταση $P(n)$, δηλ. ισχύει ότι $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι αληθεύει η πρόταση $P(n + 1)$. Ο επόμενος (δηλ. ο $(n + 1)$-οστός) περιττός είναι το $2n + 1$. Πρέπει λοιπόν να δείξουμε ότι $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \overbrace{1 + \ldots + (2n - 1)}^{=n^2} + (2n + 1) &= \underline{n^2 + 2n + 1} \\ &= \underline{(n + 1)^2}\,, \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από την επαγωγική υπόθεση.
Ως συνέπεια της αρχής της επαγωγής, για κάθε $n \geq 1$, $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$. □

Άσκηση 1.2. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς. Έστω $P(n)$ η λογική πρόταση

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$$

Θα δείξουμε ότι αυτό αληθεύει για κάθε $n \geq 1$.
Βάση της επαγωγής: Παρατηρούμε ότι το $P(1)$ αληθεύει, αφού $2 = 1 \cdot 2$.
Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 1$ αληθεύει η πρόταση $P(n)$, δηλ. ισχύει ότι $2 + 4 + \ldots + 2n = n(n + 1)$.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι αληθεύει η πρόταση $P(n + 1)$. Ο επόμενος (δηλ. ο $(n + 1)$-οστός) άρτιος είναι το $2(n + 1)$. Πρέπει λοιπόν να δείξουμε ότι $2 + 4 + \ldots + 2n + 2(n + 1) =$

$(n+1)(n+2)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\overbrace{1+\ldots+2n}^{=n(n+1)}+2(n+1) &= n(n+1)+2(n+1)\\ &= (n+1)(n+2)\,,\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από την επαγωγική υπόθεση.

Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, έχουμε για κάθε $n \geq 1$, $2+4+\ldots+2n = n(n+1)$. □

Άσκηση 1.3. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς. Έστω $P(n)$ η λογική πρόταση

$$1+2+2^2+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$$

Θα δείξουμε ότι αυτό αληθεύει για κάθε $n \geq 0$.
Βάση της επαγωγής: Παρατηρούμε ότι το $P(0)$ αληθεύει, αφού $1 = 2^1 - 1$.
Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 0$ αληθεύει η πρόταση $P(n)$, δηλ. ισχύει ότι $1+2+2^2+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι αληθεύει η πρόταση $P(n+1)$, δηλ. ότι $1+2+2^2+\ldots+2^n+2^{n+1} = 2^{n+2}-1$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\overbrace{1+2+2^2\ldots+2^n}^{=2^{n+1}-1}+2^{n+1} &= 2^{n+1}-1+2^{n+1}\\ &= 2^{n+2}-1\,,\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από την επαγωγική υπόθεση, και η δεύτερη ισότητα από το γεγονός ότι $2^{n+1}+2^{n+1} = 2^{n+2}$.

Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, έχουμε για κάθε $n \geq 0$, $1+2+2^2+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$. □

Άσκηση 1.8. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς.
Βάση της επαγωγής: Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = 1$, αφού ο αριθμός $1^3 - 1 = 0$ διαιρείται ακριβώς από το 3.
Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 1$, ο αριθμός $n^3 - n$ διαιρείται ακριβώς από το 3.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο αληθεύει και για τον επόμενο φυσικό $n+1$, δηλ. θα δείξουμε ότι ο αριθμός $(n+1)^3 - (n+1)$ διαιρείται ακριβώς από τον 3. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, έχουμε:

$$\begin{aligned}(n+1)^3-(n+1) &= (n^3+3n^2+3n+1)-(n+1)\\ &= (n^3-n)+3(n^2+n)\,,\end{aligned}$$

το οποίο διαιρείται ακριβώς από το 3 αφού τόσο ο πρώτος όρος $n^3 - n$ διαιρείται ακριβώς από το 3, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, όσο και ο δεύτερος όρος $3(n^2 + n)$ διαιρείται ακριβώς από το 3, ως ακέραιο πολλαπλάσιο του 3. Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, έχουμε ότι για κάθε $n \geq 1$, ο αριθμός $n^3 - n$ διαιρείται ακριβώς από τον 3. $\square$

Άσκηση 1.9. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς.
Βάση της επαγωγής: Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = 1$, αφού ο αριθμός $1^5 - 1 = 0$ διαιρείται ακριβώς από το 5.
Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 1$, ο αριθμός $n^5 - n$ διαιρείται ακριβώς από το 5.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο αληθεύει και για τον επόμενο φυσικό $n+1$, δηλ. θα δείξουμε ότι ο αριθμός $(n+1)^5 - (n+1)$ διαιρείται ακριβώς από το 5. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, έχουμε:

$$\begin{aligned}(n+1)^5 - (n+1) &= (n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1) - (n+1)\\ &= (n^5 - n) + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)\,,\end{aligned}$$

το οποίο διαιρείται ακριβώς από το 5 αφού τόσο ο πρώτος όρος $n^5 - n$ διαιρείται ακριβώς από το 5, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, όσο και ο δεύτερος όρος $5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$ διαιρείται ακριβώς από το 5, ως ακέραιο πολλαπλάσιο του 5. Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, έχουμε ότι για κάθε $n \geq 1$, ο αριθμός $n^5 - n$ διαιρείται ακριβώς από το 5. $\square$

Άσκηση 1.12. Η απόδειξη χρησιμοποιεί μαθηματική επαγωγή στον πληθικό αριθμό του συνόλου. Η λογική πρόταση $P(n)$ προκύπτει άμεσα από το ζητούμενο και δηλώνει ότι "κάθε σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n διαφορετικά υποσύνολα".
Βάση της επαγωγής: Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = 1$, αφού κάθε σύνολο με 1 μόνο στοιχείο έχει $2 = 2^1$ διαφορετικά υποσύνολα (το κενό σύνολο και τον εαυτό του).
Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι το ζητούμενο αληθεύει για κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 1$, δηλ. ισχύει ότι κάθε σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n διαφορετικά υποσύνολα.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο αληθεύει και για τον επόμενο φυσικό $n + 1$, δηλ. θα δείξουμε ότι κάθε σύνολο με $n + 1$ στοιχεία έχει 2^{n+1} διαφορετικά υποσύνολα.

Έστω S ένα αυθαίρετα επιλεγμένο σύνολο με $n+1$ στοιχεία, και έστω $x \in S$ ένα οποιοδήποτε στοιχείο του S. (Με σκοπό να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση,) θεωρούμε το σύνολο $S_x = S \setminus \{x\}$, το οποίο έχει $n \geq 1$ στοιχεία. Σε κάθε υποσύνολο του $A \subseteq S_x$, αντιστοιχούν δύο διαφορετικά υποσύνολα του S: (α) το ίδιο το A (που δεν περιέχει το στοιχείο x), και (β) το $A \cup \{x\}$ (που περιέχει το στοιχείο x).

Συνεπώς ο αριθμός των διαφορετικών υποσυνόλων του S είναι διπλάσιος από τον αριθμό των διαφορετικών υποσυνόλων του S_x (αφού σε κάθε υποσύνολο A του S_x αντιστοιχούν δύο διαφορετικά υποσύνολα του S). Εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση, έχουμε ότι το σύνολο

S_x έχει 2^n διαφορετικά υποσύνολα. Άρα ο αριθμός των διαφορετικών υποσυνόλων του S είναι $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του επαγωγικού βήματος.

Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, έχουμε ότι κάθε μη κενό σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n διαφορετικά υποσύνολα. $\square$

Άσκηση 1.13. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στην τιμή του n, θα δείξουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 12$, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $\kappa_n, \lambda_n \geq 0$, τέτοιοι ώστε $n = 4\kappa_n + 5\lambda_n$ (δηλ. ότι ο n μπορεί να σχηματιστεί από κουπόνια αξίας 4 και 5 μονάδων).

Βάση της επαγωγής: Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = 12$, αφού $12 = 3 \cdot 4$ (άρα $\kappa_{12} = 3$ και $\lambda_{12} = 0$).

Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι το ζητούμενο αληθεύει για κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 12$, δηλ. υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $\kappa_n, \lambda_n \geq 0$ τέτοιοι ώστε $n = 4\kappa_n + 5\lambda_n$.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο ισχύει και για τον επόμενο φυσικό $n+1$, δηλ. ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $\kappa_{n+1}, \lambda_{n+1} \geq 0$ τέτοιοι ώστε $n+1 = 4\kappa_{n+1} + 5\lambda_{n+1}$.

Για να εκμεταλλευτούμε την επαγωγική υπόθεση, δοκιμάζουμε να αντικαταστήσουμε κάποια κουπόνια των 4 και των 5 μονάδων ώστε να προκύψει αύξησης της αξίας κατά 1 μονάδα. Παρατηρούμε ότι αύξηση της αξίας κατά 1 μονάδα προκύπτει αν αντικαταστήσουμε είτε ένα κουπόνι των 4 μονάδων με ένα κουπόνι των 5 μονάδων $(5 - 4 = 1)$ είτε τρία κουπόνια των 5 μονάδων με τέσσερα κουπόνια των 4 μονάδων $(4 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = 1)$. Έτσι διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με τον αριθμό των κουπονιών των 5 μονάδων που χρησιμοποιούμε για να εκφράσουμε τον αριθμό n (δηλ. ανάλογα με την τιμή του λ_n).

Αν για τον αριθμό n χρησιμοποιούμε τουλάχιστον ένα κουπόνι των 4 μονάδων (δηλ. αν $\kappa_n \geq 1$), τότε θέτουμε $\kappa_{n+1} = \kappa_n - 1 \geq 0$ και $\lambda_{n+1} = \lambda_n + 1$ (δηλ. αντικαθιστούμε ένα κουπόνι των 4 μονάδων με ένα κουπόνι των 5 μονάδων), και έχουμε:

$$\begin{aligned} 4\kappa_{n+1} + 5\lambda_{n+1} &= 4(\kappa_n - 1) + 5(\lambda_n + 1) \\ &= (\overbrace{4\kappa_n + 5\lambda_n}^{=n}) + (\overbrace{5 - 4}^{=1}) \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

Αν για τον αριθμό n δεν χρησιμοποιούμε κανένα κουπόνι των 4 μονάδων (δηλ. αν $\kappa_n = 0$), τότε επειδή $n \geq 12$, πρέπει να χρησιμοποιούμε τουλάχιστον τρία κουπόνια των 5 μονάδων (άρα $\lambda_n \geq 3$). Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε $\kappa_{n+1} = \kappa_n + 4$ και $\lambda_{n+1} = \lambda_n - 3 \geq 0$ (δηλ. αντικαθιστούμε τρία κουπόνια των 5 μονάδων με τέσσερα κουπόνια των 4 μονάδων), και έχουμε:

$$\begin{aligned} 4\kappa_{n+1} + 5\lambda_{n+1} &= 4(\kappa_n + 4) + 5(\lambda_n - 3) \\ &= (\overbrace{4\kappa_n + 5\lambda_n}^{=n}) + (\overbrace{4 \cdot 4 - 3 \cdot 5}^{=1}) \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη του επαγωγικού βήματος παρατηρώντας ότι, και στις δύο περιπτώσεις, η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την επαγωγική υπόθεση ότι για τον αριθμό n, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $\kappa_n, \lambda_n \geq 0$ τέτοιοι ώστε $n = 4\kappa_n + 5\lambda_n$.

Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, έχουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 12$ μπορεί να σχηματιστεί από κουπόνια αξίας 4 και 5 μονάδων.

Να σημειώσουμε ότι η υπόθεση $n \geq 12$ δεν μπορεί να ισχυροποιηθεί, αφού αν και οι αριθμοί 8, 9, και 10 μπορούν να σχηματιστούν από κουπόνια αξίας 4 και 5 μονάδων, ο αριθμός 11 δεν μπορεί. □

Άσκηση 1.14. Από τεχνική άποψη, το λάθος γίνεται φανερό εφαρμόζοντας τον συλλογισμό του επαγωγικού βήματος για $n = 0$. Ως επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι το 0 είναι άρτιος (κάτι δόκιμο, αφού έχει ήδη αποδειχθεί στη βάση της επαγωγής). Σύμφωνα με το συλλογισμό του επαγωγικού βήματος, το 1 είναι άθροισμα του 0, που είναι άρτιος λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, και του 1. Το λάθος είναι ότι το 1 **δεν** μπορεί να θεωρηθεί άρτιος, αφού κάτι τέτοιο *δεν προκύπτει από την επαγωγική υπόθεση* (το ζητούμενο σε αυτή την περίπτωση είναι να καταλήξουμε σε συμπέρασμα σχετικά με την αρτιότητα του 1).

Από ουσιαστική άποψη, το λάθος προκύπτει γιατί η βάση της επαγωγής δεν είναι επαρκής. Συγκεκριμένα, η βάση της επαγωγής καλύπτει μόνο την τιμή 0, ενώ λόγω του συλλογισμού που εφαρμόζεται στο επαγωγικό βήμα (και θεωρεί την αρτιότητα του 1 ως δεδομένο), η βάση της επαγωγής πρέπει να καλύπτει και την τιμή 1 (ώστε στην επαγωγική υπόθεση να έχουμε $n \geq 1$, και η επαγωγική υπόθεση να καλύπτει τις τιμές n και 1 που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη του επαγωγικού βήματος). Φυσικά αν είχαμε συμπεριλάβει την τιμή 1 στη βάση της επαγωγής, θα βλέπαμε ότι το 1 δεν είναι άρτιος, και ο επαγωγικός ο συλλογισμός θα κατέρρεε.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι όταν χρησιμοποιούμε ισχυρή επαγωγή, οφείλουμε ιδιαίτερη προσοχή στις τιμές που πρέπει να καλυφθούν από την βάση της επαγωγής. □

Ασκήσεις Κεφαλαίου 2

Άσκηση 2.1. Το σύνολο των πολλαπλάσιων του 3 (χωρίς το 0) μπορεί να οριστεί αναδρομικά ως εξής:

Βάση: Το 3 είναι πολλαπλάσιο του 3.

Βήμα: Αν τα x, y είναι πολλαπλάσια του 3, τότε το $x + y$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Το σύνολο των δυνάμεων του 2 μπορεί να οριστεί αναδρομικά ως εξής:

Βάση: Το 1 είναι δύναμη του 2.

Βήμα: Αν το x είναι δύναμη του 2, τότε το $2x$ είναι δύναμη του 2.

Η ακολουθία α_n των δυνάμεων του 2 μπορεί να οριστεί αναδρομικά ως εξής:

Βάση: $\alpha_0 = 1$ (αρχική τιμή).

Βήμα: Για κάθε $n \geq 1$, $\alpha_n = 2\alpha_{n-1}$ (αναδρομική εξίσωση).

Η κλάση των δυαδικών δέντρων που είναι πλήρη μπορεί να οριστεί αναδρομικά ως εξής:

Βάση: Μια απομονωμένη κορυφή είναι ένα πλήρες δυαδικό δέντρο με ρίζα την ίδια.

Βήμα: Έστω T_1, T_2 πλήρη δυαδικά δέντρα με ρίζα τις κορυφές r_1 και r_2 αντίστοιχα. Το γράφημα που προκύπτει θεωρώντας τα T_1 και T_2, και μια νέα κορυφή r που συνδέεται με ακμή με τις κορυφές r_1 και r_2 (και μόνο αυτές) είναι ένα πλήρες δυαδικό δέντρο με ρίζα την κορυφή r. □

Άσκηση 2.2. Θα χρησιμοποιήσουμε ισχυρή μαθηματική επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς (ουσιαστικά πρόκειται για επαγωγή στη δομή της ακολουθίας Fibonacci, αφού υπάρχει προφανής αντιστοιχία μεταξύ των φυσικών αριθμών και των αριθμών Fibonacci). Αρχικά θα αποδείξουμε το κάτω φράγμα $\frac{3}{5}\phi^{n-1} \leq F_n$.

Βάση της επαγωγής Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο ισχύει για τις αρχικές τιμές της ακολουθίας Fibonacci. Πράγματι, έχουμε $\frac{3}{5}\phi^0 = \frac{3}{5} \leq 1 = F_1$, και $\frac{3}{5}\phi \leq 0.97083 \leq 1 = F_2$.

Επαγωγική υπόθεση: Έστω αυθαίρετα επιλεγμένος φυσικός $n \geq 2$. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι το ζητούμενο αληθεύει τον n-οστό και τον $(n-1)$-οστό αριθμό Fibonacci, δηλ. ισχύει ότι $\frac{3}{5}\phi^{n-1} \leq F_n$ και $\frac{3}{5}\phi^{n-2} \leq F_{n-1}$.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο ισχύει και για τον $(n+1)$-οστό αριθμό Fibonacci, δηλ. θα δείξουμε ότι $\frac{3}{5}\phi^n \leq F_{n+1}$. Πράγματι:

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\ &\geq \tfrac{3}{5}\phi^{n-1} + \tfrac{3}{5}\phi^{n-2} \\ &= \tfrac{3}{5}\phi^{n-2}(\phi+1) \\ &= \tfrac{3}{5}\phi^n , \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από το βήμα του αναδρομικού ορισμού των αριθμών Fibonacci, η πρώτη ανισότητα (2η γραμμή) από την επαγωγική υπόθεση, και η τελευταία ισότητα από το γεγονός ότι η χρυσή τομή ϕ αποτελεί ρίζα της εξίσωσης $x^2 = x + 1$ (άρα $\phi^2 = \phi + 1$).

Ως συνέπεια της αρχής της ισχυρής μαθηματικής επαγωγής, έχουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, $\frac{3}{5}\phi^{n-1} \leq F_n$. Η απόδειξη του άνω φράγματος $F_n \leq \phi^n$ είναι αντίστοιχη.

Βάση της επαγωγής Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο ισχύει για τις αρχικές τιμές της ακολουθίας Fibonacci. Πράγματι, έχουμε $F_1 = 1 \leq 1 = \phi^0$, και $F_2 = 1 \leq 1.618 \leq \phi$.

Επαγωγική υπόθεση: Έστω αυθαίρετα επιλεγμένος φυσικός $n \geq 2$. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι το ζητούμενο αληθεύει τον n-οστό και τον $(n-1)$-οστό αριθμό Fibonacci, δηλ. ισχύει ότι $F_n \leq \phi^{n-1}$ και $F_{n-1} \leq \phi^{n-2}$.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο ισχύει και για τον $(n+1)$-οστό αριθμό Fibonacci, δηλ. θα δείξουμε ότι $F_{n+1} \leq \phi^n$. Πράγματι:

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\ &\leq \phi^{n-1} + \phi^{n-2} \\ &= \phi^{n-2}(\phi + 1) \\ &= \phi^n\,, \end{aligned}$$

όπου η επαγωγική υπόθεση χρησιμοποιείται για την ανισότητα στη 2η γραμμή.

Ως συνέπεια της αρχής της ισχυρής μαθηματικής επαγωγής, έχουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, $F_n \leq \phi^{n-1}$. □

Άσκηση 2.3. Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς[1]. Η αποδεικτέα πρόταση $P(n)$ δηλώνει ότι "$T_n \vdash \varphi_n$".
Βάση της επαγωγής: Για $n = 1$ έχουμε $T_1 = \{\varphi_0, \varphi_0 \to \varphi_1\}$. Η παρακάτω τυπική απόδειξη δείχνει ότι $T_1 \vdash \varphi_1$, δηλ. ότι η αποδεικτέα πρόταση ισχύει για $n = 1$.

1.	φ_0	υπόθεση
2.	$\varphi_0 \to \varphi_1$	υπόθεση
3.	φ_1	1, 2, MP

Επαγωγική υπόθεση: Για κάποιον αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $n \geq 1$, υποθέτουμε επαγωγικά ότι $T_n \vdash \varphi_n$.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι η αποδεικτέα πρόταση ισχύει και για $n + 1$, δηλ. ότι $T_{n+1} \vdash \varphi_{n+1}$. Αφού $T_n \subseteq T_{n+1}$ και το φ_n αποδεικνύεται τυπικά από τις υποθέσεις T_n (λόγω της επαγωγικής υπόθεσης), συμπεραίνουμε ότι $T_{n+1} \vdash \varphi_n$. Ξεκινώντας από αυτό το σημείο, η παρακάτω τυπική απόδειξη δείχνει ότι $T_{n+1} \vdash \varphi_{n+1}$.

1.	φ_n	$T_{n+1} \vdash \varphi_n$
2.	$\varphi_n \to \varphi_{n+1}$	υπόθεση
3.	φ_{n+1}	1, 2, MP

Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, για κάθε $n \geq 1$, $T_n \vdash \varphi_n$. □

Άσκηση 2.4. Ακολουθώντας το Παράδειγμα 2.12, χρησιμοποιούμε ισχυρή μαθηματική επαγωγή στο ύψος h του δέντρου (παρατηρείστε ότι ο συλλογισμός για την απόδειξη του επαγωγικού βήματος αφορά στη δομή των δυαδικών δέντρων που είναι πλήρη). Η αποδεικτέα πρόταση $P(h)$ δηλώνει ότι "κάθε δυαδικό δέντρο ύψους h έχει το πολύ $2^{h+1} - 1$ κόμβους".

[1] Η εξίσωση $T_n = \{\varphi_0, \varphi_0 \to \varphi_1, \varphi_1 \to \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1} \to \varphi_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, ορίζει μια ακολουθία συνόλων. Η ίδια ακολουθία μπορεί να οριστεί αναδρομικά από την εξίσωση $T_n = T_{n-1} \cup \{\varphi_{n-1} \to \varphi_n\}$, $n \geq 2$, με αρχική τιμή $T_1 = \{\varphi_0, \varphi_0 \to \varphi_1\}$. Υπάρχει λοιπόν αντιστοιχία μεταξύ των όρων της ακολουθίας συνόλων T_n και των φυσικών αριθμών. Έτσι ουσιαστικά πρόκειται για επαγωγή στη δομή της ακολουθίας T_n.

Βάση της επαγωγής: Το ζητούμενο αληθεύει για δυαδικά δέντρα ύψους 0 και 1. Πράγματι, το μοναδικό (δυαδικό) δέντρο ύψους 0 αποτελείται από μια μόνο κορυφή, και τα δυαδικά δέντρα ύψους 1 έχουν 2 ή 3 κόμβους.
Επαγωγική υπόθεση: Θεωρούμε έναν αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό αριθμό $h \geq 1$. Επαγωγικά υποθέτουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό k, $0 \leq k \leq h$, κάθε δυαδικό δέντρο ύψους k έχει το πολύ $2^{k+1} - 1$ κόμβους.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο αληθεύει και για δυαδικά δέντρα ύψους $h+1$, δηλ. θα δείξουμε ότι κάθε δυαδικό δέντρο ύψους $h+1$ έχει το πολύ $2^{h+2} - 1$ κόμβους.

Ένα δυαδικό δέντρο T αποτελείται από τη ρίζα r και δύο δυαδικά υποδέντρα T_1 και T_2 με ρίζες r_1 και r_2 αντίστοιχα, οι οποίες είναι (τα μοναδικά) παιδιά της r. Για να έχει το T ύψος $h+1$ πρέπει το ένα από τα υποδέντρα (έστω το T_1) να έχει ύψος h. Το άλλο υποδέντρο (έστω το T_2) είτε είναι κενό (αν η r έχει ένα μόνο παιδί), είτε υπάρχει και έχει ύψος μικρότερο ή ίσο του h. Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, τα T_1 και T_2 έχουν το πολύ $2^{h+1} - 1$ κόμβους (αν το T_2 έχει ύψος $k \leq h$, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, έχει το πολύ $2^{k+1} - 1 \leq 2^{h+1} - 1$ κόμβους). Επομένως ο αριθμός των κόμβων του T δεν ξεπερνά το:

$$\overbrace{(2^{h+1}-1)}^{\text{κόμβοι } T_1} + \overbrace{(2^{h+1}-1)}^{\text{κόμβοι } T_2} + 1 = 2^{h+2} - 1$$

Ως συνέπεια της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, κάθε δυαδικό δέντρο ύψους h έχει το πολύ $2^{h+1} - 1$ κόμβους. □

Άσκηση 2.5. Η απάντηση είναι όχι (άλλωστε κάτι τέτοιο δεν ισχύει, κανένα πλέγμα περιττής τάξης δεν έχει κύκλο Hamilton). Ο λόγος που δεν μπορούμε (και είναι λάθος) να καταλήξουμε σε αυτό το συμπέρασμα είναι ότι δεν έχουμε αποδείξει την βάση της επαγωγής (η οποία στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν ισχύει).

Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής (βλ. Πρόταση 1.1), για να αποδείξουμε επαγωγικά ότι κάθε πλέγμα G_n περιττής τάξης $n \geq 3$ έχει κύκλο Hamilton πρέπει να δείξουμε (α) ότι το G_3 έχει κύκλο Hamilton, και (β) ότι για κάθε περιττό $n \geq 3$, αν το G_n έχει κύκλο Hamilton, τότε και το G_{n+2} έχει κύκλο Hamilton. Εδώ το (β) ισχύει (έχει αποδειχθεί στο Παράδειγμα 2.16, όπως αναφέρεται στην εκφώνηση της άσκησης). Όμως δεν ισχύει το (α), αφού το G_3 δεν έχει κύκλο Hamilton. Αυτό δεν μας επιτρέπει να καταλήξουμε στο (**λανθασμένο**) συμπέρασμα ότι τα πλέγματα περιττής τάξης έχουν κύκλο Hamilton. □

Άσκηση 2.6. Η αποδεικτέα πρόταση δηλώνει ότι "ο συνολικός αριθμός πολλαπλασιασμών $M(n)$ που εκτελούνται από την κλήση pow(x, n) στα βήματα (3) και (5) δεν ξεπερνά το $2\log_2 n$", ή φορμαλιστικά ότι "$M(n) \leq 2\log_2 n$". Όπως και στο Παράδειγμα 2.17, η απόδειξη ακολουθεί την τυπική δομή της ισχυρής επαγωγής στους φυσικούς αριθμούς. Όμως ουσιαστικά χρησιμοποιεί επαγωγή στον τρόπο με τον οποίο ο αλγόριθμος pow υπολογίζει τη n-οστή δύναμη του x (βλ. επίσης τον αναδρομικό ορισμό του x^n στο Παράδειγμα 2.17). Έτσι η δομή της επαγωγικής απόδειξης είναι παρόμοια με αυτής της απόδειξης στο Παράδειγμα 2.17.

Βάση της επαγωγής: Το ζητούμενο ισχύει για $n = 1$, αφού η κλήση pow(x, 1) ολοκληρώνεται στο βήμα (1) χωρίς να εκτελέσει κανένα πολλαπλασιασμό. Άρα ο συνολικός αριθμός πολλαπλασιασμών $M(1)$ είναι ίσος με το $2\log_2 1 = 0$.
Επαγωγική υπόθεση: Έστω $n \geq 1$ ένας αυθαίρετα επιλεγμένος φυσικός αριθμός. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι για κάθε φυσικό αριθμό k, $1 \leq k \leq n$, ο συνολικός αριθμός πολλαπλασιασμών που εκτελούνται από την κλήση pow(x, k) είναι μικρότερος ή ίσος του $2\log_2 k$, δηλ. ότι $M(k) \leq 2\log_2 k$.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο αληθεύει και για τον υπολογισμό της $(n+1)$-οστής δύναμης του x από την κλήση pow($x, n+1$). Δηλαδή θα δείξουμε ότι η κλήση pow(x, $n+1$) εκτελεί το πολύ $2\log_2(n+1)$ πολλαπλασιασμούς.

Παρατηρούμε ότι η κλήση pow(x, $n+1$) εκτελεί το πολύ δύο πολλαπλασιασμούς επιπλέον (έναν στο βήμα (3) και έναν στο βήμα (5), μόνο όταν το $n+1$ είναι περιττός) των πολλαπλασιασμών που εκτελούνται από την αναδρομική κλήση pow(x, $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$) στο βήμα (2). Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης (που μπορεί να εφαρμοστεί, αφού το $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ είναι ένας φυσικός αριθμός μεταξύ του 1 και του n), ο αριθμός των πολλαπλασιασμών που εκτελούνται από την κλήση pow(x, $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$) είναι μικρότερος ή ίσος του:

$$2\log_2 \left\lfloor \tfrac{n+1}{2} \right\rfloor \leq 2\log_2 \tfrac{n+1}{2} = 2\log_2(n+1) - 2\,,$$

όπου η πρώτη ανισότητα προκύπτει από το $\lfloor (n+1)/2 \rfloor \leq (n+1)/2$, και η δεύτερη ανισότητα από την ιδιότητα των λογαρίθμων $\log(a/b) = \log a - \log b$ και από το γεγονός ότι $\log_2 2 = 1$.

Επομένως, ο συνολικός αριθμός πολλαπλασιασμών που εκτελούνται από την κλήση pow(x, $n+1$) είναι μικρότερος ή ίσος του:

$$2 + 2\log_2(n+1) - 2 = 2\log_2(n+1)$$

Άρα $M(n+1) \leq 2\log_2(n+1)$, με το οποίο ολοκληρώνεται η απόδειξη του επαγωγικού βήματος. Ως συνέπεια της αρχής της ισχυρής μαθηματικής επαγωγής, για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, η κλήση pow(x, n) εκτελεί το πολύ $2\log_2 n$ πολλαπλασιασμούς. $\square$