Διακριτές Μέθοδοι για την Επιστήμη των Υπολογιστών
3η σειρά φροντιστηριακών ασκήσεων
(εαρινό 2020)
Επιμέλεια Διαφανειών: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

Συνδυαστική

Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού, Κανόνας Γινομένου – Αθροίσματος, Διατάξεις, Συνδυασμοί

Στο Παγκόσμιο Κύπελλο ποδοσφαίρου συμμετέχουν 32 διαφορετικές χώρες. Θεωρούμε 3200 επιβάτες, 100 από κάθε χώρα, που ταξιδεύουν στη Βραζιλία για να παρακολουθήσουν τους αγώνες των εθνικών τους ομάδων. Οι επιβάτες πρόκειται να περάσουν από έλεγχο εισιτηρίων σε 10 αριθμημένα σημεία ελέγχου. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο έλεγχος εισιτηρίων, αν:

1. Κάθε σημείο ελέγχου εξυπηρετεί τουλάχιστον 100 επιβάτες και ενδιαφερόμαστε μόνο για το πόσοι επιβάτες εξυπηρετούνται από κάθε σημείο ελέγχου.

1. Τα σημεία ελέγχου είναι διακεκριμένα και οι επιβάτες είναι μη διακεκριμένοι. Δεδομένου ότι κάθε σημείο ελέγχου εξυπηρετεί τουλάχιστον 100 επιβάτες οι 1000 επιβάτες μοιράζονται με μοναδικό τρόπο στα 10 σημεία. Απομένουν 2200 επιβάτες να εξυπηρετηθούν στα 10 διακεκριμένα σημεία ελέγχου. Οι διαφορετικοί τρόποι να γίνει ο έλεγχος εισιτηρίων σε αυτή την περίπτωση είναι: $C(10+2200-1,2200)=C(2209,2200)=C(2209,9)$

Στο Παγκόσμιο Κύπελλο ποδοσφαίρου συμμετέχουν 32 διαφορετικές χώρες. Θεωρούμε 3200 επιβάτες, 100 από κάθε χώρα, που ταξιδεύουν στη Βραζιλία για να παρακολουθήσουν τους αγώνες των εθνικών τους ομάδων. Οι επιβάτες πρόκειται να περάσουν από έλεγχο εισιτηρίων σε 10 αριθμημένα σημεία ελέγχου. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο έλεγχος εισιτηρίων, αν:

2. Ισχύει ο περιορισμός του (1), αλλά τώρα όλοι οι επιβάτες θεωρούνται διακεκριμένοι και έχει σημασία τόσο η ανάθεση των επιβατών στα σημεία ελέγχου όσο και η σειρά με την οποία εξυπηρετούνται οι επιβάτες που διέρχονται από το ίδιο σημείο ελέγχου.

2. Ξεκινάμε με τους 1000 επιβάτες (100 για κάθε σημείο ελέγχου) που είναι πλέον διακεκριμένοι. Επιλέγουμε τους 1000 από τους 3200 με $C(3200,1000)$ τρόπους. Αυτοί μπορούν να μετατεθούν με $1000!$ τρόπους. Επομένως τοποθετούμε τους 1000 επιβάτες με $C(3200,1000)\cdot 1000!$ τρόπους. Οι υπόλοιποι 2200 διακεκριμένοι επιβάτες μοιράζονται στις 10 διακεκριμένες υποδοχές (σημεία ελέγχου) με τη σειρά στις υποδοχές να έχει σημασία με $\frac{(10+2200-1)!}{(10-1)!} = \frac{2209!}{9!}$ τρόπους. Συνολικά οι διαφορετικοί τρόποι είναι το γινόμενο $C(3200,1000).1000!.\frac{2209!}{9!} = \frac{3200!}{2200!}.\frac{2209!}{9!}$.

Στο Παγκόσμιο Κύπελλο ποδοσφαίρου συμμετέχουν 32 διαφορετικές χώρες. Θεωρούμε 3200 επιβάτες, 100 από κάθε χώρα, που ταξιδεύουν στη Βραζιλία για να παρακολουθήσουν τους αγώνες των εθνικών τους ομάδων. Οι επιβάτες πρόκειται να περάσουν από έλεγχο εισιτηρίων σε 10 αριθμημένα σημεία ελέγχου. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο έλεγχος εισιτηρίων, αν:

3. Οι επιβάτες κάθε χώρας χρησιμοποιούν το ίδιο σημείο ελέγχου και διέρχονται από αυτό με τη σειρά, ο ένας μετά τον άλλο, χωρίς να παρεμβάλλονται επιβάτες από άλλη χώρα, κάθε σημείο ελέγχου εξυπηρετεί τουλάχιστον μία χώρα και έχει σημασία η ανάθεση των χωρών στα σημεία ελέγχου και η σειρά με την οποία εξυπηρετούνται οι χώρες που διέρχονται από το ίδιο σημείο ελέγχου.

3. Παρόμοια με το προηγούμενο ερώτημα με τη διαφορά πως τώρα έχουμε χώρες. Επιλέγουμε τις 10 χώρες με $C(32,10)$ τρόπους. Αυτές μπορούν να μετατεθούν με $10!$ τρόπους. Επομένως τοποθετούμε τις 10 χώρες με $C(32,10)\cdot 10! = \frac{32!}{22!}$ τρόπους. Οι υπόλοιπες 22 χώρες είναι διακεκριμένα αντικείμενα σε διακεκριμένες υποδοχές με τη σειρά στις υποδοχές να έχει σημασία. Άρα $\frac{(10+22-1)!}{(10-1)!} = \frac{31!}{9!}$. Και συνολικά οι διαφορετικοί τρόποι είναι το γινόμενο $\frac{32!}{22!}\cdot\frac{31!}{9!}$.

Στο Παγκόσμιο Κύπελλο ποδοσφαίρου συμμετέχουν 32 διαφορετικές χώρες. Θεωρούμε 3200 επιβάτες, 100 από κάθε χώρα, που ταξιδεύουν στη Βραζιλία για να παρακολουθήσουν τους αγώνες των εθνικών τους ομάδων. Οι επιβάτες πρόκειται να περάσουν από έλεγχο εισιτηρίων σε 10 αριθμημένα σημεία ελέγχου. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο έλεγχος εισιτηρίων, αν:

4. Ισχύουν οι περιορισμοί του (3), αλλά τώρα όλοι οι επιβάτες θεωρούνται διακεκριμένοι και έχει σημασία τόσο η ανάθεση των επιβατών στα σημεία ελέγχου όσο και η σειρά με την οποία εξυπηρετούνται οι επιβάτες που διέρχονται από το ίδιο σημείο ελέγχου.

4. Αυτό που πρέπει να λάβουμε υπόψη εδώ είναι και οι μεταθέσεις των επιβατών κάθε χώρας. Έχουμε 100! για κάθε χώρα και 32 χώρες επομένως $(100!)^{32}$.

   Επομένως το γινόμενο μας δίνει $\frac{32!}{22!} \cdot \frac{31!}{9!} \cdot (100!)^{32}$.

Θεωρούμε μία πολυκατοικία με k (διακεκριμένους) ενοίκους που έχουν $2k$ διακεκριμένα αυτοκίνητα. Κάθε ένοικος έχει μία μοναδική στεγασμένη θέση πάρκινγκ. Η πολυκατοικία διαθέτει ακόμη έναν εξωτερικό χώρο όπου οι ένοικοι παρκάρουν τα αυτοκίνητά τους στη σειρά.
(α) Υποθέτουμε ότι κάθε ένοικος έχει 2 αυτοκίνητα, και ότι ο εξωτερικός χώρος επαρκεί για k αυτοκίνητα. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι να παρκάρουν οι ένοικοι τα αυτοκίνητά τους;

(α) Κάθε ένοικος μπορεί να επιλέξει με δύο τρόπους να παρκάρει τα αυτοκίνητά του. Το πρώτο στο εσωτερικό πάρκινγκ, το δεύτερο στο εξωτερικό και αντίστροφα. Άρα με 2^k τρόπους επιλέγονται τα αυτοκίνητα που θα παρκάρουν εξωτερικά.
Για κάθε τέτοιο τρόπο έχω $k!$ μεταθέσεις (δεδομένου ότι τα αυτοκίνητα είναι διακεκριμένα).
Επομένως έχω $2^k k!$ τρόπους να παρκάρουν οι ένοικοι τα αυτοκίνητά τους

(β) Υποθέτουμε ότι κάθε ένοικος έχει ένα αυτοκίνητο μήκους 1 και ένα αυτοκίνητο μήκους 2, ότι κάθε στεγασμένη θέση έχει μήκος 2, και ότι ο εξωτερικός χώρος επαρκεί για αυτοκίνητα συνολικού μήκους $\frac{3k-1}{2}$ (θεωρήστε ότι το k είναι περιττός). Πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι να παρκάρουν οι ένοικοι τα αυτοκίνητά τους; Να υπολογίσετε το αριθμητικό αποτέλεσμα για $k=2011$.

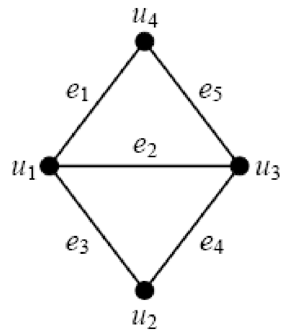
(β) Στον εξωτερικό χώρο πρέπει να παρκάρουν k αυτοκίνητα. Πόσα από αυτά θα έχουν μήκος 2; Το πολύ $\frac{3k-1}{2}-k=\frac{k-1}{2}$. Από 0 έως $\frac{k-1}{2}$ αυτοκίνητα μήκους 2 θα παρκάρουν στον εξωτερικό χώρο. Έστω j αυτοκίνητα μήκους 2 ($j=0,1,2,\ldots,\frac{k-1}{2}$) παρκάρουν στον εξωτερικό χώρο. Οι διαφορετικοί συνδυασμοί για την επιλογή των j από τα k είναι $C(k,j)$. Για κάθε τέτοια τιμή του j έχω $k!$ μεταθέσεις όλων των αυτοκνήτων στον εξωτερικό χώρο. Άρα όλοι οι τρόποι για να παρκάρουν j αυτοκίνητα μήκους 2 και $k-j$ μήκους 1 στον εξωτερικό χώρο είναι $C(k,j)k!$. Για όλες τις τιμές του j (γεγονότα αμοιβαία αποκλειόμενα) έχω:

$\sum_{j=0}^{j=\frac{k-1}{2}} C(k,j)k! = 2^{k-1}k!$ για την ισότητα ισχύει ότι

$\sum_{j=0}^{k} C(k,j) = 2^k$ και ότι $\sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} C(k,j) = \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} C(k,k-j) = 2^{k-1}$

Επομένως για $k=2011$ έχουμε $2^{2010}2011!$ τρόπους

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις διακεκριμένες κορυφές του γραφήματος με n χρώματα, ώστε τα άκρα κάθε ακμής να έχουν διαφορετικό χρώμα; (Να λυθεί χρησιμοποιώντας την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού)



Χαρακτηρίζουμε έγκυρο ένα χρωματισμό που τηρεί τον κανόνα (τα άκρα της ακμής να έχουν διαφορετικό χρώμα)

Όλοι οι τρόποι χρωματισμού χωρίς περιορισμούς με n χρώματα είναι n^4

Όλοι οι τρόποι χρωματισμού με 1 ακμή να έχει ίδιο χρώμα στα δύο άκρα $5n^3$

Όλοι οι τρόποι χρωματισμού με 2 ακμές να έχουν το ίδιο χρώμα στα δύο άκρα είναι $C(5,2)n^2 = 10n^2$

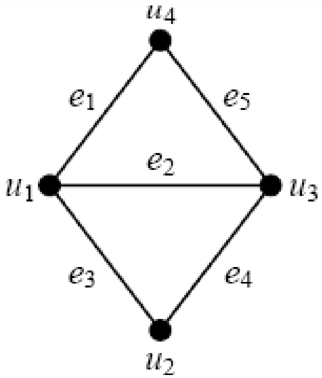
Όλοι οι τρόποι χρωματισμού με 3 ακμές να έχουν το ίδιο χρώμα στα δύο άκρα
Εδώ διακρίνουμε 2 περιπτώσεις οι 3 ακμές να δεσμεύουν 3 από τις 4 κορυφές και έχουμε $2n^2$ χρωματισμούς σε αυτή την περίπτωση.
Στην περίπτωση που έχουμε δεσμεύσει όλες τις κορυφές έχουμε $(C(5,3)-2)n = 8n$ τρόπους χρωματισμού

Όλοι οι τρόποι χρωματισμού με 4 ακμές να έχουν το ίδιο χρώμα στα δύο άκρα:
$C(5,4)n = 5n$

Όλοι οι τρόποι χρωματισμού με 5 ακμές να έχουν το ίδιο χρώμα στα δύο άκρα: n
Αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού:

$$n^4 - 5n^3 + 10n^2 - \left(2n^2 + 8n\right) + 5n - n = n^4 - 5n^3 + 8n^2 - 4n$$

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις διακεκριμένες κορυφές του γραφήματος με n χρώματα, ώστε τα άκρα κάθε ακμής να έχουν διαφορετικό χρώμα; (Να λυθεί χρησιμοποιώντας την αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού)



2^{ος} τρόπος λύσης

Οι έγκυροι χρωματισμοί είναι όταν χρησιμοποιούνται 3 ή 4 χρώματα.

Για τα 3 χρώματα έχουμε n επιλογές για τη μία κορυφή. Για κάθε τέτοια επιλογή έχουμε $n-1$ επιλογές για τη δεύτερη κορυφή και για κάθε μια από τις παραπάνω $n-2$ για την τρίτη κορυφή. Άρα $n(n-1)(n-2)$ διαφορετικοί χρωματισμοί με 3 χρώματα. Με τον ίδιο τρόπο έχουμε $n(n-1)(n-2)(n-3)$ επιλογές για τα 4 χρώματα.

Γεγονότα αμοιβαία αποκλειόμενα, επομένως

$$n(n-1)(n-2)+n(n-1)(n-2)(n-3)=n^3-3n^2+2n+n^4-6n^3+11n^2-6n=$$

$$=n^4-5n^3+8n^2-4n$$

Θεωρούμε 8 χωριά που βρίσκονται στις πλευρές ενός τετραγώνου. Θέλουμε να συνδέσουμε τα χωριά με δρόμους που συνδέουν ακριβώς 2 χωριά. Υποθέτουμε ότι οι δρόμοι είναι διπλής κατεύθυνσης, και ότι οι δρόμοι που διέρχονται από το ίδιο σημείο δεν διασταυρώνονται (π.χ. χρησιμοποιούμε ανισόπεδες διαβάσεις, όπου χρειάζεται).

1) Πόσοι διαφορετικοί δρόμοι υπάρχουν;

1) Κάθε δρόμος ενώνει 2 χωριά. Επομένως υπάρχουν $C(8,2)=28$ τέτοιοι δρόμοι.

2) Πόσοι είναι οι τρόποι να κατασκευάσουμε 4 διαφορετικούς δρόμους, χωρίς περιορισμούς.

2) Όσοι οι τρόποι να επιλέξουμε 4 από τους 28 δρόμους $C(28,4)=20475$.

Θεωρούμε 8 χωριά που βρίσκονται στις πλευρές ενός τετραγώνου. Θέλουμε να συνδέσουμε τα χωριά με δρόμους που συνδέουν ακριβώς 2 χωριά. Υποθέτουμε ότι οι δρόμοι είναι διπλής κατεύθυνσης, και ότι οι δρόμοι που διέρχονται από το ίδιο σημείο δεν διασταυρώνονται (π.χ. χρησιμοποιούμε ανισόπεδες διαβάσεις, όπου χρειάζεται).

3) Πόσοι είναι οι τρόποι να κατασκευάσουμε 4 δρόμους, αν κάθε χωριό πρέπει να έχει δρόμο;

3) Επιλέγουμε τον πρώτο δρόμο με $C(8,2)=28$ τρόπους, τον δεύτερο με $C(6,2)=15$ τρόπους. Τον τρίτο με $C(4,2)=6$ τρόπους Και επειδή οι δρόμοι δεν είναι διακεκριμένοι (πρώτος, δεύτερος κ.λπ.) διαιρούμε με $4!$

$$\frac{1}{4!}C(8,2)C(6,2)C(4,2)=\frac{8!6!4!}{4!6!4!2!2^3}=105$$

Θεωρούμε 8 χωριά που βρίσκονται στις πλευρές ενός τετραγώνου. Θέλουμε να συνδέσουμε τα χωριά με δρόμους που συνδέουν ακριβώς 2 χωριά. Υποθέτουμε ότι οι δρόμοι είναι διπλής κατεύθυνσης, και ότι οι δρόμοι που διέρχονται από το ίδιο σημείο δεν διασταυρώνονται (π.χ. χρησιμοποιούμε ανισόπεδες διαβάσεις, όπου χρειάζεται).

4) Θεωρούμε μία τετράδα δρόμων του (3). Πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι να κατασκευάσουμε άλλους 4 δρόμους, ώστε οι 8 δρόμοι να σχηματίζουν κύκλο που διέρχεται από όλα τα χωριά;

4) Έστω τετράδα δρόμων {Α,Β},{Γ,Δ},{Ε,Ζ},{Η,Θ}. Για να φτιάξουμε κύκλο έχουμε 6 δυνατότητες να συνδεθεί το Α με κάποιο από τα Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ, 4 τρόπους να επιλέξουμε δεύτερο γειτονικό χωριό του Β (αν το Α συνδέθηκε για παράδειγμα με το Θ δεν μπορούμε να συνδέσουμε το Β και το Η γιατί θα είχαμε 2 κύκλους) , δύο τρόπους να συνδέσουμε το επόμενο ζευγάρι χωριών και έναν τρόπο για το τελευταίο. Άρα $6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 48$ τρόπους συνολικά.

Θεωρούμε 8 χωριά που βρίσκονται στις πλευρές ενός τετραγώνου. Θέλουμε να συνδέσουμε τα χωριά με δρόμους που συνδέουν ακριβώς 2 χωριά. Υποθέτουμε ότι οι δρόμοι είναι διπλής κατεύθυνσης, και ότι οι δρόμοι που διέρχονται από το ίδιο σημείο δεν διασταυρώνονται (π.χ. χρησιμοποιούμε ανισόπεδες διαβάσεις, όπου χρειάζεται).

5) Πόσοι είναι συνολικά οι τρόποι να κατασκευάσουμε 8 δρόμους ώστε αυτοί να σχηματίζουν κύκλο που διέρχεται από όλα τα χωριά; Συγκρίνετε την απάντησή σας στα (3) και (4). Τι παρατηρείται και γιατί;

5) Οι διαφορετικοί τρόποι να σχηματιστεί κύκλος είναι όλες οι πιθανές κυκλικές μεταθέσεις των 8 χωριών $(n-1)! = 7!$. Και επειδή δεν υπάρχει διάκριση σε δεξιά και αριστερά (ο δρόμος {Α,Β} είναι ίδιος με τον {Β,Α}) διαιρούμε με το 2. Άρα έχουμε $\frac{7!}{2}$ τρόπους. Το αποτέλεσμα που προκύπτει εδώ είναι το ήμισυ του γινομένου των αποτελεσμάτων των ερωτημάτων 3 και 4. Ο λόγος είναι πως ο κύκλος Α-Β-Γ-Δ-Ε-Ζ-Η-Θ προκύπτει από δύο διαφορετικά ζευγαρώματα του (3) το Α-Β, Γ-Δ, Ε-Ζ, Η-Θ και Θ-Α,Β-Γ,Δ-Ε,Ζ-Η.

Έχουμε n θέσεις στις οποίες θα καθήσουν $k+m$ καλεσμένοι, k (διακεκριμένοι) άνδρες και m (διακεκριμένες) γυναίκες, $n \geq \max\{k+m, 2k\}$. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθήσουν οι καλεσμένοι αν δεν μπορούν να κάθονται άνδρες σε διπλανές θέσεις (δηλαδή ανάμεσα σε δύο άντρες πρέπει να μεσολαβεί τουλάχιστον μία θέση που είτε είναι κενή είτε καταλαμβάνεται από γυναίκα) αν (α) οι καλεσμένοι κάθονται σε μία σειρά

Κάθε άνδρας και κάθε γυναίκα παίρνουν με μοναδικό τρόπο από μία καρέκλα. Οι καρέκλες που θα μείνουν κενές είναι $n-k-m$. Όλες οι μεταθέσεις m γυναικών και $n-k-m$ κενών είναι $(n-k)!$ Αλλά τα κενά δεν είναι διακεκριμένα άρα διαιρούμε με τις μεταθέσεις των κενών που είναι $(n-k-m)!$ και παίρνουμε

$$\frac{(n-k)!}{(n-k-m)!}.$$

Για κάθε τέτοια μετάθεση υπάρχουν $(n-k+1)$ θέσεις για να καθήσουν οι k άνδρες. Σε κάθεμια από αυτές μπορεί να καθήσει το πολύ ένας άνδρας. Επομένως εξασφαλίζεται ότι οι άνδρες δεν κάθονται σε διπλανές θέσεις. Το πλήθος των διαφορετικών διατάξεων των ανδρών σε θέσεις είναι

$$k!C(n-k+1,k) = k!\frac{(n-k+1)!}{k!(n-k+1-k)!} = \frac{(n-k+1)!}{(n-2k+1)!}$$

Συνολικά οι διαφορετικοί τρόποι είναι $\dfrac{(n-k)!}{(n-k-m)!}\dfrac{(n-k+1)!}{(n-2k+1)!}$

(β) οι καλεσμένοι κάθονται σε ένα κυκλικό τραπέζι: Να θεωρηθούν ως διαφορετικά τα ενδεχόμενα ο A να κάθεται δεξιά του B και ο A να κάθεται αριστερά του B.

Οι διαφορές που έχουμε στις κυκλικές μεταθέσεις είναι:
Επιλέγουμε μία τυχαία θέση στον κύκλο (όχι την πρώτη όπως ήταν στη γραμμή) και βάζουμε μία γυναίκα ή μία κενή θέση. Οι μεταθέσεις των κενών – γυναικών είναι $\frac{(n-k-1)!}{(n-k-m)!}$. Όσον αφορά τους άνδρες οι πιθανές θέσεις έχουν μειωθεί κατά μία και επομένως είναι $\frac{(n-k)!}{(n-2k)!}$. Και συνολικά οι διαφορετικοί τρόποι είναι

$$\frac{(n-k-1)!}{(n-k-m)!}\frac{(n-k)!}{(n-2k)!}.$$

Προμηθεύεστε αναψυκτικά για το πάρτυ σας, και έχετε να διαλέξετε ανάμεσα σε 6 είδη. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι να αγοράσετε 32 συσκευασίες αναψυκτικών, αν θέλετε να αγοράσετε τουλάχιστον 1 και το πολύ 8 συσκευασίες από κάθε είδος; Να υπολογίσετε το ζητούμενο (i) με συνδυαστικά επιχειρήματα, και (ii) με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων.

(i) Συνδυαστικά θα λύσουμε το πρόβλημα με την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού. Με ένα τρόπο δεσμεύουμε 1 συσκευασία από κάθε είδος και θέλουμε τώρα να επιλέξουμε τα υπόλοιπα 26 (32-6) αναψυκτικά από τα 6 είδη χωρίς να ξεπεράσουμε τα 7 (8-1) από κάθε είδος. Ουσιαστικά θέλουμε να βρούμε όλες τις λύσεις της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 26$ με $0 \le x_i \le 7$

Αν δεν υπήρχε ο περιορισμός θα είχαμε $C(6+26-1,26) = C(31,5) = 169911$.

Έστω μία από τις υποδοχές (6 είδη αναψυκτικών) έχει 8 αντικείμενα (συσκευασίες αναψυκτικών). Τότε οι τρόποι να διανεμηθούν τα υπόλοιπα αντικείμενα ($26-8=18$) στις υποδοχές είναι $C((6+18-1),18) = C(23,5) = 33649$. Αυτό μπορεί να συμβεί με 6 τρόπους.

Έστω δύο από τις υποδοχές έχουν 8 αντικείμενα και πάνω. Τότε οι τρόποι να διανεμηθούν τα υπόλοιπα αντικείμενα (το πλήθος τους είναι 10) στις 6 υποδοχές είναι $C(6+10-1,10)=C(15,5)=3003$. Αυτό μπορεί να συμβεί με $C(6,2)=15$ τρόπους.

Για τρεις υποδοχές με 8 αντικείμενα και πάνω έχουμε 2 αντικείμενα σε 6 υποδοχές. Άρα $C(6+2-1,2)=C(7,5)=21$. Και οι τρόποι για να συμβεί αυτό είναι $C(6,3)=20$

Για τέσσερεις υποδοχές με 8 αντικείμενα και πάνω δεν γίνεται γιατί ξεπερνούμε τον αριθμό των διαθέσιμων συσκευασιών. Επομένως με αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού $C(31,5)-6C(23,5)+15C(15,5)-20C(7,5)=12642$.