Διακριτές Μέθοδοι για την Επιστήμη των Υπολογιστών

1η σειρά φροντιστηριακών ασκήσεων

(εαρινό 2019)

Επιμέλεια Διαφανειών: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

Σύνολα - Διμελείς Σχέσεις - Λογική

αριθμήσιμα - μη αριθμήσιμα σύνολα, διαγωνιοποίηση,

σχέσεις, κλειστότητες, σχέσεις ισοδυναμίας, σχέσεις μερικής διάταξης,

προτασιακή - κατηγορηματική λογική

Έστω $A = \{a_1, ..., a_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο n στοιχείων. Συμβολίζουμε με $A^k, k \in N^*$, το σύνολο όλων των ακολουθιών από στοιχεία του A με μήκος k (π.χ. για $n = 2$, $A^2 = \{a_1a_1, a_1a_2, a_2a_1, a_2a_2\}$ και $A^3 = \{a_1a_1a_1, a_1a_1a_2, a_1a_2a_1, a_1a_2a_2, a_2a_1a_1, a_2a_1a_2, a_2a_2a_1, a_2a_2a_2\}$).
Συμβολίζουμε με A^* το σύνολο όλων των ακολουθιών από τα στοιχεία του A με πεπερασμένο μήκος (δηλαδή έχουμε ότι $A^* = \bigcup_{k \in N^*} A^k$). Να εξετάσετε αν το σύνολο A^* είναι αριθμήσιμο.

Ας υποθέσουμε πως $n = l$ όπου l πεπερασμένος φυσικός αριθμός.
$A = \{a_1, a_2, ... a_l\}$. Σχηματίζουμε τα A^k

$A^1 = \{a_1, a_2, ..., a_l\}$ το πλήθος των στοιχείων του είναι $|A^1| = l$

$A^2 = \{a_1a_1, a_1a_2, ..., a_la_l\}$ το πλήθος των στοιχείων του είναι $|A^2| = l * l = l^2$

$A^3 = \{a_1a_1a_1, a_1a_1a_2, ..., a_la_la_l\}$ το πλήθος των στοιχείων του είναι $|A^3| = l * l * l = l^3$

...

$A^k = \left\{ \overbrace{a_1a_1...a_1}^{k}, ..., \overbrace{a_la_l...a_l}^{k} \right\}$ το πλήθος των στοιχείων του είναι $|A^k| = l^k$

Εφόσσον το k είναι πεπερασμένο γνωρίζουμε σε ποιό βήμα θα μετρηθεί κάθε συμβολοσειρά.
Αριθμήσιμα άπειρη ένωση πεπερασμένων στοιχείων.

Έστω S το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του N. Είναι το S αριθμήσιμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Για κάθε $k \in N$, θεωρούμε το σύνολο των υποσυνόλων του N με k στοιχεία $S_k = \{X \subseteq N : |X| = k\}$. Το S_k είναι αριθμήσιμο για κάθε τιμή του k.

Ισχύει πως $S = \bigcup_{k \in N} S_k$. Άρα το S είναι αριθμήσιμο ως ένωση αριθμήσιμα άπειρης συλλογής αριθμήσιμων συνόλων.

Έστω $\Sigma = \{0, 1\}$ (ή οποιοδήποτε άλλο αλφάβητο), και έστω Σ^* το σύνολο όλων των συμβολοσειρών στο Σ. Να δειχθεί ότι το Σ^* είναι αριθμήσιμο και ότι το 2^{Σ^*} δεν είναι αριθμήσιμο.

Σ^* αριθμήσιμο:
Ξεκινάμε την αρίθμηση με τις συμβολοσειρές μήκους 1. Είναι οι συμβολοσειρές: 0 και 1. Συμβολοσειρές μήκους 2 είναι: 00,01,10,11. Συνεχίζω με τις συμβολοσειρές μήκους 3: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Με τον ίδιο τρόπο μπορώ να αριθμήσω όλες τις συμβολοσειρές και έτσι το Σ^* είναι αριθμήσιμο. Η αρίθμηση ακολουθεί την λεξικογραφική διάταξη.
$P(\Sigma^*)$ μη αριθμήσιμο:
Με διαγωνιοποίηση. Στις στήλες έχω όλες τις συμβολοσειρές και στις γραμμές όλα τα σύνολα (στοιχεία του δυναμοσυνόλου). Η αρίθμηση ακολουθεί την λεξικογραφική διάταξη.

	00	01	10	11	000	001	010	101	…
S_0	√		√			√		√	
S_1		√					√		
S_2	√								
S_3				√					
S_4	√				√				
…									

Να δειχθεί ότι το διάστημα (0,1) είναι μη αριθμήσιμο.

Έστω a_0,a_1, a_2, ... οι αριθμοί στο διάστημα 0 – 1. Στις στήλες αποθηκεύω τα ψηφία των δεκαδικών αριθμών. Για παράδειγμα a_0=0,011 a_1=0,32107 κ.λπ.
Πάντα μπορώ να φτιάξω κάποιο αριθμό που διαφέρει σε ένα ψηφίο από τους προηγούμενους.

	1	2	3	4	5	6	7	8	…
a_0	0	1	1						
a_1	3	2	1	0	7				
a_2									
a_3									
a_4									
…									

Να χρησιμοποιήσετε κανόνες συνεπαγωγής προκειμένου να αποδείξετε πως αν οι προτάσεις:

1. $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
2. $\forall x(\neg Q(x) \vee S(x))$
3. $\forall x(R(x) \rightarrow \neg S(x))$
4. $\exists x(\neg P(x))$ είναι αληθείς τότε η πρόταση

$\exists x(\neg R(x))$ είναι αληθής

Ξεκινάμε από την 4. Υπάρχει στοιχείο a που δεν έχει την P. Το στοιχείο αυτό έχει την Q και την S λόγω των 1 και 2. Λόγω της 3 και δεδομένου του ότι έχει την S δεν μπορεί να έχει την R.

(α) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει ένα κατηγορηματικό σύμβολο *P*. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά, μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Συγκεκριμένα, οι μεταβλητές ερμηνεύονται ως κορυφές των γραφημάτων και το σύμβολο *P* ως η διμελής σχέση που περιλαμβάνει όλα τα ζευγάρια κορυφών (*a*, *b*) τα οποία είναι γειτονικά.

Να γράψετε προτάσεις της κατηγορηματικής λογικής που (στη συγκεκριμένη ερμηνεία) εκφράζουν ότι:

i) Κάθε μη μεμονωμένη κορυφή έχει τουλάχιστον δύο γείτονες.

ii) Κάθε κορυφή με βαθμό τουλάχιστον δύο περιέχεται σε μία κλίκα 3 κορυφών.

iii) Υπάρχει συνεκτική συνιστώσα με δύο ακριβώς κορυφές.

(β) Δίνονται οι προτάσεις φ και ψ:

$$\varphi \equiv \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \rightarrow \neg \forall x(P(x) \wedge Q(x))$$

$$\psi \equiv \exists x \forall y((R(x,y) \wedge \neg R(y,x)) \rightarrow (R(x,x) \leftrightarrow R(y,y))),$$

όπου τα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα και το $R(x,y)$ είναι διμελές κατηγορηματικό σύμβολο. Να εξετάσετε τις προτάσεις φ και ψ ως προς τη λογική τους εγκυρότητα. Να αιτιολογήσετε κατάλληλα τους ισχυρισμούς σας.

$$\forall x(\exists y P(x,y) \rightarrow \exists y \exists z((y \neq z) \wedge P(x,y) \wedge P(x,z)))$$

$$\forall x(\exists y \exists z((y \neq z) \wedge P(x,y) \wedge P(x,z)) \rightarrow \exists y \exists z(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge P(y,z)))$$

$$\exists x \exists y(P(x,y) \wedge \forall z(((z \neq x) \wedge (z \neq y)) \rightarrow (\neg P(x,z) \wedge \neg P(y,z))))$$

Η φ είναι λογικά έγκυρη και λέει ότι αν υπάρχει στοιχείο που έχει την ιδιότητα P και δεν έχει την Q τότε δεν ισχύει πως κάθε στοιχείο του σύμπαντος που έχει την P έχει και την Q.

Η ψ δεν είναι λογικά έγκυρη. π.χ. δεν αληθεύει για $\mathrm{R} = \{(\mathrm{a},\mathrm{a}), (\mathrm{a},\mathrm{b}), (\mathrm{b},\mathrm{c}), (\mathrm{c},\mathrm{c}), (\mathrm{c},\mathrm{d}), (\mathrm{d},\mathrm{a})\}$ και σε αντίστοιχες δομές όπου έχω άπειρη διαδοχή από στοιχείο με ανακύκλωση και εξερχόμενη ακμή σε στοιχείο χωρίς ανακύκλωση που δέχεται την ακμή και έχει εξερχόμενη ακμή προς άλλο με ανακύκλωση.

Το πρώτο μέρος της συνεπαγωγής δεν είναι πάντα ψευδές, γιατί ο ποσοδείκτης εφαρμόζεται σε όλη τη συνεπαγωγή. Η πρόταση λέει ότι υπάρχει ένα στοιχείο x, τέτοιο ώστε για κάθε στοιχείο y, προς το οποίο υπάρχει ακμή από το x αλλά δεν υπάρχει ακμή από το y προς το x, τότε αν (το x) σχετίζεται με τον εαυτό του το ίδιο ισχύει και για το y και αντίστροφα. Στις παραπάνω περιπτώσεις αυτό δεν συμβαίνει. Τα στοιχεία που **έχουν ανακύκλωση**, όπως το a για παράδειγμα, έχει ακμή προς το b και όχι αντίστροφα (το a δηλαδή επαληθεύει την υπόθεση της συνεπαγωγής με το b) και επιπλέον έχει ανακύκλωση αλλά το b δεν έχει. Τα στοιχεία που **δεν έχουν ανακύκλωση** όπως το b για παράδειγμα έχει ακμή προς το c και όχι αντίστροφα (το b δηλαδή επαληθεύει την υπόθεση της συνεπαγωγής με το c) και δεν έχει ανακύκλωση αλλά το c έχει. Επομένως δεν υπάρχει στοχείο στο σύμπαν που να επαληθεύει την ψ.

Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P.

(α) Θεωρούμε την πρόταση:

$$\varphi \equiv \neg\exists x P(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)) \wedge \forall x \exists y P(x,y).$$

(i) Να ερμηνεύσετε το P στο σύνολο N των φυσικών αριθμών ώστε να ικανοποιείται η φ.

Αν στο σύμπαν των φυσικών αριθμών η σχέση P είναι τη σχέση μικρότερο (<) τότε δεν θα χρειαστεί να έχω ανακύκλωση διότι για κάθε στοιχείο του σύμπαντος υπάρχει πάντα κάποιο μεγαλύτερο.

(ii) Να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία που ικανοποιεί την φ έχει άπειρο σύμπαν.

Η πρόταση αληθεύει σε κάποια ερμηνεία στην οποία ισχύει η μεταβατική ιδιότητα και κανένα στοιχείο δεν σχετίζεται με τον εαυτό του και όλα τα στοιχεία σχετίζονται με ("δείχνουν" σε) κάποιο άλλο. Αν όμως κάθε στοιχείο σχετίζεται με κάποιο άλλο και το σύμπαν είναι πεπερασμένο κάποια στιγμή υποχρεωτικά θα έχω κύκλο και λόγω μεταβατικής ιδιότητας θα έχω ανακύκλωση σε κάποιο στοιχείο το οποίο δεν επιτρέπεται διότι κανένα στοιχείο δεν σχετίζεται με τον εαυτό του.

(β) Να διερευνήσετε αν η παρακάτω πρόταση είναι λογικά έγκυρη

$$\psi_1 \equiv \forall x \exists y \left[P(x, y) \wedge \left(P(x, y) \wedge P(y, x) \to x = y \right) \right] \to \exists x \forall y P(x, y)$$

Δεν είναι λογικά έγκυρη π.χ. έστω ερμηνεία με σύμπαν $S = \{x_1, x_2\}$ και οι συσχετίσεις $P(x_1, x_1)$, $P(x_2, x_2)$. Σε αυτή την ερμηνεία η ψ_1 δεν είναι αληθής διότι δεν υπάρχει στοιχείο που να σχετίζεται με όλα τα άλλα αν και η υπόθεση είναι αληθής.

Έστω τύπος $\psi(x)$ με μία ελεύθερη μεταβλητή x, και φ πρόταση. Να δείξετε ότι η παρακάτω πρόταση είναι λογικά έγκυρη:

$$(\exists x \psi(x) \to \varphi) \leftrightarrow \forall x(\psi(x) \to \varphi)$$

Αρκεί να αποδειχθεί πως για αυθαίρετη ερμηνεία το $(1) \to (2)$ και $(2) \to (1)$

Για την πρώτη συνεπαγωγή:

Αν υπάρχει στοιχείο του σύμπαντος που ικανοποιεί το $\psi(x)$ τότε ο φ είναι αληθής.

Επομένως αν το $\psi(x)$ είναι αληθές για κάθε στοιχείο του σύμπαντος τότε φ αληθής.

Αν δεν ισχύει η συνεπαγωγή είναι αληθής ανεξάρτητα από το αν το συμπέρασμα είναι αληθές ή ψευδές.

Για την αντίστροφη συνεπαγωγή:

Για κάθε στοιχείο του σύμπαντος που ικανοποιείται το $\psi(x)$ το φ είναι αληθής.

Άρα αν υπάρχει στοιχείο του σύμπαντος που ικανοποιεί το $\psi(x)$ το φ είναι αληθής.

Αν δεν υπάρχει η συνεπαγωγή είναι αληθής ανεξάρτητα από την αποτίμηση του συμπεράσματος.

Δίνονται οι προτάσεις:

1. $\psi_1 \equiv \forall x \forall y \forall z \big(P(x, y) \wedge P(y, z) \to P(x, z)\big)$
2. $\psi_2 \equiv \forall x \forall y \big(P(x, y) \wedge P(y, x) \to x = y\big)$
3. $\psi_3 \equiv \forall x \exists y P(x, y) \to \exists y \forall x P(x, y)$

Να διερευνήσετε κατά πόσον

(i) οι ψ_1 και ψ_2 συνεπάγονται λογικά την ψ_3 (δηλ. αν $\{\psi_1, \psi_2\} \models \psi_3$),

(ii) οι ψ_2 και ψ_3 συνεπάγονται λογικά την ψ_1 (δηλ. αν $\{\psi_2, \psi_3\} \models \psi_1$), και

(iii) οι ψ_1 και ψ_3 συνεπάγονται λογικά την ψ_2 (δηλ. αν $\{\psi_1, \psi_3\} \models \psi_2$).

1. Έστω σύμπαν με στοιχεία a, x, y, z και σχέσεις

   $P(a, a), P(x, y), P(y, z), P(x, z), P(z, z)$

Ισχύουν οι ψ_1, ψ_2 αλλά όχι η ψ_3.

2. Έστω σύμπαν με στοιχεία a, b, c και σχέσεις $P(a, b), P(b, c)$

Ισχύουν οι ψ_2, ψ_3 αλλά όχι η ψ_1.

3. Έστω σύμπαν με στοιχεία d, e και σχέσεις $P(d, e), P(e, d), P(d, d), P(e, e)$

Ισχύουν οι ψ_1, ψ_3 αλλά όχι η ψ_2.

Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P.
Έστω η πρόταση :

$$\varphi \equiv \forall x \forall y (P(x,y) \wedge P(y,x) \rightarrow x = y) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)) \wedge$$
$$\forall x \exists y (x \neq y \wedge P(x,y))$$

Να δώσετε μία ερμηνεία στην οποία αληθεύει η φ.

Να δείξετε οτι η φ δεν αληθεύει σε οποιαδήποτε ερμηνεία με πεπερασμένο σύμπαν.

A)Αναζητούμε διαδρομή που δεν τελειώνει ποτέ. Ουσιαστικά είναι μια άπειρη διαδρομή σε κατευθυνόμενο γράφημα. Αυτό μπορεί να αληθεύει μόνο σε άπειρο σύμπαν.

B)Όταν το σύμπαν είναι πεπερασμένο για να υπάρχει συσχέτιση κάθε στοιχείου με κάποιο διαφορετικό στοιχείο θα πρέπει να υπάρχει κύκλος. Με αυτό τον τρόπο όμως παύει να ισχύει η αντισυμμετρικότητα.

Δύο φίλοι ο Α και ο Β έχουν μόλις γνωρίσει την Γ και προσπαθούν να μάθουν την ημερομηνία των γενεθλίων της. Η Γ τους δίνει 10 πιθανές ημερομηνίες.

	14	15	16	17	18	19
Μάϊος		√	√			√
Ιούνιος				√	√	
Ιούλιος	√		√			
Αύγουστος	√	√		√		

Η Γ λέει ξεχωριστά στον Α τον μήνα και στον Β την ημερομηνία.
Οι Α και Β κάνουν τις παρακάτω δηλώσεις:
Α: Δεν ξέρω πότε είναι τα γενέθλια της Γ αλλά ξέρω πως ο Β επίσης δεν το γνωρίζει.
Β: Αρχικά δεν γνώριζα πότε ήταν τα γενέθλια της Γ αλλά τώρα γνωρίζω.
Α: Τώρα και εγώ γνωρίζω.

Πότε είναι τα γενέθλια της Γ;

Ο Α δηλώνει με βεβαιότητα πως ο Β δεν γνωρίζει άρα αποκλείονται οι μήνες Μάϊος και Ιούνιος. Διότι διαφορετικά πως θα ήταν βέβαιος πως ο Β δεν θα είχε ως ημερομηνία το 18 ή το 19, οπότε θα μπορούσε να αποφανθεί για τα γενέθλια.
Μετά από αυτή τη δήλωση ο Β δηλώνει πως γνωρίζει άρα η ημερομηνία που έχει δεν είναι το 14.
Στη συνέχεια ο Α δηλώνει πως γνωρίζει άρα αποκλείεται να είναι ο μήνας Αύγουστος.
Απομένει η $16^{η}$ Ιουλίου η οποία είναι και η ημέρα των γενεθλίων της Γ.

Τυπικές αποδείξεις

$\{\varphi \to (\chi \to \psi), \varphi \to \chi\} \vdash \varphi \to \psi$

ΑΣ1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
ΑΣ2 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
ΑΣ3 $(\neg \varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$

Υπόθεση (1) $\varphi \to (\chi \to \psi)$
Υπόθεση (2) $\varphi \to \chi$
Από ΑΣ2 αν βάλω όπου χ το ψ και όπου ψ το χ παίρνω
(3) $(\varphi \to (\chi \to \psi)) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi))$
(1), (3) και MP παίρνω (4) $((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi))$
Από (2), (4) και MP παίρνω $\varphi \to \psi$

Να δείξετε ότι για κάθε διμελή σχέση R σε ένα σύνολο A, η μεταβατική κλειστότητα της συμμετρικής κλειστότητας της ανακλαστικής κλειστότητας της R είναι μία σχέση ισοδυναμίας. Αληθεύει ότι για κάθε διμελή σχέση R, η συμμετρική κλειστότητα της μεταβατικής κλειστότητας της ανακλαστικής κλειστότητας της R είναι σχέση ισοδυναμίας;

Μια σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας αν είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.
Έστω R τυχαία σχέση σε σύνολο S, R_α η ανακλαστική κλειστότητα της R, R_σ η συμμετρική κλειστότητα της R_α και R_μ η μεταβατική κλειστότητα της R_σ. Θέλουμε να δείξουμε πως η R_μ είναι σχέση ισοδυναμίας.
Μεταβατική είναι εφόσσον πρόκειται για σχέση μεταβατικής κλειστότητας μιας σχέσης.
Ανακλαστική είναι γιατί όλα τα στοιχεία είχαν ανακύκλωση λόγω ανακλαστικής κλειστότητας και δεν προστέθηκαν νέα στοιχεία.
Συμμετρική είναι γιατί είχα συμμετρική κλειστότητα και στη συνέχεια για να φτιάξω τη σχέση μεταβατικής κλειστότητας προσέθεσα $\forall (a,a_1),(a_1,a_2)...(a_n,b) \in R_\sigma$ το (a,b) αλλά το (b,a) θα υπάρχει επίσης στην R_μ δεδομένου ότι θα υπάρχουν και όλα τα $(a_1,a),(a_2,a_1)...(b,a_n)$ στην R_σ και κατά συνέπεια και το (b,a) θα υπάρχει στην R_μ.
Επομένως η R_μ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Η συμμετρική κλειστότητα της μεταβατικής κλειστότητας της ανακλαστικής κλειστότητας μιας σχέσης R δεν είναι πάντα σχέση ισοδυναμίας. Για παράδειγμα έστω η σχέση $\mathrm{R} = \{(a, b), (c, b)\}$ στο σύνολο $\{a, b, c\}$. Η ανακλαστική της κλειστότητα είναι η $\mathrm{R}_a = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (c, b)\}$. Η μεταβατική κλειστότητα της R_a είναι η $R_\mu = R_\alpha$. Η συμμετρική κλειστότητα της R_μ είναι η

$\mathrm{R}_\sigma = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$, η οποία δεν είναι σχέση ισοδυναμίας αφού $(a, b), (b, c) \in R_\sigma$ ενώ $(a, c) \notin R_\sigma$.

Έστω ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο L από "επίπεδα ασφαλείας" (π.χ. $L=\{$ ελεύθερο, εμπιστευτικό, μυστικό, απόλυτα μυστικό$\}$) και έστω S το σύνολο θεμάτων που βρίσκονται στα κρατικά αρχεία. Ορίζουμε τη διμελή σχέση $\leq$ στο $L\times P(S)$ ως εξής: $(l_1,s_1)\leq(l_2,s_2)$ ανν το επίπεδο ασφαλείας l_1 δεν είναι ψηλότερο του επιπέδου ασφαλείας l_2 και $s_1\subseteq s_2$. (i) Να δείξετε ότι η σχέση $\leq$ είναι σχέση μερικής διάταξης. (ii) Να δείξετε ότι το $(L\times P(S),\leq)$ είναι lattice.

(i)

1 Ανακλαστική: $(l,s)\leq(l,s)$ δεδομένου ότι $l\leq l$ και $s\subseteq s$

2 Αντισυμμετρική: Αν $(l_1,s_1)\leq(l_2,s_2)$ και $(l_2,s_2)\leq(l_1,s_1)$ τότε $l_1=l_2$ και $s_2=s_1$

3 Μεταβατική: Αν $(l_1,s_1)\leq(l_2,s_2)$ και $(l_2,s_2)\leq(l_3,s_3)$ τότε $l_1\leq l_2, l_2\leq l_3$ και έπεται πως $l_1\leq l_3$. Ομοίως αν $s_1\subseteq s_2, s_2\subseteq s_3$ τότε $s_1\subseteq s_3$. Άρα $(l_1,s_1)\leq(l_3,s_3)$

Άρα είναι σχέση μερικής διάταξης.

(ii)

Αρκεί να δείξουμε πως κάθε ζεύγος στοιχείων έχει ελάχιστο άνω φράγμα και μέγιστο κάτω φράγμα. Ένα άνω φράγμα 2 στοιχείων είναι το $A=(\max(l_1,l_2),s_1\cup s_2)$. Αυτό το φράγμα είναι ελάχιστο γιατί δεν μπορεί να υπάρξει l που να είναι μικρότερο του max των l_1,l_2 και ταυτόχρονα μεγαλύτερο και από τα δύο και το ίδιο ισχύει και για το $s_1\cup s_2$. Αντίστοιχα το μέγιστο κάτω φράγμα θα είναι $B=(\min(l_1,l_2),s_1\cap s_2)$.

Να βρείτε μια τοπολογική διάταξη για τη σχέση "υποσύνολο" στο $P(\{a,b,c,d\})$.

({ },{a}, {b}, {c}, {d}, {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}, {a,b,c}, {a,b,d}, {a,c,d}, {b,c,d}, {a,b,c,d}).