

# Βασικές Έννοιες στη Συνδυαστική Απαρίθμηση

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Email: fotakis@cs.ntua.gr

## 1 Στοιχειώδης Συνδυαστική Απαρίθμηση

**Αντικείμενο.** Να μετρήσουμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να συμβούν διάφορα γεγονότα χρησιμοποιώντας συνδυαστικά επιχειρήματα.

**Κανόνας γινομένου.** Αφορά μόνο *ανεξάρτητα* γεγονότα, δηλαδή γεγονότα που το αποτέλεσμα του ενός δεν εξαρτάται με κανένα τρόπο από το αποτέλεσμα του άλλου<sup>1</sup>. Αν έχουμε τα ανεξάρτητα γεγονότα  $A$  και  $B$ , και το γεγονός  $A$  συμβαίνει με  $n_A$  τρόπους και το γεγονός  $B$  με  $n_B$  τρόπους, το  $A$  και  $B$  συμβαίνει με  $n_A \times n_B$  τρόπους.

**Παράδειγμα 1.** Οι καρτινικές συμβολοσειρές μήκους 10 με κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου (χωρίς τόνους) είναι  $24^5$ , αφού διαλέγουμε το πρώτο, δεύτερο, ..., πέμπτο γράμμα ανεξάρτητα και με 24 τρόπους το καθένα. Αυτά καθορίζουν και τα πέντε επόμενα γράμματα. Οι επιλογές των πέντε πρώτων γραμμάτων συνιστούν ανεξάρτητα γεγονότα, αφού η επιλογή του ενός γράμματος δεν επηρεάζει με κανένα τρόπο την επιλογή του άλλου.  $\square$

**Κανόνας αθροίσματος.** Αφορά μόνο *αμοιβαία αποκλειόμενα* γεγονότα όπου η εμφάνιση του ενός αποκλείει την ταυτόχρονη εμφάνιση του άλλου. Αν έχουμε τα αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα  $A$  και  $B$ , και το γεγονός  $A$  συμβαίνει με  $n_A$  τρόπους και το γεγονός  $B$  με  $n_B$  τρόπους, το  $A$  ή  $B$  συμβαίνει με  $n_A + n_B$  τρόπους.

**Παράδειγμα 2.** Έχουμε 24 αριθμημένες (διαφορετικές) πράσινες μπάλες και 24 αριθμημένες κόκκινες μπάλες. Υπάρχουν  $24^2 = 576$  διαφορετικοί τρόποι να διαλέξουμε μία πράσινη και μία κόκκινη μπάλα (κανόνας του γινομένου αφού η επιλογή της πράσινης μπάλας είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της κόκκινης μπάλας).

Για να μετρήσουμε τους τρόπους να διαλέξουμε δύο μπάλες (χωρίς περιορισμό χρώματος) ορίζουμε τα αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα: Διαλέγουμε πράσινη και κόκκινη ( $24^2$  τρόποι), διαλέγουμε δύο κόκκινες ( $24 \times 23/2$  τρόποι), και διαλέγουμε δύο πράσινες ( $24 \times 23/2$  τρόποι). Εφαρμόζω κανόνα αθροίσματος και έχουμε σύνολο:  $24^2 + 12 \times 23 + 12 \times 23 = 1128$  τρόποι.  $\square$

**Παράδειγμα 3.** Έχουμε 5 Ελληνικά, 7 Αγγλικά, και 10 Γερμανικά βιβλία (συνολικά 22). Υπάρχουν  $22 \times 21/2 = 231$  διαφορετικοί τρόποι να διαλέξουμε δύο βιβλία (χωρίς περιορισμούς). Όμως αν θέλουμε να διαλέξουμε δύο βιβλία με διαφορετική γλώσσα, έχουμε τις περιπτώσεις

<sup>1</sup> Η ανεξαρτησία δύο γεγονότων  $A$  και  $B$  ελέγχεται πρακτικά με την ερώτηση: “Η γνώση του αποτελέσματος για το γεγονός  $A$ , προσθέτει πληροφορία για το γεγονός  $B$ ;” Τα γεγονότα  $A$  και  $B$  είναι ανεξάρτητα όταν η απάντηση είναι “όχι”.

(αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα): Διαλέγουμε Ελληνικό και Αγγλικό (35 τρόποι), Αγγλικό και Γερμανικό (70 τρόποι), ή Ελληνικό και Γερμανικό (50 τρόποι). Ο κανόνας αθροίσματος δίνει 155 διαφορετικούς τρόπους.  $\square$

## 2 Μεταθέσεις — Διατάξεις Αντικειμένων

Πόσοι διαφορετικοί τρόποι να βάλουμε ένα σύνολο διακεκριμένων αντικειμένων στη σειρά (δηλαδή η θέση κάθε αντικειμένου έχει σημασία).

Μεταθέσεις  $n$  αντικειμένων σε  $n$  θέσεις:  $n! = n(n-1) \cdots 1 = P(n, n)$ .

Διατάξεις  $n$  αντικειμένων σε  $k$  θέσεις:  $n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = P(n, k)$ .

**Παράδειγμα 4.** Όταν έχουμε 20 μαθητές και θέλουμε να διαλέξουμε 5 και να τους βάλουμε στη σειρά, υπάρχουν  $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = P(20, 5) = \frac{20!}{15!}$  διαφορετικοί τρόποι να το κάνουμε.  $\square$

### 2.1 Μεταθέσεις Ομάδων με Όμοια Αντικείμενα.

Έχουμε  $k$  διαφορετικές ομάδες αντικειμένων, η πρώτη έχει  $n_1$  ίδια αντικείμενα, η δεύτερη  $n_2$ , ..., η  $k$ -οστή  $n_k$ :  $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ . Οι διαφορετικές μεταθέσεις αυτών των αντικειμένων είναι

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

**Παράδειγμα 5.** Έχουμε 7  $\alpha$ , 8  $\beta$ , 5  $\gamma$ , και 4  $\delta$ . Μπορούμε να φτιάξουμε  $\frac{24!}{7!8!5!4!}$  διαφορετικές συμβολοσειρές με αυτά.  $\square$

### 2.2 Διατάξεις με Επανάληψη.

Έχουμε  $n$  αντικείμενα και θέλουμε να διαλέξουμε (με επανάληψη)  $k$  από αυτά και να τα βάλουμε στη σειρά. Οι διαφορετικές διατάξεις είναι  $n^k$  ( $n$  επιλογές για το πρώτο αντικείμενο,  $n$  για το δεύτερο, κοκ.).

Είναι ακριβώς το ίδιο με το να τοποθετήσουμε  $k$  διακεκριμένα αντικείμενα σε  $n$  διακεκριμένες υποδοχές όταν δεν παίζει ρόλο η σειρά των αντικειμένων στις υποδοχές. Πράγματι, το πρώτο αντικείμενο διαλέγει με  $n$  τρόπους την υποδοχή του, το δεύτερο επίσης, κοκ.

**Παράδειγμα 6.** Τετραψήφιοι αριθμοί στο δεκαδικό σύστημα: Διαλέγουμε (με επανάληψη) 4 ψηφία από 10 διαφορετικά ψηφία και έχουμε  $10^4$  αριθμούς.  $\square$

**Παράδειγμα 7.**  $n$ -ψήφιοι αριθμοί στο δυαδικό σύστημα:  $2^n$ .  $\square$

**Διακεκριμένα Αντικείμενα σε Διακεκριμένες Υποδοχές με τη Σειρά να Έχει Σημασία.** Πόσοι είναι οι τρόποι να περάσουν  $k$  (διαφορετικά) αυτοκίνητα από  $n$  διαφορετικούς υπαλλήλους διοδίων όταν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία κάθε υπάλληλος εξυπηρετεί τα αυτοκίνητα;

Το πρώτο αυτοκίνητο έχει  $n$  επιλογές (όσοι οι υπάλληλοι). Το δεύτερο έχει  $n+1$  επιλογές (αν πάει στον υπάλληλο που πήγε και το πρώτο, μπορεί να πάει πριν ή μετά το πρώτο). Ομοίως, το τρίτο έχει  $n+2$  επιλογές, ..., και το  $k$ -οστό έχει  $n+k-1$  επιλογές. Από κανόνα του γινομένου:

$$n(n+1) \cdots (n+k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$

### 3 Συνδυασμοί Αντικειμένων

Αριθμός διαφορετικών επιλογών (συνδυασμών)  $k$  από  $n$  διαφορετικά αντικείμενα:

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{P(n, k)}{k!}$$

Δηλαδή, υπολογίζουμε τις διατάξεις  $k$  αντικειμένων από  $n$  και διαιρούμε με  $k!$  γιατί δεν ενδιαφέρει η σειρά (στην περίπτωση των συνδυασμών, οι θέσεις των αντικειμένων δεν έχουν σημασία).

**Παράδειγμα 8.** Πόσες είναι οι διαφορετικές εξάδες του Lotto:  $\binom{49}{6}$  □

**Άσκηση 1.** Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε τρεις διαφορετικούς αριθμούς από το 1 ως το 300 ώστε το άθροισμά τους να διαιρείται ακριβώς με το 3;

*Λύση.* Χωρίζουμε τους αριθμούς σε τρεις ομάδες ανάλογα με το υπόλοιπο της ακέριας διαίρεσής τους με το 3. Στην πρώτη ομάδα μπαίνουν αυτοί που έχουν υπόλοιπο 1 (1, 4, 7, ...), στη δεύτερη ομάδα αυτοί που έχουν υπόλοιπο 2 (2, 5, 8, ...), και στην τρίτη ομάδα αυτοί που έχουν υπόλοιπο 0 (3, 6, 9, ...). Κάθε ομάδα έχει 100 αριθμούς. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν μόνο δύο τρόποι να διαλέξουμε τρεις αριθμούς με άθροισμα που να διαιρείται με το 3: Είτε διαλέγουμε έναν αριθμό από κάθε ομάδα (από κανόνα γινομένου, αυτό συμβαίνει με  $100^3$  τρόπους) είτε διαλέγουμε τρεις αριθμούς από την ίδια ομάδα (από κανόνα αθροίσματος και συνδυασμούς, αυτό συμβαίνει με  $3\binom{100}{3}$  τρόπους). Από κανόνα του αθροίσματος, η απάντηση είναι  $100^3 + 3\binom{100}{3} = 1485100$ . □

#### 3.1 Δυωνυμικοί Συντελεστές

Για κάθε φυσικό αριθμό  $n$  και οποιουδήποτε αριθμούς  $x, y$ , το ανάπτυγμα του δυωνύμου  $(x+y)^n$  είναι:

$$(x+y)^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

Για αυτό οι αριθμοί  $C(n, k) = \binom{n}{k}$  είναι γνωστοί ως δυωνυμικοί συντελεστές.

**Άσκηση 2.** Να αποδείξετε με συνδυαστικά επιχειρήματα ότι

α)  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ , και

β)  $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

*Λύση.* α) Έχουμε μία ομάδα  $n$  ανθρώπων και  $k$  ίδια καπέλα. Το να διαλέξουμε ποιοί  $k$  θα φορέσουν καπέλο είναι ίδιο με το να διαλέξουμε αυτούς (ο αριθμός τους είναι  $n-k$ ) που δεν θα φορέσουν καπέλο. Αφού υπάρχει αντιστοιχία, ο αριθμός των διαφορετικών επιλογών και στις δύο περιπτώσεις είναι ο ίδιος.

β) Έχουμε να επιλέξουμε  $k+1$  από  $n+1$  διαφορετικά αντικείμενα. Είτε θα επιλέξουμε το τελευταίο αντικείμενο ανάμεσα στα  $k+1$  και θα επιλέξουμε τα υπόλοιπα  $k$  από τα  $n$  πρώτα αντικείμενα, είτε δεν θα επιλέξουμε το τελευταίο αντικείμενο ανάμεσα στα  $k+1$  και θα επιλέξουμε όλα τα  $k+1$  αντικείμενα από τα  $n$  πρώτα. Το ζητούμενο προκύπτει από κανόνα του αθροίσματος αφού πρόκειται για αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα. □

**Άσκηση 3.** Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ ,  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$ . Η συνδυαστική ερμηνεία της παραπάνω ισότητας είναι ότι ο αριθμός των διαφορετικών υποσυνόλων ενός συνόλου με  $n$  στοιχεία είναι  $2^n$ .

*Λύση.* Ξέρουμε ότι για κάθε  $x$ ,  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$ . Το ζητούμενο προκύπτει θέτοντας  $x = 1$ .  $\square$

**Άσκηση 4.** Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ ,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$$

Η συνδυαστική ερμηνεία της παραπάνω ισότητας είναι για κάθε σύνολο με  $n$  στοιχεία, ο αριθμός των διαφορετικών υποσυνόλων που έχουν άρτιο αριθμό στοιχείων είναι ίσος με τον αριθμό των διαφορετικών υποσυνόλων που έχουν περιττό αριθμό στοιχείων

*Λύση.* Στο δυωνυμικό ανάπτυγμα  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$ , θέτουμε  $x = -1$ . Το αποτέλεσμα είναι  $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0$ . Το ζητούμενο προκύπτει διατηρώντας τις άρτιες δυνάμεις του  $x$  στο αριστερό μέλος της ισότητας και μεταφέροντας τις περιττές δυνάμεις του  $x$  στο δεξιό μέλος. Αφού το άθροισμα των δύο (ίσων) μελών είναι  $2^n$  (βλ. προηγούμενη άσκηση), κάθε μέλος είναι ίσο με  $2^{n-1}$ .  $\square$

**Άσκηση 5.** Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ ,  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$ .

*Λύση.* Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα των δυωνυμικών συντελεστών ότι  $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$  και γράφουμε το ζητούμενο άθροισμα σαν το  $n$ -οστό όρο της συνέλιξης της ακολουθίας  $a_i = \binom{n}{i}$  με τον εαυτό της. Τυπικά,

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} \quad (1)$$

Το δεξί μέλος της ισότητας δίνει τον αριθμό των συνδυασμών  $n$  αντικειμένων από  $2n$  διαφορετικά αντικείμενα, ο οποίος είναι ίσος με  $\binom{2n}{n}$ . Ειδικότερα μπορούμε να αντιμετωπίσουμε την επιλογή  $n$  από  $2n$  διακεκριμένα αντικείμενα ως εξής: χωρίζουμε τα  $2n$  αντικείμενα σε δύο ομάδες των  $n$  αντικειμένων η καθεμία (με αυθαίρετο τρόπο). Για κάθε  $i = 0, 1, \dots, n$ , επιλέγουμε  $i$  αντικείμενα από την 1η ομάδα (υπάρχουν  $\binom{n}{i}$  διαφορετικοί συνδυασμοί) και  $n-i$  αντικείμενα από την 2η ομάδα (υπάρχουν  $\binom{n}{n-i}$  διαφορετικοί συνδυασμοί). Για κάθε  $i = 0, 1, \dots, n$ , υπάρχουν συνολικά  $\binom{n}{i} \binom{n}{n-i}$  συνδυασμοί να γίνει αυτό. Τα ενδεχόμενα που αντιστοιχούν στις διαφορετικές τιμές του  $i$  είναι αμοιβαία αποκλειόμενα, οπότε εφαρμόζοντας τον κανόνα του αθροίσματος έχουμε ότι

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i},$$

το οποίο σε συνδυασμό με την (1) δίνει το ζητούμενο.  $\square$

**Άσκηση 6.** Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ ,  $\sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} = n2^{n-1}$ .

*Λύση.* Από το δυωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε  $(1+x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i$ . Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της ισότητας, παίρνουμε  $n(1+x)^{n-1} = \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} x^{i-1}$ . Το ζητούμενο προκύπτει θέτοντας  $x = 1$ .  $\square$

### 3.2 Συνδυασμοί Αντικειμένων με Επανάληψη

Διαφορετικοί τρόποι να επιλέξουμε  $k$  αντικείμενα από  $n$  διαφορετικά αντικείμενα με επανάληψη:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Είναι το ίδιο με τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να τοποθετήσουμε  $k$  ίδια (μη διακεκριμένα) αντικείμενα σε  $n$  διακεκριμένες υποδοχές (κάθε αντικείμενο επιλέγει την υποδοχή του από τις  $n$  υποδοχές με επανάληψη).

**Παράδειγμα 9.** Πόσες δυνατές ζαριές υπάρχουν αν παίζουμε με  $k$  ζάρια; Έξι υποδοχές (τα αποτελέσματα για κάθε ζάρι) και τοποθετούμε  $k$  ίδια αντικείμενα (τα ζάρια):  $\binom{6+k-1}{k}$ .  $\square$

**Παράδειγμα 10.** Διαφορετικοί τρόποι να τοποθετήσουμε  $k$  μη διακεκριμένα αντικείμενα σε  $n$  διακεκριμένες υποδοχές χωρίς να μείνει καμία κενή ( $k \geq n$ ): Τοποθετούμε από ένα αντικείμενο σε κάθε υποδοχή (1 τρόπος) και τα υπόλοιπα  $k - n$  αντικείμενα μοιράζονται με

$$\binom{n+k-n-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n} = \binom{k-1}{n-1}$$

διαφορετικούς τρόπους στις  $n$  διακεκριμένες υποδοχές χωρίς άλλο περιορισμό. Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί  $k-1-(k-n) = n-1$  (βλ. (α) παραπάνω).  $\square$

**Άσκηση 7.** Έχουμε 7 α, 8 β, 5 γ, και 4 δ. Πόσες συμβολοσειρές μπορούμε να φτιάξουμε αν δεν πρέπει να εμφανίζεται το “γα” σε καμία από αυτές;

*Λύση.* Υπάρχουν  $\frac{19!}{7!8!4!}$  διαφορετικές διατάξεις για τα 7 α, τα 8 β, και τα 4 δ χωρίς κανένα περιορισμό. Για κάθε δεδομένη διάταξη των α, β, και δ, θεωρούμε ότι τα γ αποτελούν 5 (ίδια – μη διακεκριμένα) αντικείμενα που τοποθετούνται στις διακεκριμένες υποδοχές που σχηματίζονται από την υπάρχουσα διάταξη. Αφού έχουμε συνολικά 19 γράμματα, αυτά σχηματίζουν 20 διακεκριμένες υποδοχές (19 υποδοχές πριν από κάποιο γράμμα και 1 στο τέλος). Όμως το γ δεν μπορεί να τοποθετηθεί πριν από το α γιατί αυτό θα δημιουργήσει την ακολουθία “γα”. Επομένως, απομένουν 13 υποδοχές για να τοποθετηθεί το γ (ακριβώς πριν από κάποιο β ή πριν από κάποιο δ ή στο τέλος). Συνεπώς, οι διαφορετικοί τρόποι να τοποθετήσουμε τα 5 γ είναι  $\binom{13+5-1}{5} = \frac{17!}{5!12!}$ . Ο συνολικός αριθμός προκύπτει από τον κανόνα του γινομένου:  $\frac{19!}{7!8!4!} \times \frac{17!}{5!12!}$ .  $\square$

**Άσκηση 8.** Έχουμε  $n$  θέσεις στη σειρά και θέλουμε να τοποθετήσουμε  $k$  φοιτητές για να γράψουν εξετάσεις ώστε μεταξύ κάθε δύο φοιτητών να υπάρχει τουλάχιστον μία κενή θέση ( $n \geq 2k - 1$ ). Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

*Ιδέα:* Βγάζουμε τους φοιτητές και τα θρανία από την αίθουσα. Δίνουμε από ένα θρανίο σε κάθε φοιτητή (1 τρόπος αφού τα θρανία είναι ίδια, δεσμεύουμε έτσι  $k$  θρανία). Βάζουμε πρώτα τους φοιτητές με τα θρανία τους στη σειρά ( $k!$  τρόποι αφού οι φοιτητές είναι διαφορετικοί), μετά από ένα άδειο θρανίο ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι φοιτητών (1 τρόπος, δεσμεύουμε  $k - 1$  θρανία), και τέλος τοποθετούμε τα υπόλοιπα θρανία (διανομή  $n - 2k + 1$  μη διακεκριμένων αντικειμένων σε  $k + 1$  διακεκριμένες υποδοχές).

*Λύση.* Υπάρχουν  $k!$  διαφορετικές μεταθέσεις των φοιτητών (διακεκριμένες οντότητες). Για κάθε μετάθεση βάζουμε τους φοιτητές και ένα κενό μεταξύ τους. Έτσι δεσμεύουμε  $2k - 1$  θέσεις ( $k$  για

τους φοιτητές και  $k - 1$  για τα κενά μεταξύ τους). Έχουν απομείνει  $n - 2k + 1$  κενές θέσεις (μη διακεκριμένες) να τις μοιράσουμε στις  $k + 1$  διακεκριμένες υποδοχές που σχηματίζει η μετάθεση των φοιτητών. Αυτό γίνεται με

$$\binom{k + 1 + n - 2k + 1 - 1}{n - 2k + 1} = \binom{n - k + 1}{n - 2k + 1} = \binom{n - k + 1}{k}$$

διαφορετικούς τρόπους. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου, προκύπτει το αποτέλεσμα:  $k! \times \binom{n-k+1}{k}$ .  $\square$

#### 4 Υπολογισμός Πιθανότητας (σε Διακριτούς Δειγματοχώρους)

Όταν υπάρχουν  $n$  ισοπίθανα ενδεχόμενα (διαφορετικοί τρόποι) να συμβεί κάτι, η πιθανότητα να προκύψει ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο είναι  $\frac{1}{n}$ .

**Παράδειγμα 11.** Η πιθανότητα να φέρουμε εξάρες στο τάβλι είναι  $\frac{1}{36}$ . Η πιθανότητα ένα τουλάχιστον ζάρι να φέρει 6 είναι 1 μείον την πιθανότητα και τα δύο ζάρια να φέρουν κάτι διαφορετικό από 6. Το δεύτερο γεγονός έχει πιθανότητα  $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$  επειδή η πιθανότητα ένα ζάρι να φέρει κάτι διαφορετικό από 6 είναι  $\frac{5}{6}$  και οι ρίψεις των δύο ζαριών είναι ανεξάρτητες. Τελικά, η πιθανότητα ένα τουλάχιστον ζάρι να φέρει 6 είναι  $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$ .  $\square$

**Άσκηση 9.** Αν παίξετε μία στήλη τζόκερ, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσετε;

*Λύση.* Στο τζόκερ ο αριθμός των διαφορετικών στηλών που μπορούν να κληρωθούν είναι  $20 \binom{45}{5}$  και όλες οι στήλες είναι ισοπίθανες. Η πιθανότητα επιτυχίας είναι

$$\frac{1}{20 \binom{45}{5}} = \frac{5!40!}{20 \cdot 45!} = \frac{1}{24435180}$$

Αν όμως γνωρίζουμε ότι ο πρώτος αριθμός θα είναι στην πρώτη δεκάδα, ο δεύτερος στη δεύτερη, κοκ., και ο τζόκερ άρτιος, τότε ο αριθμός των διαφορετικών στηλών (με αυτούς τους περιορισμούς) είναι 500000 και η πιθανότητα επιτυχίας είναι  $\frac{1}{500000}$ .  $\square$

**Παράδειγμα 12.** Ένας εκκεντρικός πολυεκατομμυριούχος προτείνει στον πατέρα της(ου) φίλης(ου) σας (επίσης πολυεκατομμυριούχο) να στοιχηματίσουν 100 εκατομμύρια ευρώ ότι αν ρωτήσουν 30 περαστικούς για την ημέρα των γενεθλίων τους, τουλάχιστον 2 από αυτούς θα έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα. Ο πατέρας της(ου) φίλης(ου) σας γνωρίζει ότι παρακολουθείτε Διακριτά Μαθηματικά και σας ρωτάει αν πρέπει να αποδεχθεί το στοίχημα ποντάροντας στο ότι κάτι τέτοιο δεν θα συμβεί. Τι απαντάτε;  $\square$