Θέμα 1 (Αρχή του Περιστερώνα, 1.8 μονάδες)
(α) Επιλέγουμε αυθαίρετα n φυσικούς αριθμούς από το σύνολο $\{1,2,3,\ldots,2^n-3,2^n-2\}$. Να δείξετε ότι μεταξύ των αριθμών που έχουμε επιλέξει υπάρχει πάντα ένα ζευγάρι όπου ο μεγαλύτερος από τους δύο αριθμούς είναι μικρότερος ή ίσος από το διπλάσιο του άλλου (π.χ. για $n=3$, αν επιλέξουμε τους αριθμούς 1,3,6 έχουμε ότι $6 \leq 2*3$)

(β) Θεωρούμε μια ακολουθία N θετικών ακεραίων η οποία περιέχει ακριβώς n διαφορετικούς αριθμούς. Να δείξετε ότι αν $N \geq 2^n$, υπάρχουν δύο ή περισσότερες διαδοχικές θέσεις της ακολουθίας τέτοιες ώστε το γινόμενο των αντίστοιχων αριθμών να είναι ένα τέλειο τετράγωνο. Π.χ. στην ακολουθία 7,5,3,5,7,5,3,7, όπου $n=3$ και $N=2^3$, το γινόμενο των έξι τελευταίων θέσεων είναι τέλειο τετράγωνο.

(α)
Περιστέρια οι n φυσικοί.
Φωλιές οι αριθμοί από το k έως το $2*k$.
Για παράδειγμα για $n=4$ οι φωλιές θα είναι 3: $\{1,2\}$, $\{3,4,5,6\}$, $\{7,8,9,10,11,12,13,14\}$.
Για $n=5$ οι φωλιές θα είναι 4: $\{1,2\}$, $\{3,4,5,6\}$, $\{7,8,9,10,11,12,13,14\}$, $\{15,16,17,18,18,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30\}$.
Έτσι όταν έχω n φυσικούς οι φωλιές θα είναι $n-1$ (αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή). Δύο αριθμοί από τους n θα πέσουν στην ίδια φωλιά. Στην ίδια φωλιά όποιο αριθμό και να πάρω θα είναι μικρότερος ή ίσος του διπλάσιου κάποιου μικρότερού του.

(β)

Αρκεί να αποδείξουμε πως υπάρχουν διαδοχικές θέσεις στην ακολουθία που το κάθε στοιχείο που υπάρχει μέσα σε αυτές επαναλαμβάνεται άρτιο πλήθος φορών.
Μετρούμε το πλήθος των εμφανίσεων κάθε στοιχείου από την αρχή της ακολουθίας έως τη θέση που βρισκόμαστε και συμπληρώνουμε στο διάνυσμα των εμφανίσεων των στοιχείων την τιμή 1 αν το πλήθος των εμφανίσεων του στοιχείου είναι περιττό και 0 αν είναι άρτιο.

Όλοι αυτοί οι πιθανοί διαφορετικοί συνδυασμοί είναι 2^n ενώ οι θέσεις στην ακολουθία είναι από 0 έως 2^n άρα 2^n+1.

Αυτό σημαίνει πως κάποιος συνδυασμός επαναλαμβάνεται. Στις θέσεις αυτές υπάρχει τέλειο τετράγωνο. Για το παράδειγμα που μας δίνετε: 7,5,3,5,7,5,3,7

Στην αρχή δεν έχει έρθει κανένα στοιχείο.

Άρα το διάνυσμα θα είναι $(0,0,0)$.

Μετά έρχεται το 7. Και το διάνυσμα γίνεται $(0,0,1)$.

Μετά έρχεται το 5. Και το διάνυσμα γίνεται $(0,1,1)$.

Μετά έρχεται το 3. Και το διάνυσμα γίνεται $(1,1,1)$.

Μετά έρχεται το 5. Και το διάνυσμα γίνεται $(1,0,1)$.

Μετά έρχεται το 7. Και το διάνυσμα γίνεται $(1,0,0)$.

Μετά έρχεται το 5. Και το διάνυσμα γίνεται $(1,1,0)$.

Μετά έρχεται το 3. Και το διάνυσμα γίνεται $(0,1,0)$.

Μετά έρχεται το 7. Και το διάνυσμα γίνεται $(0,1,1)$.

Το διάνυσμα $(0,1,1)$ εμφανίζεται δύο φορές.

Θέμα 2 (Γραφήματα - Βασικές Έννοιες, 1.2 μονάδες)
Θεωρούμε το γράφημα $C_1 = C_n * K_m$ που προκύπτει από τη σύνδεση (join) του κύκλου με $n \geq 3$ κορυφές με το πλήρες γράφημα με $m \geq 1$ κορυφές.

1. Πόσες κορυφές και πόσες ακμές έχει το γράφημα G_1 (ως συνάρτηση των n και m);

Κορυφές: $n + m$ (άθροισμα κορυφών των δύο γραφημάτων)
Ακμές: $n + \frac{m*(m-1)}{2} + n*m$ (ακμές του πρώτου + ακμές του δεύτερου + ακμές από όλες τις κορυφές του πρώτου σε όλες του δεύτερου)

2. Για ποιές τιμές των n και m το γράφημα G_1 έχει κύκλο Euler;

Πρέπει ο βαθμός κάθε κορυφής του νέου γραφήματος να είναι άρτιος. Οι κορυφές του κύκλου είναι βαθμού $m+2$. Άρα m άρτιος. Οι κορυφές του πλήρους γραφήματος είναι βαθμού $m-1+n$. Επομένως n περιττός.

3. Για ποιές τιμές των n και m το γράφημα G_1 έχει κύκλο Hamilton;

Όποιες και αν είναι οι τιμές των m και n το γράφημα έχει κύκλο Hamilton.

4. Ποιός είναι ο χρωματικός αριθμός του G_1;
Για το πλήρες γράφημα απαιτούνται m χρώματα. Οι κορυφές του κύκλου πρέπει να έχουν διαφορετικό χρώμα από αυτές του πλήρους γραφήματος δεδομένου ότι συνδέονται με ακμές. Για τις κορυφές του κύκλου απαιτούνται 2 αν το πλήθος κορυφών του είναι άρτιος και 3 χρώματα αν είναι περιττός. Επομένως χρειαζόμαστε $m+2$ ή $m+3$ χρώματα.

Θέμα 3 (Διμερή γραφήματα, 1.8 μονάδες)

(α) Να δείξετε ότι για κάθε (απλό μη-κατευθυνόμενο) συνεκτικό διμερές γράφημα $G(V, E)$ υπάρχει μία μοναδική διαμέριση των κορυφών του V σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Πόσες διαφορετικές διαμερίσεις υπάρχουν αν το G έχει $k \geq 2$ συνεκτικές συνιστώσες;

(β) Θεωρούμε ένα απλό μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$ με $n \geq 2$ κορυφές και $m \geq 1$ ακμές. Συμβολίζουμε με $Y(G)$ το γράφημα που προκύπτει από την υποδιαίρεση όλων των ακμών του G. Για την υποδιαίρεση μιας ακμής $e = \{u, v\}$, διαγράφουμε την e και προσθέτουμε μία νέα κορυφή x_e που είναι γειτονική μόνο με τα άκρα u και v της ακμής e. (i) Να δείξετε ότι το $Y(G)$ είναι διμερές γράφημα και να υπολογίσετε το πλήθος των κορυφών και των ακμών του (με δεδομένο ότι το G έχει n κορυφές και m ακμές). (ii) Να δείξετε ότι το $Y(G)$ έχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν το γράφημα G είναι ο κύκλος C_n με n κορυφές.

(α) Το G είναι διμερές γράφημα και κατά συνέπεια υπάρχει μία διαμέριση των κορυφών του σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Θα δείξουμε πως είναι μοναδική. Θεωρούμε συνεκτικό γράφημα, επομένως υπάρχει μονοπάτι μεταξύ δύο οποιονδήποτε κορυφών. Κάθε ζεύγος κορυφών που ανήκει στο ίδιο ανεξάρτητο σύνολο συνδέεται με μονοπάτι άρτιου μήκους ενώ αν ανήκει σε διαφορετικό συνδέεται με μονοπάτι περιττού μήκους. Επομένως κάθε ζεύγος κορυφών θα συνδέεται με 2 διαφορετικά μονοπάτια και θα είχα κύκλο περιττού μήκους. Άτοπο για διμερές γράφημα. Αν το γράφημα έχει k συνεκτικές συνιστώσες και η κάθε μία από αυτές δίνει τις διαμερίσεις $(A_{1,} B_1), (A_{2,} B_2), \ldots, (A_{k,} B_k)$ για κάθε συνεκτική συνιστώσα έχουμε 2 επιλογές για να εισάγουμε τα ανεξάρτητα σύνολα στη τελική διαμέριση. Επομένως έχουμε 2^k διαμερίσεις και επειδή διπλομετράμε διαιρούμε με το 2 και έχουμε 2^{k-1} διαφορετικές διαμερίσεις.

(β)(i) Το πλήθος των κορυφών του $Y(G)$ είναι το άθροισμα των αρχικών και των νέων (αυτές που προστέθηκαν είναι όσες και οι ακμές). Άρα το $Y(G)$ έχει $n + m$ κορυφές. Το πλήθος των ακμών του $Y(G)$ είναι διπλάσιο από το πλήθος των ακμών του αρχικού γραφήματος. Επομένως το $Y(G)$ έχει $2m$ ακμές. Οι κορυφές του γραφήματος $Y(G)$ μπορούν να διαμεριστούν σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Το ένα περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του αρχικού γραφήματος G και το άλλο όλες τις κορυφές που προστεθήκαν για την υποδιαίρεση των ακμών. Επομένως εκ κατασκευής το γράφημα $Y(G)$ είναι διμερές.

(ii) Το $Y(G)$ έχει κύκλο Hamilton ανν το G είναι το γράφημα C_n.

Ευθύ $\Rightarrow$ *Αν* G *είναι το γράφημα* C_n *τότε το* $Y(G)$ *έχει κύκλο Hamilton.*

Το $Y(G)$ σε αυτή την περίπτωση είναι το C_{2n} και επομένως έχει κύκλο Hamilton.

Αντίστροφο $\Leftarrow$ *Αν* $Y(G)$ *έχει κύκλο Hamilton τότε το* G *είναι το γράφημα* C_n.

Οι κορυφές του G (πλήθους n) που είναι και κορυφές του $Y(G)$ έχουν τον ίδιο βαθμό και στα δύο γραφήματα. Δεδομένου πως το $Y(G)$ έχει κύκλο Hamilton όλες οι κορυφές του θα πρέπει να έχουν βαθμό ≥ 2. Για να είναι όμως το G (συνεκτικό γράφημα) διαφορετικό του C_n και θα πρέπει μία τουλάχιστον κορυφή να έχει βαθμό > 2. Επομένως το άθροισμα των βαθμών των κορυφών θα πρέπει να είναι $> 2n$. Οπότε έχουμε $2n < \sum_{u:\text{κορυφή του} G} \deg(u) = 2m \Rightarrow n < m$.

Το $Y(G)$ έχει κύκλο Hamilton και οι κορυφές του διαμερίζονται με μοναδικό τρόπο σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Τα δύο σύνολα έχουν ίσο πλήθος στοιχείων $n = m$. Καταλήξαμε σε άτοπο. Άρα το G είναι το C_n.

Θέμα 4 (Κύκλος Euler, Κύκλος Hamilton, 1.8 μονάδες)

(α) Να δείξετε ότι μπορούμε πάντα να προσανατολίσουμε όλες τις ακμές ενός μη κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος G ώστε για κάθε κορυφή u, ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός της u είτε να είναι ίσοι είτε να διαφέρουν κατά 1.

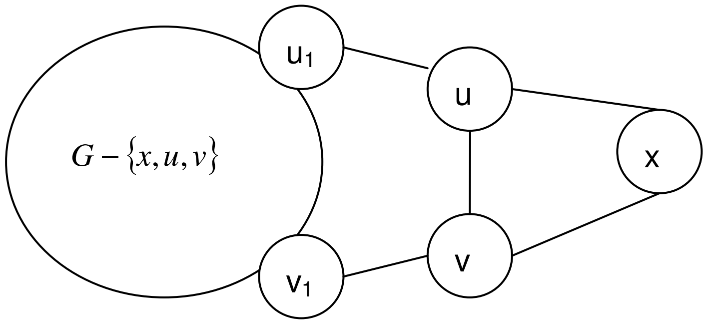
(β) Έστω μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα G το οποίο έχει $k \geq 2$ κορυφές περιττού βαθμού. Να δείξετε ότι το σύνολο των ακμών του G μπορεί να διαμεριστεί σε $k/2$ μονοκονδυλιές που δεν έχουν κοινές ακμές μεταξύ τους.

(γ) Έστω γράφημα G και έστω x μια κορυφή του G τέτοια ώστε το $G-x$ να έχει κύκλο Hamilton. Υποθέτουμε ότι το G έχει δύο κορυφές u και v που έχουν βαθμό 3 και είναι γειτονικές με την x. (i) Να δείξετε ότι αν οι u και v συνδέονται μεταξύ τους, τότε και το G έχει κύκλο Hamilton. (ii) Να δείξετε ότι αν οι u και v **δεν** συνδέονται μεταξύ τους, τότε το G δεν έχει απαραίτητα κύκλο Hamilton.

(α) Εξετάζουμε 2 περιπτώσεις. Να περιέχει το γράφημα ακμές περιττού βαθμού και να μην περιέχει.
Αν δεν περιέχει το γράφημα ακμές περιττού βαθμού έχουμε γράφημα με κορυφές άρτιου βαθμού και επομένως έχει κύκλο Euler. Σε αυτή την περίπτωση για κάθε ακμή που καταλήγει σε μια κορυφή υπάρχει και μια άλλη που απομακρύνεται από την κορυφή και επομένως το πλήθος των ακμών που έχουν κατεύθυνση προς την κορυφή ισούται με το πλήθος αυτών που έχουν κατεύθυνση από την κορυφή προς άλλη κορυφή. Σε αυτή την περίπτωση ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσοι.
Αν περιέχει το γράφημα ακμές περιττού βαθμού τότε αυτές είναι άρτιου πλήθους και μπορώ να τις "ζευγαρώσω". Για κάθε 2 τέτοιες κορυφές ζωγραφίζω μια ακμή. Στο νέο γράφημα που προκύπτει μπορώ να βρω κύκλο Euler και να ισχύει πως ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσοι. Αν σβήσω αυτές τις ακμές κάθε τέτοια κορυφή θα έχει μία ακμή λιγότερη και επομένως ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός διαφέρουν κατά ένα. Στις υπόλοιπες κορυφές (σε αυτές που στο αρχικό γράφημα ήταν άρτιου βαθμού) ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός είναι ίσοι.

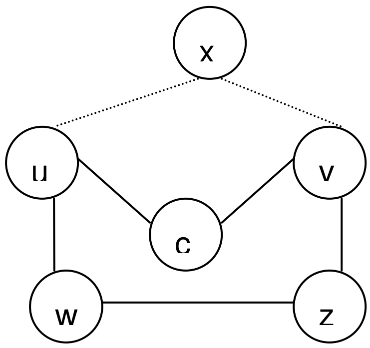
(β) Κάθε γράφημα έχει άρτιο πλήθος κορυφών περιττού βαθμού. Επομένως το $k/2$ είναι ακέραιος. Παίρνω μία κορυφή περιττού βαθμού και σχεδιάζοντας μία μονοκονδυλιά που ξεκινά από αυτή καταλήγω στην πρώτη κορυφή περιττού βαθμού που θα συναντήσω. Επειδή το γράφημα είναι συνεκτικό υπάρχει τέτοια μονοκονδυλιά. Διαγράφω τις ακμές της μονοκονδυλιάς και το γράφημα που απομένει αποτελείται από συνεκτικές συνιστώσες. Οι κορυφές περιττού βαθμού είναι τώρα $k-2$ διότι οι 2 πρώτες έχουν γίνει πλεόν άρτιου βαθμού. Κάθε συνεκτική συνιστώσα έχει άρτιο πλήθος κορυφών περιττού βαθμού. Ξεκινώ από συνιστώσα που έχει τουλάχιστον 2 κορυφές περιττού βαθμού και επαναλαμβάνω την ίδια διαδικασία. Εφόσσον οι κορυφές είναι k η διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί $k/2$ φορές. Οι συνεκτικές συνιστώσες που απομένουν έχουν κορυφές άρτιου βαθμού και επομένως έχουν κύκλο Euler. Σχεδιάζω ένα τέτοιο κύκλο για κάθε συνιστώσα και τον συνδέω με μία μονοκονδυλιά. Δεδομένης της συνεκτικότητας του αρχικού γραφήματος μπορώ να το κάνω αυτό. Έτσι καμία ακμή δεν θα μείνει εκτός μονοκονδυλιάς και το σύνολο κορυφών του γραφήματος διαμερίζεται σε $k/2$ μονοκονδυλιές που δεν έχουν κοινές ακμές μεταξύ τους.

(γ) (i)



Η κορυφή u συνδέεεται με τον κύκλο Hamilton του γραφήματος $G-x$ μέσω των ακμών u_1u και uv (η τρίτη ακμή που προσπίπτει στην u δεν ανήκει στο γράφημα). Επομένως ο κύκλος περνά διαδοχικά από τις ακμές u_1uvv_1. Μπορώ να φτιάξω τον ίδιο κύκλο με μόνη αλλαγή να μην περνά από την ακμή uv και να παρεμβάλω την κορυφή x. Έτσι ο κύκλος θα φτάνει στην u θα επισκέπτεται την x και στη συνέχεια την v.

(ii) Στην περίπτωση που οι u και v δεν είναι γειτονικές δεν έχω απαραίτητα κύκλο Hamilton. Όπως για παράδειγμα το παρακάτω γράφημα. Αρχικά έχει κύκλο hamilton ενώ με την προσθήκη της x δεν έχει.



Θέμα 5 (Δέντρα, 1.6 μονάδες)
(α) Έστω $n \geq 2$ θετικοί ακέραιοι $d_1, d_2, ..., d_n$. Να δείξετε ότι $d_1 + ... + d_n = 2(n-1)$ αν και μόνο αν υπάρχει δέντρο T με n κορυφές και βαθμούς κορυφών $d_1, d_2, ..., d_n$.
(β) Θεωρούμε ένα απλό μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E, w)$ με θετικά βάρη $w: E \to N^*$ στις ακμές και ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο (ΕΣΔ) T του G. Για κάθε ζευγάρι κορυφών u, v συμβολίζουμε με p^*_{uv} το μοναδικό $u-v$ μονοπάτι στο T. Να δείξετε ότι για κάθε ζευγάρι κορυφών u, v και για κάθε μονοπάτι p_{uv} στο G, ισχύει ότι $\max_{e \in p^*_{uv}} \{w(e)\} \leq \max_{e \in p_{uv}} \{w(e)\}$ (δηλ. αν θεωρήσουμε ως "κόστος" ενός $u-v$ μονοπατιού p_{uv} το βάρος της βαρύτερης ακμής του, το μοναδικό $u-v$ μονοπάτι p^*_{uv} στο ΕΣΔ ελαχιστοποιεί αυτό το κόστος για όλα τα ζευγάρια κορυφών u, v).

(α) Αποδεικνύουμε πρώτα πως αν $d_1 + ... + d_n = 2(n-1) \Rightarrow \exists$ δέντρο T με βαθμούς κορυφών $d_1, d_2, ..., d_n$. Εφαρμόζουμε επαγωγή.
Επαγωγική Βάση:
Για $n = 2$ ισχύει. Έχουμε το δέντρο με μία ρίζα και έναν απόγονο $d_1 = 1$, $d_2 = 1$ και $d_1 + d_2 = 2(2-1)$
Για $n = 3$ επίσης ισχύει. Έχουμε το δέντρο με μία ρίζα και δύο απογόνους $d_1 = 2$, $d_2 = 1$ $d_3 = 1$ και $d_1 + d_2 + d_3 = 2(3-1)$.

Επαγωγική Υπόθεση:
Έστω πως για $n = k-1$ κατασκευάζουμε το δέντρο με άθροισμα βαθμών $2(k-1-1) = 2(k-2)$.

Επαγωγική Βήμα:
Θα πρέπει να αποδείξουμε πως για $n = k$ μπορούμε να κατασκευάσουμε δέντρο με άθροισμα βαθμών $2(k-1)$.

Καταρχάς αποδεικνύουμε πως ένα από τα $d_1, d_2, ..., d_k$ έχει τιμή 1. Αν $\forall i \; d_i \geq 2$ τότε $d_1 + ... + d_n \geq 2k$. Άτοπο διότι $d_1 + ... + d_k = 2(k-1)$. Θεωρούμε χβγ πως $d_1 = 1$

Αντίστοιχα υπάρχει $d_i \geq 2$. Διότι αν $\forall i \; d_i = 1$ τότε $\sum_{i=1}^{n} d_i = k$. Άτοπο. Επίσης θεωρούμε χβγ πως $d_2 \geq 2$.

Ισχύει πως
$$d_1 + ... + d_k = 2(k-1) \Rightarrow d_2 + ... + d_k = 2(k-1) - d_1 \Rightarrow d_2 + ... + d_k = 2(k-1) - 1 \Rightarrow$$
$$(d_2 - 1) + ... + d_k = 2(k-1) - 1 - 1 \Rightarrow (d_2 - 1) + ... + d_k = 2(k-2)$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχω τέτοιο δέντρο. Στην κορυφή με βαθμό $d_2 - 1$ προσθέτω μιά ακμή που καταλήγει σε μια νέα κορυφή με βαθμό 1. Έτσι $1 + (d_2 - 1) + 1 + ... + d_k = 2(k-2) + 2 = 2(k-1)$. Κατασκευάσαμε έτσι δέντρο με βαθμούς $d_1, d_2, ..., d_k$.

Αν $\exists$ δέντρο T με βαθμούς κορυφών $d_1, d_2, ..., d_n \Rightarrow$ το άθροισμα των βαθμών του $d_1 + ... + d_n = 2(n-1)$.
Το πλήθος των ακμών του δέντρου με n κορυφές είναι $n-1$.

Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών είναι διπλάσιο αυτού των ακμών δηλ. $2(n-1)$.

(β) Έστω αυθαίρετες κορυφές u και v του G και ένα ελάχιστα συνεκτικό δέντρο T. Αν οι u και v συνδέονται με μοναδικό μονοπάτι στο G τότε το μονοπάτι αυτό θα υπάρχει αναγκαστικά και στο T και οι μέγιστες ακμές του G θα υπάρχουν και στο T. Στην περίπτωση όμως που υπάρχουν 2 ή περισσότερα μονοπάτια μεταξύ των δύο κορυφών τότε σχηματίζεται κύκλος (ή κύκλοι). Βρίσκω την ακμή μέγιστου βάρους στο μονοπάτι μεταξύ των δύο κορυφών στο δέντρο και την αφαιρώ από το T . Το δέντρο σπάει σε δύο συνεκτικές συνιστώσες. Υποθέτουμε πως υπάρχει ακμή μικρότερου βάρους (στο G) που συνδέει τις δύο συνεκτικές συνιστώσες. Βάζουμε την ακμή αυτή στο δέντρο και παίρνουμε δέντρο που έχει μικρότερο συνολικό βάρος από το T. Επομένως το T δεν είναι Ελάχιστα Συνδετικό Δέντρο.

Θέμα 6 (Επιπεδότητα, Χρωματικός αριθμός, 1.8 μονάδες)

(α) Για κάθε φυσικό $n \geq 2$, ορίζουμε το απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα H_n με σύνολο κορυφών $V_n = \{0,1,...,2n-1\}$ και σύνολο ακμών

$E_n = \{\{i, i+1\} : i \in \{0,1,2,...,2n-2\}\} \cup \{\{2n-1, 0\}\} \cup \{\{i, i+n\} : i \in \{0,1,...,n-1\}\}$

(i) Να δείξετε ότι το H_n είναι επίπεδο ανν $n = 2$.

(ii) Να προσδιορίσετε τον χρωματικό αριθμό του H_n για κάθε τιμή του $n \geq 2$.

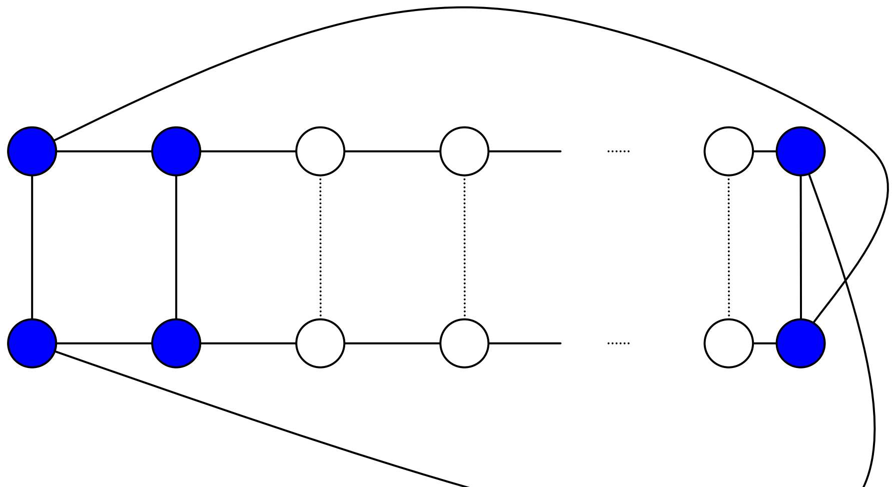
(β) Ένα επίπεδο γράφημα λέγεται εξωεπίπεδο (outerplanar) αν μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο ώστε οι ακμές του να μην τέμνονται και όλες οι κορυφές του να βρίσκονται στην εξωτερική όψη. Να αποδείξετε ότι κάθε απλό εξωεπίπεδο γράφημα με n κορυφές έχει το πολύ $2n-3$ ακμές.

(α) (i) Για $n = 2$ το γράφημα είναι το K_4 που είναι επίπεδο.

Για $n = 3$ έχουμε το $K_{3,3}$ που ΔΕΝ είναι επίπεδο

Για $n > 3$ με απλοποιήσεις καταλήγω στο $K_{3,3}$ που δεν είναι επίπεδο και επομένως το γράφημά μου δεν είναι επίπεδο εφόσσον περιέχει το $K_{3,3}$.

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται πως καταλήγω στο $K_{3,3}$. Αρχικά διαγράφω όλες τις κάθετες γραμμές (τις διακεκομμένες). Στη συνέχεια κάνω σύμπτυξη κορυφών (φεύγουν οι λευκές κορυφές). Και καταλήγω σε γράφημα ομοιομορφικό με το $k_{3,3}$.

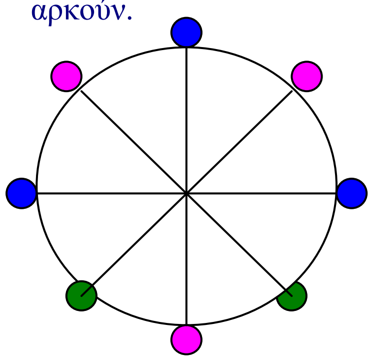


(ii) Για $n = 2$ ο χρωματικός αριθμός είναι 4.

Για $n > 2$ διακρίνω 2 περιπτώσεις:

n άρτιος:

Ζωγραφίζω τις κορυφές σε κύκλο και κάθε κορυφή συνδέεται με τις γειτονικές της στον κύκλο και την αντιδιαμετρική της. Αυτές οι τρείς δεν συνδέονται μεταξύ τους και πρέπει να έχουν το ίδιο χρώμα. Για παράδειγμα το σχήμα με 8 κορυφές. Ξεκινώ με την μπλέ κορυφή και δεξιά και αριστερά και στην απέναντί της βάζω το ροζ χρώμα. Δεξιά και αριστερά αυτών (των 2 ροζ) χρησιμοποιώ ξανά το μπλέ. Δεξιά και αριστερά των μπλέ δεν μπορώ να βάλω ροζ (γιατί έχω τις εκ διαμέτρου) αλλά ούτε και μπλέ (το έχουν οι δεξιά και αριστερά). Βάζω πράσινο. Το ίδιο θα συμβεί και όταν πάω στις 10 κορυφές κ.λπ. Και γενικά αν από τις n πάω στις $n+2$ τότε θα προσθέσω τις 4 κορυφές αντιδιαμετρικά και θα φροντίσω δεξιά και αριστερά να βάλω το χρώμα που δεν έχουν οι γειτονικές τους στον κύκλο. Επομένως 3 χρώματα αρκούν.



n περιττός:
Παρατηρώ πως όλοι οι κύκλοι είναι άρτιου μήκους και επομένως το γράφημα είναι διμερές. Αρκούν 2 χρώματα.

(β) Στα επίπεδα γραφήματα ισχύει ότι

$$n+3(f-1)\leq \sum_{o::o\psi\eta}\deg(o)\leq 2m \Rightarrow f\leq \frac{2m}{3}-\frac{n}{3}+1$$

Ισχύει επίσης πως $f=m+2-n$

Επομένως $m+2-n\leq \frac{2m-n}{3}+1 \Rightarrow 3m+6-3n\leq 2m-n+3 \Rightarrow m\leq 2n-3$