ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Εαρινό 2021
Διδάσκοντες: Δ.Φωτάκης, Δ. Σούλιου

2η Γραπτή Εργασία

Θέμα 1 (Αρχή του Περιστερώνα, 1.8 μονάδες)

(α) Επιλέγουμε αυθαίρετα n φυσικούς αριθμούς από το σύνολο $\{1,2,3...,2^n-3,2^n-2\}$. Να δείξετε ότι μεταξύ των αριθμών που έχουμε επιλέξει υπάρχει πάντα ένα ζευγάρι όπου ο μεγαλύτερος από τους δύο αριθμούς είναι μικρότερος ή ίσος από το διπλάσιο του άλλου (π.χ., για $n=3$, αν επιλέξουμε τους αριθμούς 1,3,6, έχουμε ότι $6 \le 2*3$.

Περιστέρια: οι n αριθμοί που επιλέξαμε
Φωλιές : ορίζω τις φωλιές ως εξής:

Σε κάθε φωλιά βάζω τους αριθμούς $\frac{2^n-2}{2}, \dots, 2^n-2$ (για $n>1$)
Στην πρώτη φωλιά ($n=2$) βάζω τους αριθμούς 1,2
Στη δεύτερη φωλιά ($n=3$)βάζω τους αριθμούς 3,4,5,6
Στην τρίτη φωλιά ($n=4$) βάζω τους αριθμούς 7,8,9,10,11,12,13,14
Οι φωλιές που έχω είναι $n-1$. Απόδειξη: Έστω πως έχω k φωλιές
Έχω στην πρώτη φωλιά 2 αριθμούς, στη δεύτερη 4, στην τρίτη 8 κ.λπ στην k έχω 2^k
$2+4+8+...+2^k = 2^n-2$ διαιρώ με το 2 και παίρνω $1+2+4+...+2^{k-1}=2^{n-1}-1 \Rightarrow$
$2^k-1=2^{n-1}-1 \Rightarrow k=n-1$ φωλιές άρα δύο αριθμοί στην ίδια φωλιά. Έστω x και y οι αριθμοί στην ίδια φωλιά και έστω $x<y$. Τότε από τον τρόπο που έφτιαξα τις φωλιές έχω $y \le 2x$.

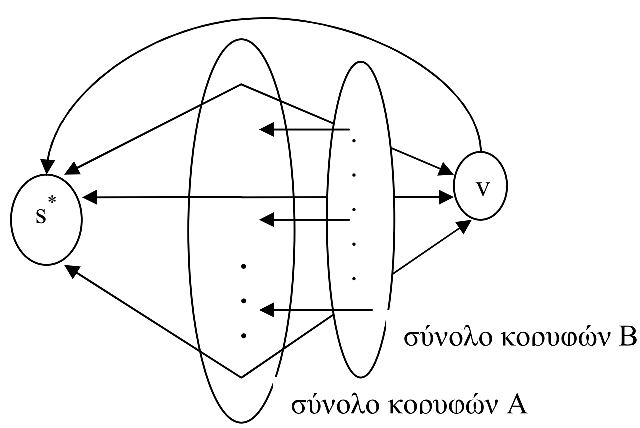
(β) Θεωρούμε μια ακολουθία N θετικών ακεραίων η οποία περιέχει ακριβώς n διαφορετικούς αριθμούς. Να δείξετε ότι αν $N \ge 2^n$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο ή περισσότερες διαδοχικές θέσεις της ακολουθίας τέτοιες ώστε το γινόμενο των αντίστοιχων αριθμών να είναι ένα τέλειο τετράγωνο. Π.χ., στην ακολουθία 7, 5, 3, 5, 7, 5, 3, 7, όπου $n=3$ και $N=2^3$ το γινόμενο των έξι τελευταίων διαδοχικών θέσεων είναι τέλειο τετράγωνο.

Αρκεί να αποδείξουμε πως υπάρχει τμήμα της ακολουθίας όπου το κάθε στοιχείο που υπάρχει μέσα σε αυτές επαναλαμβάνεται άρτιο πλήθος φορών. Μετρούμε το πλήθος των εμφανίσεων κάθε στοιχείου από την αρχή της ακολουθίας έως τη θέση που βρισκόμαστε και συμπληρώνουμε στο διάνυσμα των εμφανίσεων των στοιχείων την τιμή 1 αν το πλήθος των εμφανίσεων του στοιχείου είναι περιττό και 0 αν είναι άρτιο.
Όλοι αυτοί οι πιθανοί διαφορετικοί συνδυασμοί είναι 2^n ενώ οι θέσεις στην ακολουθία είναι από 0 έως 2^n άρα 2^n+1.
Αυτό σημαίνει πως κάποιος συνδυασμός επαναλαμβάνεται. Στις θέσεις αυτές υπάρχει τέλειο τετράγωνο. Για το παράδειγμα που μας δίνετε: 7,5,3,5,7,5,3,7
Στην αρχή δεν έχει έρθει κανένα στοιχείο.
Άρα το διάνυσμα θα είναι $(0,0,0)$.
Μετά έρχεται το 7. Και το διάνυσμα γίνεται $(0,0,1)$.
Μετά έρχεται το 5. Και το διάνυσμα γίνεται $(0,1,1)$.
Μετά έρχεται το 3. Και το διάνυσμα γίνεται $(1,1,1)$.

Μετά έρχεται το 5. Και το διάνυσμα γίνεται $(1,0,1)$.
Μετά έρχεται το 7. Και το διάνυσμα γίνεται $(1,0,0)$.
Μετά έρχεται το 5. Και το διάνυσμα γίνεται $(1,1,0)$.
Μετά έρχεται το 3. Και το διάνυσμα γίνεται $(0,1,0)$.
Μετά έρχεται το 7. Και το διάνυσμα γίνεται $(0,1,1)$.
Το διάνυσμα $(0,1,1)$ εμφανίζεται δύο φορές.

Θέμα 2 (Γραφήματα και Μαθηματική Επαγωγή, 1.8 μον.)
(α) Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στο πλήθος των κορυφών, να δείξετε ότι σε κάθε tournament $T(V,E)$ με $|V|\geq 2$ κορυφές, υπάρχει κορυφή s^* που είναι προσπελάσιμη από κάθε άλλη κορυφή $\upsilon \in V\setminus\{s^*\}$ μέσω μονοπατιού (που σέβεται την κατεύθυνση των ακμών του T) μήκους το πολύ 2.

Βάση της επαγωγής: για $n=2$ ισχύει τετριμμένα.
Έστω πως ισχύει για n κορυφές και έστω s^* αυτή η κορυφή που έχει την ιδιότητα. Συμβολίζουμε με A το σύνολο των κορυφών που έχουν ακμή προς την s^* και με B το σύνολο των κορυφών που έχουν ακμή προς τις κορυφές του συνόλου A και απέχουν μήκος 2 από την s^*.
Θα δείξουμε πως ισχύει για $n+1$ κορυφές. Έστω v η νέα κορυφή. Εφόσον πρόκειται για τουρνουά η νέα κορυφή θα συνδέεται με όλες τις άλλες προς μία κατεύθυνση. Αν η v έχει ακμή προς την s^* ή προς κάποια κορυφή του συνόλου A τότε η s^* είναι η κορυφή που έχει την ιδιότητα. Αν όχι τότε έχουμε όλες τις κορυφές του A και την s^* να έχουν ακμή προς τη v. Σε αυτή την περίπτωση εξετάζουμε τις κορυφές του συνόλου B. Όλες αυτές οι κορυφές έχουν ακμή προς κορυφή του συνόλου A και εφόσον όλες οι κορυφές του A υποθέσαμε πως έχουν ακμή προς τη νέα κορυφή v η κορυφή v είναι σε αυτή την περίπτωση η ζητούμενη δηλ. είναι προσπελάσιμη από όλες τις κορυφές μέσω μονοπατιού μήκους το πολύ 2.



(β) Θεωρούμε συνεκτικό γράφημα $G(V,E)$ με n κορυφές και σύνολο $T\subseteq V$, με $|T|=2\ell\leq n$ κορυφές, για κάποιο $\ell\geq 1$. Να δείξετε ότι υπάρχουν ℓ μονοπάτια $p_1,\ldots,p_\ell$ στο G, χωρίς κοινές ακμές μεταξύ τους, στα οποία κάθε κορυφή του T εμφανίζεται ως άκρο ενός από αυτά. *Υπόδειξη:* Μπορείτε να δείξετε το ζητούμενο με επαγωγή στο n, θεωρώντας την ειδική περίπτωση που το G είναι δέντρο, και έπειτα να εξηγήσετε γιατί το ζητούμενο ισχύει για κάθε συνεκτικό γράφημα G.

Αρχικά θα αποδείξουμε το ζητούμενο στο συνεκτικό δέντρο που παίρνουμε από το αρχικό γράφημα. Τα μονοπάτια που θα βρούμε στο δέντρο υπάρχουν και στο αρχικό γράφημα.

Έστω Δ το δέντρο και $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ οι κορυφές του. Συμβολίζουμε με t_i για $i = 1,2,...,2\ell$ τις κορυφές που ανήκουν στο σύνολο $T \subseteq V$ (θα τις λέμε μαύρες κορυφές). Τις υπόλοιπες κορυφές τις συμβολίζουμε με u_i για $i = 1,2,...,n-2\ell$ (θα τις λέμε άσπρες κορυφές).

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή:

Για $n = 1$ ισχύει τετριμμένα.

Για $n = 2$ επίσης ισχύει. Οι δύο κορυφές συνδέονται με ακμή που αποτελεί και το μονοπάτι μεταξύ τους.

Έστω πως ισχύει για $n = k$ κορυφές. Θα αποδείξουμε πως ισχύει για $n = k+1$.

Αρχικά αφαιρούμε από το δέντρο όλες τις κορυφές φύλλα που είναι άσπρες. Αυτές δεν θα μου δώσουν μονοπάτια επομένως δεν τις κρατώ.

Από το δέντρο με τις $k+1$ κορυφές αφαιρούμε μία κορυφή, έστω v_i, βαθμού 1 (φύλλο). Στο δέντρο που απομένει ισχύει η επαγωγική υπόθεση. Προσθέτουμε ξανά την κορυφή που αφαιρέσαμε. Η κορυφή αυτή είναι υποχρεωτικά μαύρη εφόσον τα άσπρα φύλλα έχουν φαιρεθεί.

Διακρίνουμε 2 ενδεχόμενα:

1) Να προσθέσουμε την κορυφή αυτή στο δέντρο με ακμή που το άλλο άκρο της έστω $v_j \in T$ (είναι μαύρη κορυφή δηλαδή). Σε αυτή την περίπτωση προσθέτουμε στο δέντρο ένα μονοπάτι με άκρα τις 2 κορυφές που ανήκουν στο T (είναι και οι δύο μαύρες). Αν τις κάνουμε και τις δύο άσπρες και αφαιρέσουμε την ακμή που τις συνδέει έχουμε $n-1$ κορυφές και $2(\ell-1)$ μαύρες κορυφές που δίνουν ℓ μονοπάτια (επ. υπόθεση).
2) Να προσθέσουμε την κορυφή αυτή στο δέντρο με ακμή που το άλλο άκρο της $v_j \notin T$. Σε αυτή την περίπτωση αφαιρούμε την ακμή που τις συνδέει και αντιστρέφουμε τα χρώματα στις δύο κορυφές. Έτσι η ακμή που αρχικά ήταν μαύρη θα ανήκει σε μονοπάτι. Όταν την αφαιρέσουμε θα έχουμε $n-1$ κορυφές και $2(\ell-1)$ μαύρες κορυφές που δίνουν ℓ μονοπάτια (επ. υπόθεση).

Θέμα 3 (Ανεξάρτητα Σύνολα, 0.8 μον.)

Έστω (απλό) γράφημα $G(V,E)$ με n κορυφές. Να δείξετε ότι αν το G είναι d-κανονικό, τότε έχει ανεξάρτητο σύνολο με τουλάχιστον $n/(d+1)$ κορυφές (και να δείξετε ότι ένα τέτοιο ανεξάρτητο σύνολο μπορεί να υπολογιστεί αποδοτικά).

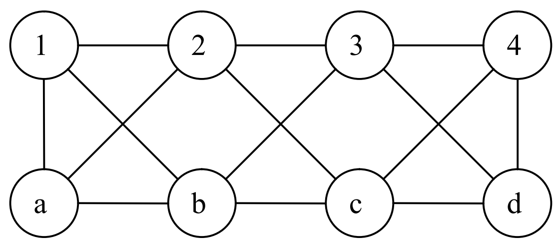
Ορίζω 2 σύνολα. Το I και το $S = V - I$. Επιλέγω τυχαία μία κορυφή και τη βάζω στο I. Στη συνέχεια (χρησιμοποιώντας κάποιο άλγοριθμο π.χ. BFS) βάζω όλους τους γείτονές της στο S. Πηγαίνω στην επόμενη κορυφή που δεν έχω συναντήσει (επομένως δεν υπάρχει στο I ή στο S). Την προσθέτω στο I και τους γείτονές της στο S. Συνεχίζω ώσπου να τελειώσουν οι κορυφές. Το I αποτελεί ανεξάρτητο σύνολο εκ κατασκευής. Για καμιά κορυφή του δεν έχω μέσα σε αυτό γείτονά της. Για κάθε κορυφή του I προσθέτω στο S το πολύ d κορυφές. Άρα σε κάθε βήμα προσθέτω το πολύ $d+1$ κορυφές στα δύο σύνολα. Θα χρειαστούν με αυτό τον τρόπο τουλάχιστον $n/(d+1)$ τέτοια βήματα. Σε κάθε τέτοιο βήμα προσθέτω μία κορυφή στο I. Επομένως θα έχω τουλάχιστον $n/(d+1)$ κορυφές στο ανεξάρτητο σύνολο. Η πολυπλοκότητα είναι γραμμική.

Θέμα 4 (Αυτοσυμπληρωματικά Γραφήματα, 1.μον.)

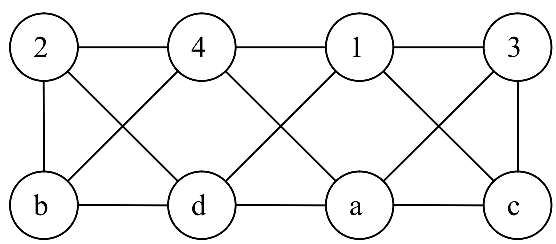
Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό $k \geq 1$, (i) υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με $4k$ κορυφές όπου οι μισές κορυφές έχουν βαθμό $2k-1$ και οι άλλες μισές έχουν βαθμό $2k$, και (ii) ότι υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με $4k+1$ κορυφές που είναι $2k$ -κανονικό. *Υπόδειξη:* Για το (i), ξεκινήστε από το P_4 και αντικαταστείστε κάθε κορυφή του είτε με ένα πλήρες γράφημα K_k είτε με ένα ανεξάρτητο σύνολο I_k .

(i) για $k=1$ έχουμε το γράφημα με 2 κορυφές βαθμού 1 (έστω οι κορυφές 1 και 4) και 2 κορυφές βαθμού 2 (έστω οι κορυφές 2 και 3) . Επομένως το γράφημα που προκύπτει είναι το μονοπάτι με ακμές (1,2),(2,3),(3,4). Το αυτοσυμπληρωματικό του είναι το γράφημα με τις κορυφές 1,4 βαθμού 2 και τις κορυφές 2,3 βαθμού 1. Επομένως είναι το μονοπάτι (2,4), (4,1), (1,3).
Για $k=2$ έχουμε το γράφημα με 8 κορυφές εκ των οποίων οι μισές είναι βαθμού 3 (1,4,a,d) και οι άλλες μισές βαθμού 4 (2,3,b,c). Στο συμπληρωματικό του είναι οι (2,3,b,c) βαθμού 3 και οι υπόλοιπες (1,4,a,d) βαθμού 4.

γράφημα 8 κορυφών

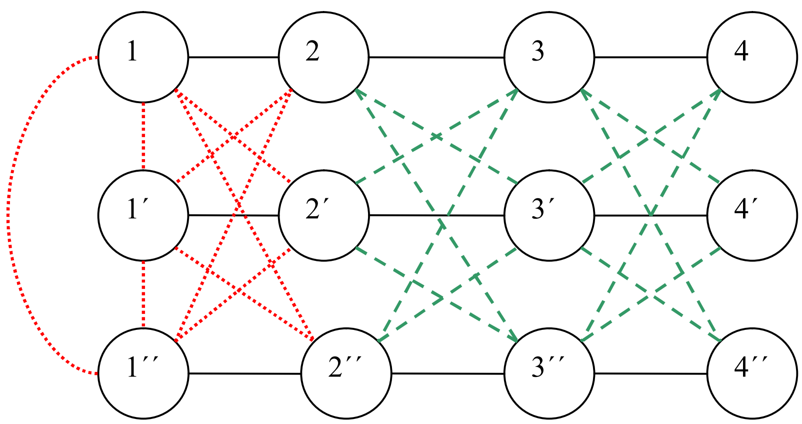


και το αυτοσυμπληρωματικό του



Για $k=3$ έχουμε το γράφημα με 12 κορυφές (τις ονομάζουμε 1 ,2 ,3 ,4 ,1΄, 2΄, 3΄, 4΄, 1΄΄,2΄΄,3΄΄,4΄΄), 6 εξ'αυτών βαθμού 5 και οι υπόλοιπες βαθμού 6. Ονομάζω εξωτερικές κορυφές τις 1,1΄,1΄΄,4,4΄,4΄΄ και εσωτερικές τις 2,2΄,2΄΄,3,3΄,3΄΄. Όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί σχεδιάζω 3 μονοπάτια το 1^{o} είναι το 1,2,3,4, το 2^{o} είναι το 1΄, 2΄, 3΄, 4΄ και το 3^{o} είναι το 1΄΄,2΄΄,3΄΄,4΄΄. Συνδέω κάθε μία από τις εξωτερικές κορυφές (1,1΄, ..., 4΄΄) με 2 γειτονικές μεταξύ τους κορυφές κάθε άλλου μονοπατιού ως εξής: Η κορυφή 1 για παράδειγμα συνδέεται με την 1΄ την 2΄ (μονοπάτι 1΄,2΄,3΄,4΄) καθώς και με τις 1΄΄ και 2΄΄ (μονοπάτι 1΄΄,2΄΄,3΄΄,4΄΄). Η κορυφή 1΄ συνδέεται αντίστοιχα με την 1 και 2 καθώς και με την 1΄΄ και 2΄΄. Η κορυφή 1΄΄ συνδέεται αντίστοιχα με τις 1΄,2΄,1,2 . Ομοίως συνεχίζω με τις 4,4΄,4΄΄. Οι εσωτερικές κορυφές συνδέονται με τις 2 μη γειτονικές μεταξύ τους του κάθε μονοπατιού. Για παράδειγμα η 3 συνδέεται με τις 2΄,4΄,2΄΄,4΄΄, ομοίως η 3΄με τις 2,4,2΄΄,4΄΄, η 3΄΄ με τις 2΄,4΄,2,4 . Ομοίως συνεχίζω με τις 2,2΄,2΄΄. Στο σχήμα φαίνονται μόνο οι συνδέσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω για να μην γίνει δυσανάγνωστο. Το γράφημα έχει 6 κορυφές βαθμού 5 και 6 κορυφές βαθμού 6.
Το αυτοσυμπληρωματκό του θα προκύψει αν επαναλάβω την ίδια διαδικασία με το προηγούμενο παράδειγμα δηλ. οι κορυφές 2 (2, 2΄και 2΄΄) μπαίνουν αντίστοιχα στη θέση των 1 (1, 1΄,1΄΄) οι 4 στη θέση των 2 οι 1 στη θέση των 3 και οι 3 στη θέση των 4.
Γενικά μπορούμε κάθε φορά που πάμε από τις $4n$ κορυφές στις $4n+4$ να προσθέτουμε ένα μονοπάτι μήκους 4 παράλληλα με τα υπόλοιπα και να συνδέουμε τις εξωτερικές κορυφές με 2 γειτονικές μεταξύ τους κορυφές κάθε μονοπατιού και τις εσωτερικές με 2 μη γειτονικές μεταξύ

τους κορυφές κάθε μονοπατιού. Έτσι προκύπτει το γράφημα με μισές κορυφές βαθμού $2n$ και τις υπόλοιπες βαθμού $2n-1$
και το αυτοσυμπληρωματικό προκύπτει αν στην πρώτη στήλη βάλω τις κορυφές της δεύτερης στη δεύτερη στήλη της 4ης κ.λπ.



(ii) Στο γράφημα του προηγούμενου ερωτήματος προσθέτω μία κορυφή που τη συνδέω με όλες τις εξωτερικές κορυφές. Όλες οι κορυφές τώρα θα έχουν βαθμό $2k$. Οι εσωτερικές γιατί δεν άλλαξε κάτι στο βαθμό τους και οι εξωτερικές γιατί ο βαθμός τους αυξήθηκε κατά 1 και από $2k-1$ έγινε $2k$. Τέλος η κορυφή που προστέθηκε έχει βαθμό $2k$ γιατί τόσες είναι οι εξωτερικές κορυφές του γραφήματος.

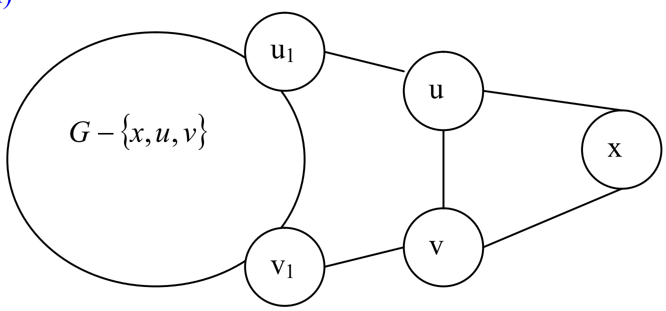
Θέμα 5 (Κύκλος Euler, Κύκλος Hamilton, 1.8 μονάδες)

α) Να δείξετε ότι μπορούμε πάντα να προσανατολίσουμε όλες τις ακμές ενός μη κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος G ώστε για κάθε κορυφή u, ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός της u είτε να είναι ίσοι είτε να διαφέρουν κατά 1.

β) Έστω γράφημα G και έστω x μια κορυφή του G τέτοια ώστε το $G-x$ να έχει κύκλο Hamilton. Υποθέτουμε ότι το G έχει δύο κορυφές u και v που έχουν βαθμό 3 και είναι γειτονικές με την x. (i) Να δείξετε ότι αν οι u και v συνδέονται μεταξύ τους, τότε και το G έχει κύκλο Hamilton. (ii) Να δείξετε ότι αν οι u και v **δεν** συνδέονται μεταξύ τους, τότε το G δεν έχει απαραίτητα κύκλο Hamilton.

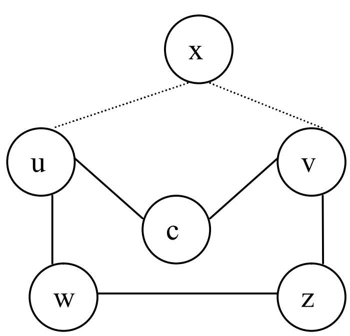
α) Εξετάζουμε 2 περιπτώσεις. Να περιέχει το γράφημα ακμές περιττού βαθμού και να μην περιέχει. Αν δεν περιέχει το γράφημα ακμές περιττού βαθμού έχουμε γράφημα με κορυφές άρτιου βαθμού και επομένως έχει κύκλο Euler. Σε αυτή την περίπτωση για κάθε ακμή που καταλήγει σε μια κορυφή υπάρχει και μια άλλη που απομακρύνεται από την κορυφή και επομένως το πλήθος των ακμών που έχουν κατεύθυνση προς την κορυφή ισούται με το πλήθος αυτών που έχουν κατεύθυνση από την κορυφή προς άλλη κορυφή. Σε αυτή την περίπτωση ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσοι. Αν περιέχει το γράφημα ακμές περιττού βαθμού τότε αυτές είναι άρτιου πλήθους και μπορώ να τις "ζευγαρώσω". Για κάθε 2 τέτοιες κορυφές ζωγραφίζω μια ακμή. Στο νέο γράφημα που προκύπτει μπορώ να βρω κύκλο Euler και να ισχύει πως ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσοι. Αν σβήσω αυτές τις ακμές κάθε τέτοια κορυφή θα έχει μία ακμή λιγότερη και επομένως ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός διαφέρουν κατά ένα. Στις υπόλοιπες κορυφές (σε αυτές που στο αρχικό γράφημα ήταν άρτιου βαθμού) ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός είναι ίσοι.

β)
(i)



Η κορυφή u συνδέεεται με τον κύκλο Hamilton του γραφήματος $G-x$ μέσω των ακμών u_1u και uv (η τρίτη ακμή που προσπίπτει στην u δεν ανήκει στο γράφημα). Επομένως ο κύκλος περνά διαδοχικά από τις ακμές u_1uvv_1. Μπορώ να φτιάξω τον ίδιο κύκλο με μόνη αλλαγή να μην περνά από την ακμή uv και να παρεμβάλω την κορυφή x. Έτσι ο κύκλος θα φτάνει στην u θα επισκέπτεται την x και στη συνέχεια την v.

(ii) Στην περίπτωση που οι u και v δεν είναι γειτονικές δεν έχω απαραίτητα κύκλο Hamilton. Όπως για παράδειγμα το παρακάτω γράφημα. Αρχικά έχει κύκλο hamilton ενώ με την προσθήκη της x δεν έχει.



Θέμα 6 (Δέντρα, 1.8 μον.)

α) Έστω $n \geq 2$ θετικοί ακέραιοι $d_1, d_2, ..., d_n$. Να δείξετε ότι $d_1 + ... + d_n = 2(n-1)$ αν και μόνο αν υπάρχει δέντρο T με n κορυφές και βαθμούς κορυφών $d_1, d_2, ..., d_n$.

Αποδεικνύουμε πρώτα πως αν $d_1 + ... + d_n = 2(n-1) \Rightarrow \exists$ δέντρο T με βαθμούς κορυφών $d_1, d_2, ..., d_n$. Εφαρμόζουμε επαγωγή.

Επαγωγική Βάση:

Για $n = 2$ ισχύει. Έχουμε το δέντρο *με μία ρίζα και έναν απόγονο* $d_1 = 1$, $d_2 = 1$ και $d_1 + d_2 = 2(2-1)$

Για $n = 3$ επίσης ισχύει. Έχουμε το δέντρο *με μία ρίζα και δύο απογόνους* $d_1 = 2$, $d_2 = 1$ $d_3 = 1$ και $d_1 + d_2 + d_3 = 2(3-1)$.

Επαγωγική Υπόθεση:

Έστω πως για $n = k-1$ κατασκευάζουμε το δέντρο με άθροισμα βαθμών $2(k-1-1) = 2(k-2)$.

Επαγωγική Βήμα:

Θα πρέπει να αποδείξουμε πως για $n = k$ μπορούμε να κατασκευάσουμε δέντρο με άθροισμα βαθμών $2(k-1)$.

Καταρχάς αποδεικνύουμε πως ένα από τα $d_1, d_2, ..., d_k$ έχει τιμή 1. Αν $\forall i \ \ d_i \geq 2$ τότε $d_1 + ... + d_n \geq 2k$. Άτοπο διότι $d_1 + ... + d_k = 2(k-1)$. Θεωρούμε χβγ πως $d_1 = 1$

Αντίστοιχα υπάρχει $d_i \geq 2$. Διότι αν $\forall i \ \ d_i = 1$ τότε $\sum_{i=1}^{n} d_i = k$. Άτοπο. Επίσης θεωρούμε χβγ πως $d_2 \geq 2$.

Ισχύει πως

$$d_1 + ... + d_k = 2(k-1) \Rightarrow d_2 + ... + d_k = 2(k-1) - d_1 \Rightarrow d_2 + ... + d_k = 2(k-1) - 1 \Rightarrow$$
$$(d_2 - 1) + ... + d_k = 2(k-1) - 1 - 1 \Rightarrow (d_2 - 1) + ... + d_k = 2(k-2)$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχω τέτοιο δέντρο. Στην κορυφή με βαθμό $d_2 - 1$ προσθέτω μιά ακμή που καταλήγει σε μια νέα κορυφή με βαθμό 1. Έτσι $1 + (d_2 - 1) + 1 + ... + d_k = 2(k-2) + 2 = 2(k-1)$. Κατασκευάσαμε έτσι δέντρο με βαθμούς $d_1, d_2, ..., d_k$.

Αν $\exists$ δέντρο T με βαθμούς κορυφών $d_1, d_2, ..., d_n \Rightarrow$ το άθροισμα των βαθμών του $d_1 + ... + d_n = 2(n-1)$.

Το πλήθος των ακμών του δέντρου με n κορυφές είναι $n-1$.

Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών είναι διπλάσιο αυτού των ακμών δηλ. $2(n-1)$.

β) Έστω απλό μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E, w)$ με θετικά βάρη $w : E \to N^*$ στις ακμές. Μία ακμή $e \in E$ καλείται απαραίτητη για το Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο (ΕΣΔ) του G αν η αφαίρεσή της οδηγεί σε αύξηση του βάρους του ΕΣΔ, δηλ. αν ΕΣΔ(G)<ΕΣΔ($G - e$). Να δείξετε ότι μια ακμή $e \in E$ είναι απαραίτητη για το ελάχιστο συνδετικό δέντρο του G **αν και μόνο αν** υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ τέτοια ώστε η e να είναι η μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$, δηλ. για κάθε ακμή $e' = \{u, \upsilon\}$ με $u \in S$, $\upsilon \in V \setminus S$ και $e' \neq e$, έχουμε ότι $w(e) < w(e')$.

Για το ευθύ της συνεπαγωγής πρέπει να αποδείξουμε πως αν $e \in E$ είναι απαραίτητη για το ελάχιστο συνδετικό δέντρο του $G \Rightarrow$ υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ τέτοια ώστε η e να είναι η μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$.
Απόδειξη
Έστω $e \in E$ είναι απαραίτητη για το ελάχιστο συνδετικό δέντρο του G. Υποθέτουμε πως για κάθε τομή του γραφήματος υπάρχει ακμή με βάρος μικρότερο ή ίσο της e που διασχίζει αυτή την τομή. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε τομή θα μπορώ να επιλέγω για την κατασκευή του ΕΣΔ μία ακμή διαφορετική από την e και επομένως να μην την χρησιμοποιήσω για την κατασκευή του ΕΣΔ. Άτοπο. Άρα υπάρχει τομή τέτοια ώστε η e να είναι η μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους που τη διασχίζει.

Για το ανάστροφο της συνεπαγωγής πρέπει να αποδείξουμε πως
Αν υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ τέτοια ώστε η e να είναι η μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$ $\Rightarrow e \in E$ είναι απαραίτητη για το ελάχιστο συνδετικό δέντρο του G.
Απόδειξη
Υποθέτουμε πως υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ τέτοια ώστε η e να είναι η μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$. Κάθε ΕΣΔ διασχίζει όλες τς τομές. Αν κατά την κατασκευή του ΕΣΔ T δεν επιλέξω την e θα επιλέξω ακμή e' με μεγαλύτερο βάρος και το νέο ΕΣΔ T' δεν θα έχει την e και θα έχει την e'. Δεδομένου ότι $w(e) < w(e')$ θα ισχύει $w(T) < w(T')$ και επομένως το T' δεν είναι ΕΣΔ.

Θέμα 7 (Επιπεδότητα, 1.6 μον.)
α) Έστω $k \geq 3$ φυσικός αριθμός. Θεωρούμε *απλό επίπεδο* γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές και m ακμές το οποίο δεν έχει κύκλους με μήκος μικρότερο ή ίσο του $k-1$ (δηλ. αν το G έχει κύκλους, τότε το μήκος κάθε κύκλου στο G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του k). Να δείξετε ότι κάθε τέτοιο απλό επίπεδο γράφημα G έχει πλήθος ακμών $m \leq \frac{k}{k-2}(n-2)$.
Αν οι κύκλοι του είναι μήκους τουλάχιστον k τότε κάθε όψη ορίζεται από k τουλάχιστον ακμές. Ισχύει $k \cdot f \leq 2m$. Επειδή πρόκειται για συνεκτικό επίπεδο γράφημα ισχύει πως $m + 2 = n + f$. Κάνοντας πράξεις $k \cdot (m + 2 - n) \leq 2 \cdot m \Rightarrow \ldots \Rightarrow m \leq \frac{k}{k-2}(n-2)$.

β) Θεωρούμε συνεκτικό επίπεδο γράφημα στο οποίο όλες οι όψεις έχουν βαθμό 5 ή 6. Να δείξετε ότι (i) αν ο βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσος με 3, τότε το γράφημα έχει 12 όψεις βαθμού 5, και (ii) ότι αν ο βαθμός κάθε κορυφής είναι τουλάχιστον 3, τότε υπάρχουν τουλάχιστον 12 όψεις βαθμού 5.

(i) Υποθέτουμε πως έχουμε x όψεις βαθμού 5 και y όψεις βαθμού 6 $f = x + y$ (1)
Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών ενός γραφήματος είναι διπλάσιο του πλήθους των ακμών.
Επομένως για γράφημα με βαθμό κάθε κορυφής ίσο με 3 ισχύει $3n = 2m$ (2)
Από τον τύπο του Euler προκύπτει πως: $n + f = m + 2 \Rightarrow f = m/3 + 2$ (3)
Το δυϊκό γράφημα έχει ίδιο πλήθος ακμών με το αρχικό και πλήθος κορυφών f (μία όψη για κάθε κορυφή). Οι βαθμοί των κορυφών του δυϊκού γραφήματος είναι 5 και 6. Επομένως ισχύει πως $5x + 6y = 2m$ (4)
Προσπαθώ να υπολογίσω το x
Από την (1) προκύπτει $x = f - y \Rightarrow$ λόγω της (3) $\Rightarrow x = m/3 + 2 - y$

Από (4) προκύπτει $y = \dfrac{2m-5x}{6}$. Επομένως $x = m/3 + 2 - y = m/3 + 2 - \dfrac{2m-5x}{6} \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = 12$

(ii) Η διαφορά εδώ είναι πως η ισότητα (2) γίνεται $3n \le 2m$. Και με πράξεις προκύπτει το ζητούμενο.

Θέμα 8 (Χρωματικός Αριθμός, 0.8 μον.)

Να δείξετε ότι για τον χρωματικό αριθμό του καρτεσιανού γινομένου κάθε γραφήματος G με το πλήρες γράφημα K_q ισχύει ότι $\chi(G \times K_q) = \max\{\chi(G), q\}$.

Το G περιέχεται στο $G \times K_q$ επομένως $\chi(G \times K_q) \ge \chi(G)$

Το K_q περιέχεται στο $G \times K_q$ επομένως $\chi(G \times K_q) \ge \chi(K_q)$

Επομένως ισχύει πως $\chi(G \times K_q) \ge \max\{\chi(G), q\}$

Έστω $\chi(G) < \chi(K_q)$. Ο χρωματικός αριθμός του K_q είναι q. Έστω οι κορυφές του $1,2,3,\ldots,q$. Δίνω σε κάθε μία ένα χρώμα. $\chi_1, \chi_2, .., \chi_q$. Αυτός ο χρωματισμός ισχύει για το πρώτο αντίγραφο του K_q. Στο δεύτερο αλλάζω τα χρώματα στις κορυφές κατά μία θέση και δίνω τα χρώματα $\chi_q, \chi_1, \chi_2 .., \chi_{q-1}$ στις κορυφές $1,2,3,\ldots,q$ αντίστοιχα. Ομοίως συνεχίζω για το τρίτο αντίγραφο κ.λπ. Επομένως $\chi(G \times K_q) = \chi(G)$.

Το αντίστοιχο ισχύει όταν $\chi(G) > \chi(K_q)$.