	ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ **ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ** Διδάσκοντες: Δ.Φωτάκης, Δ. Σούλιου **2η Γραπτή Εργασία**

Θέμα 1 (Αρχή του Περιστερώνα, 1.8 μονάδες)

(α) Επιλέγουμε αυθαίρετα n φυσικούς αριθμούς από το σύνολο $\{1,2,3...,2^n-3,2^n-2\}$. Να δείξετε ότι μεταξύ των αριθμών που έχουμε επιλέξει υπάρχει πάντα ένα ζευγάρι όπου ο μεγαλύτερος από τους δύο αριθμούς είναι μικρότερος ή ίσος από το διπλάσιο του άλλου (π.χ., για $n=3$, αν επιλέξουμε τους αριθμούς 1,3,6, έχουμε ότι $6 \le 2*3$.

Περιστέρια: οι n αριθμοί που επιλέξαμε
Φωλιές : ορίζω τις φωλιές ως εξής:

Σε κάθε φωλιά βάζω τους αριθμούς $\frac{2^n-2}{2}$, . . . , 2^n-2 (για $n>1$)
Στην πρώτη φωλιά ($n=2$) βάζω τους αριθμούς 1,2
Στη δεύτερη φωλιά ($n=3$)βάζω τους αριθμούς 3,4,5,6
Στην τρίτη φωλιά ($n=4$) βάζω τους αριθμούς 7,8,9,10,11,12,13,14
Οι φωλιές που έχω είναι $n-1$. Απόδειξη: Έστω πως έχω k φωλιές
Έχω στην πρώτη φωλιά 2 αριθμούς, στη δεύτερη 4, στην τρίτη 8 κ.λπ στην k έχω 2^k
$2+4+8+...+2^k=2^n-2$ διαιρώ με το 2 και παίρνω $1+2+4+...+2^{k-1}=2^{n-1}-1 \Rightarrow$
$2^k-1=2^{n-1}-1 \Rightarrow k=n-1$ φωλιές άρα δύο αριθμοί στην ίδια φωλιά. Έστω x και y οι αριθμοί στην ίδια φωλιά και έστω $x<y$. Τότε από τον τρόπο που έφτιαξα τις φωλιές έχω $y \le 2x$.

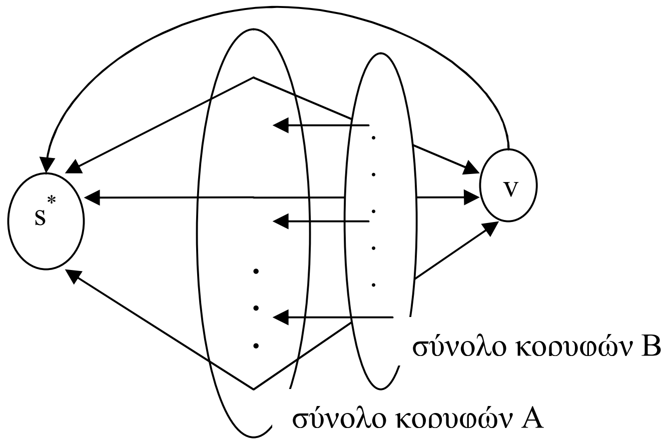
(β) Θεωρούμε μια ακολουθία N θετικών ακεραίων η οποία περιέχει ακριβώς n διαφορετικούς αριθμούς. Να δείξετε ότι αν $N \ge 2^n$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο ή περισσότερες διαδοχικές θέσεις της ακολουθίας τέτοιες ώστε το γινόμενο των αντίστοιχων αριθμών να είναι ένα τέλειο τετράγωνο. Π.χ., στην ακολουθία 7, 5, 3, 5, 7, 5, 3, 7, όπου $n=3$ και $N=2^3$ το γινόμενο των έξι τελευταίων διαδοχικών θέσεων είναι τέλειο τετράγωνο.

Αρκεί να αποδείξουμε πως υπάρχει τμήμα της ακολουθίας όπου το κάθε στοιχείο που υπάρχει μέσα σε αυτές επαναλαμβάνεται άρτιο πλήθος φορών. Μετρούμε το πλήθος των εμφανίσεων κάθε στοιχείου από την αρχή της ακολουθίας έως τη θέση που βρισκόμαστε και συμπληρώνουμε στο διάνυσμα των εμφανίσεων των στοιχείων την τιμή 1 αν το πλήθος των εμφανίσεων του στοιχείου είναι περιττό και 0 αν είναι άρτιο.
Όλοι αυτοί οι πιθανοί διαφορετικοί συνδυασμοί είναι 2^n ενώ οι θέσεις στην ακολουθία είναι από 0 έως 2^n άρα 2^n+1.
Αυτό σημαίνει πως κάποιος συνδυασμός επαναλαμβάνεται. Στις θέσεις αυτές υπάρχει τέλειο τετράγωνο. Για το παράδειγμα που μας δίνετε: 7,5,3,5,7,5,3,7
Στην αρχή δεν έχει έρθει κανένα στοιχείο.
Άρα το διάνυσμα θα είναι $(0,0,0)$.
Μετά έρχεται το 7. Και το διάνυσμα γίνεται $(0,0,1)$.
Μετά έρχεται το 5. Και το διάνυσμα γίνεται $(0,1,1)$.
Μετά έρχεται το 3. Και το διάνυσμα γίνεται $(1,1,1)$.
Μετά έρχεται το 5. Και το διάνυσμα γίνεται $(1,0,1)$.

Μετά έρχεται το 7. Και το διάνυσμα γίνεται $(1,0,0)$.
Μετά έρχεται το 5. Και το διάνυσμα γίνεται $(1,1,0)$.
Μετά έρχεται το 3. Και το διάνυσμα γίνεται $(0,1,0)$.
Μετά έρχεται το 7. Και το διάνυσμα γίνεται $(0,1,1)$.
Το διάνυσμα $(0,1,1)$ εμφανίζεται δύο φορές.

Θέμα 2 (Γραφήματα και Μαθηματική Επαγωγή, 1.8 μον.)
(α) Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στο πλήθος των κορυφών, να δείξετε ότι σε κάθε tournament $T(V,E)$ με $|V|\geq 2$ κορυφές, υπάρχει κορυφή s^* που είναι προσπελάσιμη από κάθε άλλη κορυφή $\upsilon \in V \setminus \{s^*\}$ μέσω μονοπατιού (που σέβεται την κατεύθυνση των ακμών του T) μήκους το πολύ 2.

Βάση της επαγωγής: για $n=2$ ισχύει τετριμμένα.
Έστω πως ισχύει για n κορυφές και έστω s^* αυτή η κορυφή που έχει την ιδιότητα. Συμβολίζουμε με A το σύνολο των κορυφών που έχουν ακμή προς την s^* και με B το σύνολο των κορυφών που έχουν ακμή προς τις κορυφές του συνόλου A και απέχουν μήκος 2 από την s^*.
Θα δείξουμε πως ισχύει για $n+1$ κορυφές. Έστω v η νέα κορυφή. Εφόσον πρόκειται για τουρνουά η νέα κορυφή θα συνδέεται με όλες τις άλλες προς μία κατεύθυνση. Αν η v έχει ακμή προς την s^* ή προς κάποια κορυφή του συνόλου A τότε η s^* είναι η κορυφή που έχει την ιδιότητα. Αν όχι τότε έχουμε όλες τις κορυφές του A και την s^* να έχουν ακμή προς τη v. Σε αυτή την περίπτωση εξετάζουμε τις κορυφές του συνόλου B. Όλες αυτές οι κορυφές έχουν ακμή προς κορυφή του συνόλου A και εφόσον όλες οι κορυφές του A υποθέσαμε πως έχουν ακμή προς τη νέα κορυφή v η κορυφή v είναι σε αυτή την περίπτωση η ζητούμενη δηλ. είναι προσπελάσιμη από όλες τις κορυφές μέσω μονοπατιού μήκους το πολύ 2.



(β) Έστω φυσικός $r\geq 2$. Χρησιμοποιώντας (ισχυρή) μαθηματική επαγωγή στο πλήθος των κορυφών, να δείξετε ότι για κάθε $n\geq 1$, κάθε (απλό μη κατευθυνόμενο) γράφημα που έχει n κορυφές και δεν περιέχει το K_{r+1} ως υπογράφημα, έχει το πολύ $(r-1)n^2/2r$ ακμές. Να δείξετε ακόμη ότι για κάθε r, $k\geq 2$, υπάρχει γράφημα με kr κορυφές και $(r-1)rk^2/2$ ακμές που δεν περιέχει το k_{r+1} ως υπογράφημα. *Υπόδειξη:* Για τη βάση, αποδείξτε ότι το ζητούμενο ισχύει (τετριμμένα) για κάθε $n\leq r$. Για το επαγωγικό βήμα, μπορείτε να διαμερίσετε τις κορυφές σε δύο ομάδες, με r και $n-r$ κορυφές, και να εφαρμόσετε την επαγωγική υπόθεση στο υπογράφημα με $n-r$ κορυφές.

Για $n \le r$ ισχύει τετριμμένα. Διότι δεν γίνεται να περιέχει το K_{r+1} και επίσης ένα γράφημα με n κορυφές θα έχει το πολύ $n(n-1)/2$ ακμές. Θα υποθέσουμε το αντίθετο και θα καταλήξουμε σε :
$n(n-1)/2 \ge (r-1)n^2/2r \Leftrightarrow r\,n(n-1)/2\,r \ge (r-1)n^2/2r \Leftrightarrow rn(n-1) \ge (r-1)n^2 \Leftrightarrow$
$r(n-1) \ge (r-1)n \Leftrightarrow rn-r \ge rn-n \Leftrightarrow r \le n$
Άτοπο. Επομένως ισχύει για $n \le r$.
Έστω πως ισχύει για κάθε γράφημα με το πολύ $n-1$ κορυφές που δεν περιέχει το K_{r+1}. Δηλαδή το πλήθος των κορυφών του θα είναι το πολύ $(r-1)(n-1)^2/2r$. Θα δείξουμε πως ισχύει για n.
Έστω γράφημα G με n που δεν περιέχει το K_{r+1}. Αν το G δεν περιέχει το K_r προσθέτω τις ακμές που απαιτούνται για να το περιέχει και παίρνω το γράφο G'. Διαφορετικά τα δύο γραφήματα ταυτίζονται. Απομονώνω τις κορυφές του K_r από τις υπόλοιπες και έχω 2 ομάδες κορυφών αυτές του K_r και τις υπόλοιπες $n-r$. Οι ακμές μεταξύ των δύο ομάδων κορυφών είναι το πολύ $(r-1)(n-r)$ διότι αν συνδεόταν οι $n-r$ με τις r θα είχα το K_r.
Ισχύει πως το πλήθος ακμών του G είναι μικρότερο ή ίσο από αυτό του G' εκ κατασκευής του G'.
Το πλήθος των ακμών του G' είναι $\frac{r(r-1)}{2} + \frac{(r-1)(n-r)^2}{2r} + (r-1)(n-r) = \ldots = n^2\frac{r-1}{2r}$.
Επομένως το πλήθος των ακμών του G είναι μικρότερο ή ίσο από $(r-1)n^2/2r$.

Για την απόδειξη του ότι για κάθε r, $k \ge 2$, υπάρχει γράφημα με kr κορυφές και $(r-1)rk^2/2$ ακμές που δεν περιέχει το k_{r+1} ως υπογράφημα θεωρούμε r ανεξάρτητα σύνολα $I_{1,}I_{2,}I_{3,}\ldots I_r$ με k κορυφές το καθένα και συνδέουμε κάθε κορυφή ενός τέτοιου ανεξάρτητου συνόλου με k ακμές με τις κορυφές κάθε άλλου ανεξάρτητου συνόλου. Επομένως ο βαθμός κάθε τέτοιας κορυφής είναι $k(r-1)$. Το πλήθος των ακμών θα είναι $krk(r-1)\frac{1}{2} = \frac{k^2r(r-1)}{2}$. Το γράφημα αυτό εκ κατασκευής δεν περιέχει το k_{r+1}.

Θέμα 3 (Διμερή γραφήματα, 0.8 μονάδες)
Να δείξετε ότι για κάθε (απλό μη-κατευθυνόμενο) συνεκτικό διμερές γράφημα $G(V,E)$ υπάρχει μία μοναδική διαμέριση των κορυφών του V σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Πόσες διαφορετικές διαμερίσεις υπάρχουν αν το G έχει $k \ge 2$ συνεκτικές συνιστώσες;

Το G είναι διμερές γράφημα και κατά συνέπεια υπάρχει μία διαμέριση των κορυφών του σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Θα δείξουμε πως είναι μοναδική. Θεωρούμε συνεκτικό γράφημα, επομένως υπάρχει μονοπάτι μεταξύ δύο οποιονδήποτε κορυφών. Κάθε ζεύγος κορυφών που ανήκει στο ίδιο ανεξάρτητο σύνολο συνδέεται με μονοπάτι άρτιου μήκους ενώ αν ανήκει σε διαφορετικό συνδέεται με μονοπάτι περιττού μήκους. Επομένως κάθε ζεύγος κορυφών θα συνδέεται με 2 διαφορετικά μονοπάτια και θα είχα κύκλο περιττού μήκους. Άτοπο για διμερές γράφημα. Αν το γράφημα έχει k συνεκτικές συνιστώσες και η κάθε μία από αυτές δίνει τις διαμερίσεις $(A_{1,}B_1),(A_{2,}B_2),\ldots,(A_{k,}B_k)$ για κάθε συνεκτική συνιστώσα έχουμε 2 επιλογές για να εισάγουμε τα ανεξάρτητα σύνολα στη τελική διαμέριση. Επομένως έχουμε 2^k διαμερίσεις και επειδή διπλομετράμε διαιρούμε με το 2 και έχουμε 2^{k-1} διαφορετικές διαμερίσεις.

Θέμα 4 (Ανεξάρτητα Σύνολα, 1.6 μον.)

Έστω (απλό) γράφημα $G(V,E)$ με n κορυφές.

1. Να δείξετε ότι αν το G είναι d-κανονικό, τότε έχει ανεξάρτητο σύνολο με τουλάχιστον $n/(d+1)$ κορυφές (και να δείξετε ότι ένα τέτοιο ανεξάρτητο σύνολο μπορεί να υπολογιστεί αποδοτικά).

Ορίζω 2 σύνολα. Το Ι και το $S = V - I$. Επιλέγω τυχαία μία κορυφή και τη βάζω στο Ι. Στη συνέχεια (χρησιμοποιώντας κάποιο άλγοριθμο π.χ. BFS) βάζω όλους τους γείτονές της στο S. Πηγαίνω στην επόμενη κορυφή που δεν έχω συναντήσει (επομένως δεν υπάρχει στο Ι ή στο S). Την προσθέτω στο Ι και τους γείτονές της στο S. Συνεχίζω ώσπου να τελειώσουν οι κορυφές. Το Ι αποτελεί ανεξάρτητο σύνολο εκ κατασκευής. Για καμιά κορυφή του δεν έχω μέσα σε αυτό γείτονά της. Για κάθε κορυφή του Ι προσθέτω στο S το πολύ d κορυφές. Άρα σε κάθε βήμα προσθέτω το πολύ $d+1$ κορυφές στα δύο σύνολα. Θα χρειαστούν με αυτό τον τρόπο τουλάχιστον $n/(d+1)$ τέτοια βήματα. Σε κάθε τέτοιο βήμα προσθέτω μία κορυφή στο Ι. Επομένως θα έχω τουλάχιστον $n/(d+1)$ κορυφές στο ανεξάρτητο σύνολο. Η πολυπλοκότητα είναι γραμμική.

2. Να δείξετε ότι το G έχει ανεξάρτητο σύνολο με τουλάχιστον $\Sigma_{u\in V} \dfrac{1}{\deg(u)+1}$ κορυφές, όπου $\deg(u)$ είναι ο βαθμός της κορυφής u. *Υπόδειξη:* Μπορείτε να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο του (1) σε μια τυχαία μετάθεση των κορυφών και να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή του μεγέθους του ανεξάρτητου συνόλου στο οποίο καταλήγουμε.

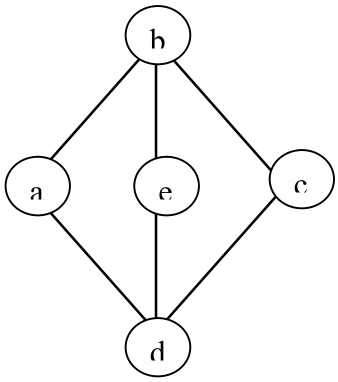
Προσθέτω μία κορυφή u στο Ι αν εμφανιστεί πριν από τους γείτονές της. Επομένως η πιθανότητα να βάλω μία κορυφή u στο Ι είναι $1/(\deg(u)+1)$. Επομένως το ανεξάρτητο σύνολο θα έχει αναμενόμενο πλήθος κορυφών $\Sigma_{u\in V} \dfrac{1}{\deg(u)+1}$. Άρα υπάρχει τέτοιο ανεξάρτητο σύνολο με τουλάχιστον $\Sigma_{u\in V} \dfrac{1}{\deg(u)+1}$ κορυφές.

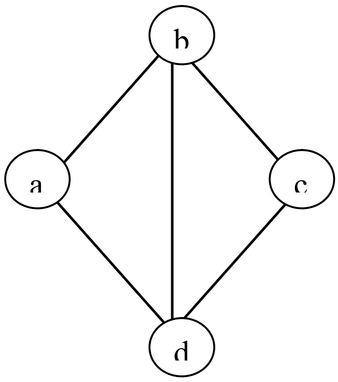
Θέμα 5 (Κύκλος Euler, Κύκλος Hamilton, 1.8 μονάδες)

(α) Θεωρούμε δύο συνεκτικά *ομοιομορφικά* γραφήματα G και H. Να διερευνήσετε αν αληθεύουν οι παρακάτω προτάσεις (και να αιτιολογήσετε κατάλληλα τις απαντήσεις σας):

1. Το G έχει κύκλωμα Euler αν και μόνο αν το H έχει κύκλωμα Euler.
2. Το G έχει κύκλωμα Hamilton αν και μόνο αν το H έχει κύκλωμα Hamilton.

1. Έστω G έχει κύκλωμα Euler. Αν υποδιαιρέσω μια ακμή ο βαθμός των άκρων της παραμένει άρτιος και η νέα κορυφή έχει βαθμό 2. Αν εφαρμόσω απλοποίηση σειράς σε μια κορυφή u βαθμού 2, και πάλι δεν αλλάζει ο βαθμός των (άλλων) δύο άκρων των ακμών που προσπίπτουν στην u, και παραμένει άρτιος. Επιπλέον αυτές οι αλλαγές δεν επηρεάζουν τη συνεκτικότητα.
2. Δεν ισχύει. Ως αντιπαράδειγμα έχουμε τα δύο γραφήματα G και H τα οποία είναι συνεκτικά και ομοιομορφικά και το πρώτο δεν έχει κύκλο Hamilton ενώ το δεύτερο έχει τον κύκλο (a,b,c,d,a).





(β) Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στο n, να δείξετε ότι κάθε απλό γράφημα με $n \geq 3$ κορυφές και τουλάχιστον $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2$ ακμές έχει κύκλο Hamilton. Να δείξετε ακόμη ότι για κάθε $n \geq 3$, υπάρχει απλό γράφημα με n κορυφές και $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ ακμές που δεν έχει κύκλο Hamilton.

Βάση: Για $n=3$ ισχύει διότι έχουμε 3 ακμές και επομένως εύκολα φτιάχνουμε κύκλο Hamilton. Επαγωγικό υπόθεση: Για $n=k-1$ έστω πως ισχύει. Επαγωγικό βήμα: Θέλουμε να δείξουμε πως για $n=k$ το γράφημα G με $\frac{(k-1)(k-2)}{2}+2$ ακμές έχει κύκλο Hamilton. Αφαιρούμε μία κορυφή από το γράφημα G με τις k κορυφές. Επιλέγουμε αυτή με τον μεγαλύτερο βαθμό κορυφής. Θα θέλαμε το γράφημα που προκύπτει να έχει κύκλο Hamilton λόγω επαγωγικής υπόθεσης. Σε αυτή την περίπτωση θα ξεκινούσαμε να σχεδιάζουμε τον κύκλο Hamilton για το γράφημα με $k-1$ κορυφές. Ο στόχος μας είναι προσθέτοντας τη νέα κορυφή u να μπορούμε να φύγουμε από μία κορυφή x του $G-u$ να πάμε ακολουθώντας μία ακμή στην u και να επιστρέψουμε μέσω μιάς άλλης ακμής στην επόμενη κορυφή y του γραφήματος $G-u$ την οποία θα επισκεφτόταν ο κύκλος Hamilton του $G-u$ γραφήματος αν δεν χρειαζόταν να μεσολαβήσει η u. Θέλουμε επομένως η u να μεσολαβεί σε δύο διαδοχικές κορυφές του $G-u$. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει καταρχάς να έχει βαθμό ≥ 2 που ισχύει διότι διαφορετικά το πλήθος των ακμών του γραφήματος θα ήταν μικρότερο από αυτό που δίνεται . Πρέπει όμως να δούμε και τι βαθμό θα πρέπει να έχει για να υπάρχουν διαδοχικές κορυφές στις οποίες μπορεί να παρεμβάλλεται.

Αποδεικνύουμε πως ο βαθμός της είναι μεγαλύτερος ή ίσος του $k-2$. Έστω πως είναι μικρότερος ή ίσος του $k-3$. Το άθροισμα των βαθμών του γραφήματος θα είναι $\leq k(k-3)$ και επομένως το μέγιστο πλήθος των ακμών του θα είναι $k\frac{k-3}{2}$. Αλλά $\frac{(k-1)(k-2)}{2}+2 > k\frac{k-3}{2} \Leftrightarrow \frac{k^2-3k+2}{2}+2 > \frac{k^2-3k}{2}$. Καταλήξαμε σε άτοπο διότι υπάρχει κορυφή με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του $k-2$. Και εφόσσον $k \geq 4$ υπάρχουν διαδοχικές κορυφές με τις οποίες συνδέεται η u και μπορώ να σχηματίσω κύκλο Hamilton.
Παρατηρούμε εδώ πως πρέπει να μελετήσουμε ιδιαιτέρως την περίπτωση που υπάρχει κορυφή βαθμού $n-1$. Στην περίπτωση αυτή δεν ισχύει η επαγωγική υπόθεση. Γιατί αν από το πλήθος των ακμών του γραφήματος με n κορυφές αφαιρέσω τις ακμές της κορυφής που έχει βαθμό $n-1$ θα

πρέπει λογικά να πάρω τις ακμές του γραφήματος με $n-1$ κορυφές δηλαδή τουλάχιστον $\frac{(n-2)(n-3)}{2}+2$

$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2-(n-1) \geq \frac{(n-2)(n-3)}{2}+2 \Rightarrow n^2-3n+2-2n-2 \geq n^2-5n+6 \Rightarrow 0 \geq 6$ Άτοπο.

Στην περίπτωση αυτή το γράφημα με $n-1$ κορυφές θα έχει $\frac{(k-2)(k-3)}{2}+1$ ακμές

διότι $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2-(n-1)=\frac{(n-2)(n-3)}{2}+1$

Εφόσσον δεν είναι πλέον βέβαιο πως θα έχω απαραίτητα κύκλο Hamilton (μου λείπει μία ακμή) θα έχω τουλάχιστον μονοπάτι Hamilton. Η n-οστή κορυφή είναι βαθμού $n-1$ και επομένως συνδέεται με όλες τις άλλες κορυφές. Συνδέω την κορυφή αυτή με αυτές που δεν έκλεινε ο κύκλος Hamilton και παίρνω τώρα κύκλο Hamilton.

Το γράφημα με $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ ακμές που **δεν έχει κύκλο Hamilton** είναι το πλήρες γράφημα με $n-1$ κορυφές και μια ακμή γέφυρα από κάποια ακμή του πλήρους γραφήματος σε μεμονωμένη κορυφή.

Θέμα 6 (Δέντρα, 1.8 μον.)

(α) Έστω $n \geq 2$ θετικοί ακέραιοι $d_1, d_2, ..., d_n$. Να δείξετε ότι $d_1+...+d_n=2(n-1)$ αν και μόνο αν υπάρχει δέντρο T με n κορυφές και βαθμούς κορυφών $d_1, d_2, ..., d_n$.

Αποδεικνύουμε πρώτα πως αν $d_1+...+d_n=2(n-1) \Rightarrow \exists$ δέντρο T με βαθμούς κορυφών $d_1, d_2, ..., d_n$. Εφαρμόζουμε επαγωγή.

Επαγωγική Βάση:

Για $n=2$ ισχύει. Έχουμε το δέντρο *με μία ρίζα και έναν απόγονο* $d_1=1$, $d_2=1$ και $d_1+d_2=2(2-1)$

Για $n=3$ επίσης ισχύει. Έχουμε το δέντρο *με μία ρίζα και δύο απογόνους* $d_1=2$, $d_2=1$ $d_3=1$ και $d_1+d_2+d_3=2(3-1)$.

Επαγωγική Υπόθεση:

Έστω πως για $n=k-1$ κατασκευάζουμε το δέντρο με άθροισμα βαθμών $2(k-1-1)=2(k-2)$.

Επαγωγική Βήμα:

Θα πρέπει να αποδείξουμε πως για $n=k$ μπορούμε να κατασκευάσουμε δέντρο με άθροισμα βαθμών $2(k-1)$.

Καταρχάς αποδεικνύουμε πως ένα από τα $d_1, d_2, ..., d_k$ έχει τιμή 1. Αν $\forall i$ $d_i \geq 2$ τότε $d_1+...+d_n \geq 2k$. Άτοπο διότι $d_1+...+d_k=2(k-1)$. Θεωρούμε χβγ πως $d_1=1$

Αντίστοιχα υπάρχει $d_i \geq 2$. Διότι αν $\forall i$ $d_i=1$ τότε $\sum_{i=1}^{n} d_i = k$. Άτοπο. Επίσης θεωρούμε χβγ πως $d_2 \geq 2$.

Ισχύει πως
$d_1+...+d_k=2(k-1)\Rightarrow d_2+...+d_k=2(k-1)-d_1\Rightarrow d_2+...+d_k=2(k-1)-1\Rightarrow$
$(d_2-1)+...+d_k=2(k-1)-1-1\Rightarrow(d_2-1)+...+d_k=2(k-2)$

Από την επαγωγική υπόθεση έχω τέτοιο δέντρο. Στην κορυφή με βαθμό d_2-1 προσθέτω μιά ακμή που καταλήγει σε μια νέα κορυφή με βαθμό 1. Έτσι $1+(d_2-1)+1+...+d_k=2(k-2)+2=2(k-1)$. Κατασκευάσαμε έτσι δέντρο με βαθμούς $d_1,d_2,...,d_k$.

Αν $\exists$ δέντρο T με βαθμούς κορυφών $d_1,d_2,...,d_n\Rightarrow$ το άθροισμα των βαθμών του $d_1+...+d_n=2(n-1)$.
Το πλήθος των ακμών του δέντρου με n κορυφές είναι $n-1$.
Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών είναι διπλάσιο αυτού των ακμών δηλ. $2(n-1)$.

(β) Θεωρούμε ένα απλό μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V,E,w)$ με θετικά βάρη w: $E\to N^*$ στις ακμές και ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο (ΕΣΔ) T του G. Για κάθε ζευγάρι κορυφών u και v συμβολίζουμε με p^*_{uv} το μοναδικό $u-v$ μονοπάτι στο T. Να δείξετε ότι για κάθε ζευγάρι κορυφών u,v και για κάθε $u-v$ μονοπάτι p_{uv} στο G, ισχύει ότι $\max_{e\in p^*_{uv}}\{w(e)\}\le\max_{e\in p_{uv}}\{w(e)\}$ (δηλ. αν θεωρήσουμε ως "κόστος" ενός $u-v$ μονοπατιού p_{uv} το βάρος της βαρύτερης ακμής του, το μοναδικό $u-v$ μονοπάτι p^*_{uv} στο ΕΣΔ T ελαχιστοποιεί αυτό το κόστος για όλα τα ζευγάρια κορυφών u,v).

Έστω αυθαίρετες κορυφές u και v του G και ένα ελάχιστα συνεκτικό δέντρο T. Αν οι u και v συνδέονται με μοναδικό μονοπάτι στο G τότε το μονοπάτι αυτό θα υπάρχει αναγκαστικά και στο T και οι μέγιστες ακμές του G θα υπάρχουν και στο T. Στην περίπτωση όμως που υπάρχουν 2 ή περισσότερα μονοπάτια μεταξύ των δύο κορυφών τότε σχηματίζεται κύκλος (ή κύκλοι). Βρίσκω την ακμή μέγιστου βάρους στο μονοπάτι μεταξύ των δύο κορυφών στο δέντρο και την αφαιρώ από το T. Το δέντρο σπάει σε δύο συνεκτικές συνιστώσες. Υποθέτουμε πως υπάρχει ακμή μικρότερου βάρους (στο G) που συνδέει τις δύο συνεκτικές συνιστώσες. Βάζουμε την ακμή αυτή στο δέντρο και παίρνουμε δέντρο που έχει μικρότερο συνολικό βάρος από το T. Επομένως το T δεν είναι Ελάχιστα Συνδετικό Δέντρο.

Θέμα 7 (Επιπεδότητα, 1.6 μον.)
Έστω $k\ge 3$ φυσικός αριθμός. Θεωρούμε *απλό επίπεδο* γράφημα $G(V,E)$ με n κορυφές και m ακμές το οποίο δεν έχει κύκλους με μήκος μικρότερο ή ίσο του $k-1$ (δηλ. αν το G έχει κύκλους, τότε το μήκος κάθε κύκλου στο G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του k).

1. Να δείξετε ότι κάθε τέτοιο απλό επίπεδο γράφημα G έχει πλήθος ακμών $m\le\frac{k}{k-2}(n-2)$.

Αν οι κύκλοι του είναι μήκους τουλάχιστον k τότε κάθε όψη ορίζεται από k τουλάχιστον ακμές. Ισχύει $k\cdot f\le 2m$. Επειδή πρόκειται για συνεκτικό επίπεδο γράφημα ισχύει πως $m+2=n+f$. Κάνοντας πράξεις $k\cdot(m+2-n)\le 2\cdot m\Rightarrow...\Rightarrow m\le\frac{k}{k-2}(n-2)$.

2. Να δείξετε ότι κάθε απλό επίπεδο γράφημα G που δεν έχει κύκλους με μήκος μικρότερο ή ίσο του 5, (i) έχει τουλάχιστον μία κορυφή με βαθμό μικρότερο ή ίσο του 2, και (ii) έχει χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του 3. Να βρείτε ένα τέτοιο γράφημα με χρωματικό αριθμό ίσο με 3.

(i) Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα το πλήθος των ακμών ενός τέτοιου γραφήματος θα είναι μικρότερος ή ίσος με $\frac{6}{4}(n-2)=\frac{3}{2}(n-2)$. Αν όλες οι κορυφές του γραφήματος έχουν βαθμό μεγαλύτερο του 2 τότε θα έχω τουλάχιστον $\frac{3n}{2}$ ακμές. Άτοπο.

(ii) Απόδειξη με επαγωγή στο πλήθος των κορυφών. Για 1ή 2 κορυφές ισχύει.
Επαγωγική υπόθεση: Έστω πως όλα τα γραφήματα με n κορυφές που δεν έχουν κύκλους μικρότερους ή ίσους του 5 έχουν χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του 3.
Επαγωγικό βήμα: Θα αποδείξουμε πως όλα τα γραφήματα με $n+1$ κορυφές που δεν έχουν κύκλους μικρότερους ή ίσους του 5 έχουν χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του 3. Αποδείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα πως κάθε τέτοιο γράφημα έχει τουλάχιστον μία κορυφή με βαθμό μικρότερο ή ίσο του 2. Αφαιρούμε αυτή την κορυφή και παίρνουμε γράφημα που ικανοποιεί την επαγωγική υπόθεση (καθώς και την ιδιότητα μη ύπαρξης κύκλων με μήκος μικρότερο ή ίσο του 5) και επομένως χρωματίζεται με 3 χρώματα. Προσθέτω την κορυφή αυτή και τη χρωματίζω με το τρίτο χρώμα, θεωρώντας πως οι δύο το πολύ κορυφές με τις οποίες συνδέεται έχουν πάρει τα άλλα χρώματα. Παράδειγμα τέτοιου γραφήματος είναι κάθε κύκλος με μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του 6.

Θέμα 8 (Χρωματικός Αριθμός, 0.8 μον.)
Να δείξετε ότι για τον χρωματικό αριθμό του καρτεσιανού γινομένου κάθε γραφήματος G με το πλήρες γράφημα K_q ισχύει ότι $\chi(G\times K_q)=\max\{\chi(G),q\}$.

Το G περιέχεται στο $G\times K_q$ επομένως $\chi(G\times K_q)\geq\chi(G)$
Το K_q περιέχεται στο $G\times K_q$ επομένως $\chi(G\times K_q)\geq\chi(K_q)$
Επομένως ισχύει πως $\chi(G\times K_q)\geq\max\{\chi(G),q\}$
Έστω $\chi(G)<\chi(K_q)$. Ο χρωματικός αριθμός του K_q είναι q. Έστω οι κορυφές του $1,2,3,\ldots,q$. Δίνω σε κάθε μία ένα χρώμα. $\chi_1,\chi_2,..,\chi_q$. Αυτός ο χρωματισμός ισχύει για το πρώτο αντίγραφο του K_q. Στο δεύτερο αλλάζω τα χρώματα στις κορυφές κατά μία θέση και δίνω τα χρώματα $\chi_q,\chi_1,\chi_2..,\chi_{q-1}$ στις κορυφές $1,2,3,\ldots,q$ αντίστοιχα. Ομοίως συνεχίζω για το τρίτο αντίγραφο κ.λπ. Επομένως $\chi(G\times K_q)=\chi(G)$.
Το αντίστοιχο ισχύει όταν $\chi(G)>\chi(K_q)$.