	ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ **ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ** Διδάσκοντες: Δ.Φωτάκης, Δ. Σούλιου **2η Γραπτή Εργασία**

Θέμα 1 (Αρχή του Περιστερώνα, 1.8 μονάδες)

α) Σε ένα διάστημα 120 ημερών, μία αεροσυνοδός κάνει τουλάχιστον ένα ταξίδι κάθε ημέρα, και όχι περισσότερα από 180 ταξίδια συνολικά. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα διάστημα (αποτελούμενο από διαδοχικές ημέρες) όπου η αεροσυνοδός κάνει ακριβώς 59 ταξίδια.

Έστω a_j το πλήθος των ταξιδιών που κάνει η αεροσυνοδός μέχρι την j ημέρα.
Σχηματίζω μία ακολουθία που αποτελείται από τα a_j. Την $a_1, a_2, a_3, ..., a_{120}$.
Ισχύει πως $\forall a_j\, j = 1,2,...,120 \;\; 1 \leq a_j \leq 180$. Ισχύει επίσης πως κανένας όρος της ακολουθίας δεν είναι ίσος με τον άλλον.
Σχηματίζω επίσης μία νέα ακολουθία με όρους $b_i = a_i + 59$. Γι' αυτήν ισχύει πως $1 + 59 \leq b_j \leq 180 + 59 \Rightarrow 60 \leq b_j \leq 239$. Και εδώ ισχύει πως κανένας όρος της ακολουθίας δεν είναι ίσος με τον άλλον.
Παίρνω τους όρους και των δύο ακολουθιών "Περιστέρια" και τους βάζω σε 239 "Φωλιές" ανάλογα με την τιμή τους. Εφόσσον οι όροι και των δύο ακολουθιών έχουν τιμές ≤ 240 δύο τουλάχιστον όροι ένας από κάθε ακολουθία θα πέσουν στην ίδια "Φωλιά". Και θα ισχύει $a_k = a_l + 59$.

β) Θεωρούμε μια ακολουθία θετικών ακεραίων η οποία περιέχει ακριβώς διαφορετικούς αριθμούς. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ή περισσότερες διαδοχικές θέσεις της ακολουθίας τέτοιες ώστε το γινόμενο των αντίστοιχων αριθμών να είναι ένα τέλειο τετράγωνο. Π.χ. στην ακολουθία 7,5,3,5,7,5,3,7, να δείξετε το γινόμενο των έξι τελευταίων θέσεων είναι τέλειο τετράγωνο.

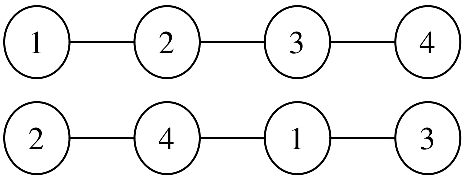
Αρκεί να αποδείξουμε πως υπάρχουν διαδοχικές θέσεις στην ακολουθία που το κάθε στοιχείο που υπάρχει μέσα σε αυτές επαναλαμβάνεται άρτιο πλήθος φορών.
Μετρούμε το πλήθος των εμφανίσεων κάθε στοιχείου από την αρχή της ακολουθίας έως τη θέση που βρισκόμαστε και συμπληρώνουμε στο διάνυσμα των εμφανίσεων των στοιχείων την τιμή 1 αν το πλήθος των εμφανίσεων του στοιχείου είναι περιττό και 0 αν είναι άρτιο.
Όλοι αυτοί οι πιθανοί διαφορετικοί συνδυασμοί είναι 2^n ενώ οι θέσεις στην ακολουθία είναι από 0 έως 2^n άρα $2^n + 1$.
Αυτό σημαίνει πως κάποιος συνδυασμός επαναλαμβάνεται. Στις θέσεις αυτές υπάρχει τέλειο τετράγωνο. Για το παράδειγμα που μας δίνετε: 7,5,3,5,7,5,3,7
Στην αρχή δεν έχει έρθει κανένα στοιχείο.
Άρα το διάνυσμα θα είναι $(0,0,0)$.
Μετά έρχεται το 7. Και το διάνυσμα γίνεται $(0,0,1)$.
Μετά έρχεται το 5. Και το διάνυσμα γίνεται $(0,1,1)$.
Μετά έρχεται το 3. Και το διάνυσμα γίνεται $(1,1,1)$.

Μετά έρχεται το 5. Και το διάνυσμα γίνεται $(1,0,1)$.
Μετά έρχεται το 7. Και το διάνυσμα γίνεται $(1,0,0)$.
Μετά έρχεται το 5. Και το διάνυσμα γίνεται $(1,1,0)$.
Μετά έρχεται το 3. Και το διάνυσμα γίνεται $(0,1,0)$.
Μετά έρχεται το 7. Και το διάνυσμα γίνεται $(0,1,1)$.
Το διάνυσμα $(0,1,1)$ εμφανίζεται δύο φορές.

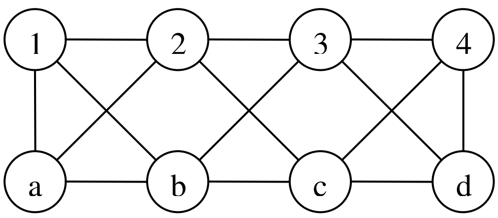
Θέμα 2 (Αυτοσυμπληρωματικά Γραφήματα, 2.0 μονάδες)

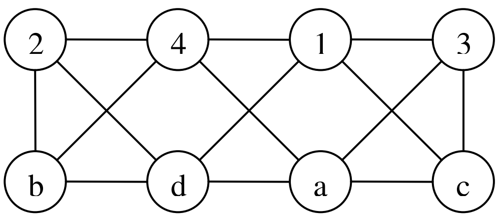
Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό $k \geq 1$, (i) υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με $4k$ κορυφές όπου οι μισές κορυφές έχουν βαθμό $2k-1$ και οι άλλες μισές έχουν βαθμό $2k$, και (ii) ότι υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με $4k+1$ κορυφές που είναι $2k$ κανονικό. Υπόδειξη: Και στις 2 περιπτώσεις μπορείτε να χρησιμοποιήσετε επαγωγή στο k.

(i) για $k=1$ έχουμε το γράφημα με 2 κορυφές βαθμού 1 και 2 κορυφές βαθμού 2. Επομένως το γράφημα που προκύπτει είναι το μονοπάτι με ακμές (1,2),(2,3),(3,4). Το αυτοσυμπληρωματικό του είναι το γράφημα με τις κορυφές 1,4 βαθμού 2 και τις κορυφές 2,3 βαθμού 1. Επομένως είναι το μονοπάτι (2,4), (4,1), (1,3).

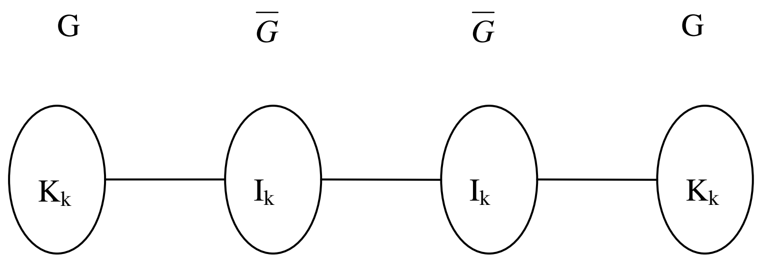


για $k=2$ κατασκευάζω γράφημα με 8 κορυφές εκ των οποίων οι μισές είναι βαθμού 3 και οι άλλες μισές βαθμού 4. Σχεδιάζω το νέο γράφημα ως εξής: Φτιάχνω 2 μονοπάτια με κορυφές του 1ου τις 1,2,3,4 και κορυφές του δεύτερου τα a,b,c,d. Ονομάζω *εξωτερικές* κορυφές τις κορυφές της πρώτης και τελευταίας στήλης και *εσωτερικές* της δεύτερης και τρίτης. Συνδέω τις κορυφές της 1ης στήλης μεταξύ τους και το ίδιο κάνω με της 4ης. Όσον αφορά τις κορυφές της 2ης και 3ης στήλης τις συνδέω χιαστί όπως φαίνεται στο σχήμα. Έτσι επιτυγχάνω το επιθυμητό βαθμό κορυφής για κάθε κορυφή. Το αυτοσυμπληρωματικό γράφημα προκύπτει εύκολα αν αλλάξω τη σειρά στις στήλες.



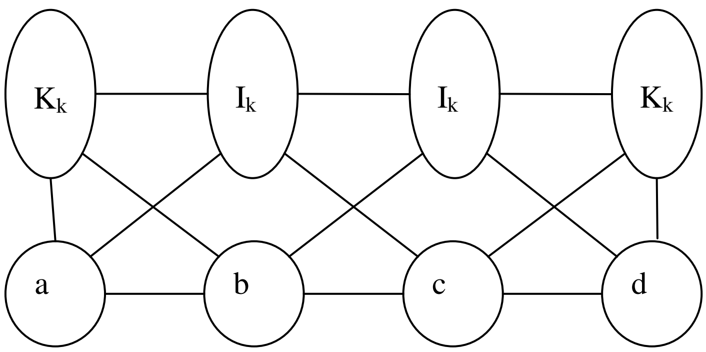


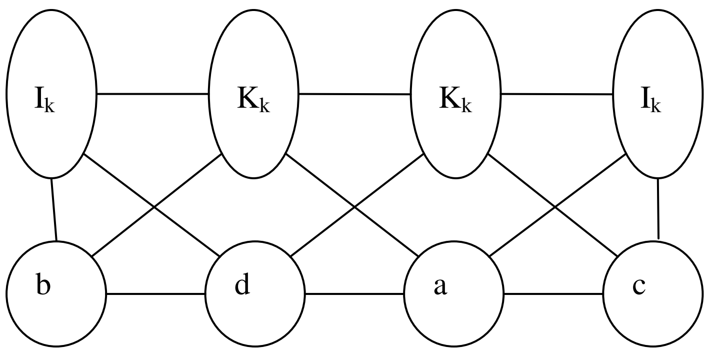
Παρατηρώ πως αν συμπτύξω τις κορυφές κάθε στήλης το παραπάνω γράφημα μπορεί να αναπαρασταθεί με το παρακάτω:



όπου K_k είναι το πλήρες γράφημα k (εδώ k=2) κορυφών και I_k το ανεξάρτητο σύνολο 2 κορυφών. Η ακμή από το K_k στο I_k αντικαθιστά τη σύνδεση όλων των κορυφών του πρώτου γραφήματος με όλες του δεύτερου. Το ίδιο ισχύει και για την ακμή από το I_k στο I_k. Το αυτοσυμπληρωματικό είναι εύκολο να κατασκευαστεί αλλάζοντας τη σειρά των στηλών (το συμπληρωματικό του πλήρους γραφήματος είναι το ανεξάρτητο σύνολο).

Για $k = 3$ προσθέτω στο προηγούμενο γράφημα ένα μονοπάτι 4 κόμβων και με αντίστοιχο τρόπο συνδέω τις ακμές. Η κορυφή a συνδέεται με ολες του K_κ και του I_k και με τη γειτονική της στο μονοπάτι (deg_a =2+2+1=5). Το ίδιο ισχύει και για την κορυφή d. Η κορυφή b συνδέεται με ολες του K_κ και με όλες του άλλου I_k καθώς και με τις γειτονικές της στο μονοπάτι (deg_b =2+2+2=6). Ο βαθμός κάθε κορυφής του K_κ αυξάνεται κατά 2 λόγω της σύνδεσής των με τα a και b. Και αντίστοιχα του άλλου K_κ με τα c και d αντίστοιχα. Ομοίως δουλεύω και για τα I_k. Το αυτοσυμπληρωματικό προκύπτει εύκολα με την ανταλλαγή των στηλών όπως έκανα παραπάνω και φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.





Με τον ίδιο τρόπο πηγαίνω από τις $4k$ κορυφές στις $4(k+1)$ και παίρνω αυτοσυμπληρωματικά γραφήματα με κορυφές βαθμού $2k-1$ και $2k$.

2ος τρόπος

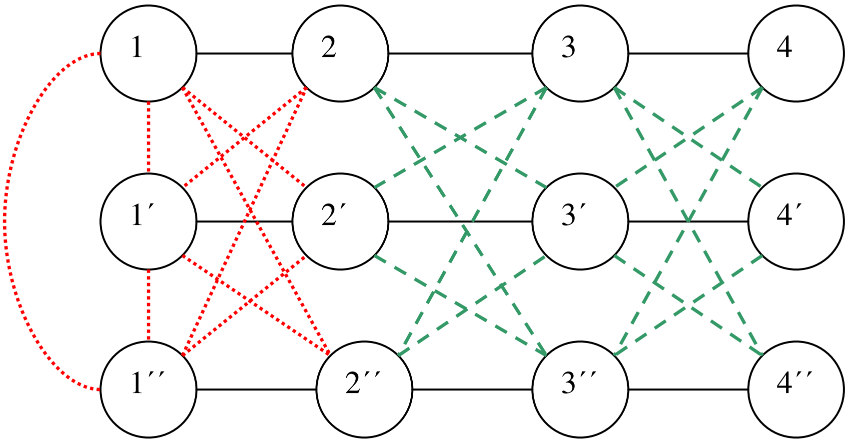
(i) για $k=1$ έχουμε το γράφημα με 2 κορυφές βαθμού 1 (έστω οι κορυφές 1 και 4) και 2 κορυφές βαθμού 2 (έστω οι κορυφές 2 και 3) . Επομένως το γράφημα που προκύπτει είναι το μονοπάτι με ακμές (1,2),(2,3),(3,4). Το αυτοσυμπληρωματικό του είναι το γράφημα με τις κορυφές 1,4 βαθμού 2 και τις κορυφές 2,3 βαθμού 1. Επομένως είναι το μονοπάτι (2,4), (4,1), (1,3).

Για $k=2$ έχουμε το γράφημα με 8 κορυφές εκ των οποίων οι μισές είναι βαθμού 3 (1,4,a,d) και οι άλλες μισές βαθμού 4 (2,3,b,c). Στο συμπληρωματικό του είναι οι (2,3,b,c) βαθμού 3 και οι υπόλοιπες (1,4,a,d) βαθμού 4.

Για $k=3$ έχουμε το γράφημα με 12 κορυφές (τις ονομάζουμε 1 ,2 ,3 ,4 ,1΄, 2΄, 3΄, 4΄, 1΄΄,2΄΄,3΄΄,4΄΄), 6 εξ'αυτών βαθμού 5 και οι υπόλοιπες βαθμού 6. Ονομάζω εξωτερικές κορυφές τις 1,1΄,1΄΄,4,4΄,4΄΄ και εσωτερικές τις 2,2΄,2΄΄,3,3΄,3΄΄. Όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί σχεδιάζω 3 μονοπάτια το 1ο είναι το 1,2,3,4, το 2ο είναι το 1΄, 2΄, 3΄, 4΄ και το 3ο είναι το 1΄΄,2΄΄,3΄΄,4΄΄. Συνδέω κάθε μία από τις εξωτερικές κορυφές (1,1΄, ..., 4΄΄) με 2 γειτονικές μεταξύ τους κορυφές κάθε άλλου μονοπατιού ως εξής: Η κορυφή 1 για παράδειγμα συνδέεται με την 1΄ την 2΄ (μονοπάτι 1΄,2΄,3΄,4΄) καθώς και με τις 1΄΄ και 2΄΄ (μονοπάτι 1΄΄,2΄΄,3΄΄,4΄΄). Η κορυφή 1΄ συνδέεται αντίστοιχα με την 1 και 2 καθώς και με την 1΄΄ και 2΄΄. Η κορυφή 1΄΄ συνδέεται αντίστοιχα με τις 1΄,2΄,1,2 . Ομοίως συνεχίζω με τις 4,4΄,4΄΄. Οι εσωτερικές κορυφές συνδέονται με τις 2 μη γειτονικές μεταξύ τους του κάθε μονοπατιού. Για παράδειγμα η 3 συνδέεται με τις 2΄,4΄,2΄΄,4΄΄, ομοίως η 3΄με τις 2,4,2΄΄,4΄΄, η 3΄΄ με τις 2΄,4΄,2,4 . Ομοίως συνεχίζω με τις 2,2΄,2΄΄. Στο σχήμα φαίνονται μόνο οι συνδέσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω για να μην γίνει δυσανάγνωστο. Το γράφημα έχει 6 κορυφές βαθμού 5 και 6 κορυφές βαθμού 6.

Το αυτοσυμπληρωματκό του θα προκύψει αν επαναλάβω την ίδια διαδικασία με το προηγούμενο παράδειγμα δηλ. οι κορυφές 2 (2, 2΄και 2΄΄) μπαίνουν αντίστοιχα στη θέση των 1 (1, 1΄,1΄΄) οι 4 στη θέση των 2 οι 1 στη θέση των 3 και οι 3 στη θέση των 4.

Γενικά μπορούμε κάθε φορά που πάμε από τις $4n$ κορυφές στις $4n+4$ να προσθέτουμε ένα μονοπάτι μήκους 4 παράλληλα με τα υπόλοιπα και να συνδέουμε τις εξωτερικές κορυφές με 2 γειτονικές μεταξύ τους κορυφές κάθε μονοπατιού και τις εσωτερικές με 2 μη γειτονικές μεταξύ τους κορυφές κάθε μονοπατιού. Έτσι προκύπτει το γράφημα με μισές κορυφές βαθμού $2n$ και τις υπόλοιπες βαθμού $2n-1$ και το αυτοσυμπληρωματικό προκύπτει αν στην πρώτη στήλη βάλω τις κορυφές της δεύτερης στη δεύτερη στήλη της 4ης κ.λπ.



(ii) Στο γράφημα του προηγούμενου ερωτήματος προσθέτω μία κορυφή που τη συνδέω με όλες τις εξωτερικές κορυφές. Όλες οι κορυφές τώρα θα έχουν βαθμό $2k$. Οι εσωτερικές γιατί δεν άλλαξε κάτι στο βαθμό τους και οι εξωτερικές γιατί ο βαθμός τους αυξήθηκε κατά 1 και από $2k-1$ έγινε $2k$. Τέλος η κορυφή που προστέθηκε έχει βαθμό $2k$ γιατί τόσες είναι οι εξωτερικές κορυφές του γραφήματος.

Θέμα 3 (Διμερή γραφήματα, 1.8 μονάδες)

α) Να δείξετε ότι για κάθε (απλό μη-κατευθυνόμενο) συνεκτικό διμερές γράφημα $G(V,E)$ υπάρχει μία μοναδική διαμέριση των κορυφών του V σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Πόσες διαφορετικές διαμερίσεις υπάρχουν αν το G έχει $k \geq 2$ συνεκτικές συνιστώσες;

(α) Το G είναι διμερές γράφημα και κατά συνέπεια υπάρχει μία διαμέριση των κορυφών του σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Θα δείξουμε πως είναι μοναδική. Θεωρούμε συνεκτικό γράφημα, επομένως υπάρχει μονοπάτι μεταξύ δύο οποιονδήποτε κορυφών. Κάθε ζεύγος κορυφών που ανήκει στο ίδιο ανεξάρτητο σύνολο συνδέεται με μονοπάτι άρτιου μήκους ενώ αν ανήκει σε διαφορετικό συνδέεται με μονοπάτι περιττού μήκους. Επομένως κάθε ζεύγος κορυφών θα συνδέεται με 2 διαφορετικά μονοπάτια και θα είχα κύκλο περιττού μήκους. Άτοπο για διμερές γράφημα. Αν το γράφημα έχει k συνεκτικές συνιστώσες και η κάθε μία από αυτές δίνει τις διαμερίσεις $(A_{1,}B_1),(A_{2,}B_2),\ldots,(A_{k,}B_k)$ για κάθε συνεκτική συνιστώσα έχουμε 2 επιλογές για να εισάγουμε τα ανεξάρτητα σύνολα στη τελική διαμέριση. Επομένως έχουμε 2^k διαμερίσεις και επειδή διπλομετράμε διαιρούμε με το 2 και έχουμε 2^{k-1} διαφορετικές διαμερίσεις.

β) Θεωρούμε ένα απλό μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V,E)$ με $n \geq 2$ κορυφές και $m \geq 1$ ακμές. Συμβολίζουμε με $Y(G)$ το γράφημα που προκύπτει από την υποδιαίρεση όλων των ακμών του G. Για την υποδιαίρεση μιας ακμής $e=\{u,v\}$, διαγράφουμε την e και προσθέτουμε μία νέα κορυφή x_e που είναι γειτονική μόνο με τα άκρα u και v της ακμής e. (i) Να δείξετε ότι το $Y(G)$ είναι διμερές γράφημα και να υπολογίσετε το πλήθος των κορυφών και των ακμών του (με δεδομένο ότι το G έχει n κορυφές και m ακμές). (ii) Να δείξετε ότι το $Y(G)$ έχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν το γράφημα G είναι ο κύκλος C_n με n κορυφές.

(β)(i) Το πλήθος των κορυφών του $Y(G)$ είναι το άθροισμα των αρχικών και των νέων (αυτές που προστέθηκαν είναι όσες και οι ακμές). Άρα το $Y(G)$ έχει $n+m$ κορυφές. Το πλήθος των ακμών του $Y(G)$ είναι διπλάσιο από το πλήθος των ακμών του αρχικού γραφήματος. Επομένως το $Y(G)$ έχει $2m$ ακμές. Οι κορυφές του γραφήματος $Y(G)$ μπορούν να διαμεριστούν σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Το ένα περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του αρχικού γραφήματος G και το άλλο όλες τις κορυφές που προστεθήκαν για την υποδιαίρεση των ακμών. Επομένως εκ κατασκευής το γράφημα $Y(G)$ είναι διμερές.
(ii) Το $Y(G)$ έχει κύκλο Hamilton ανν το G είναι το γράφημα C_n.
Ευθύ $\Rightarrow$ *Αν G είναι το γράφημα C_n τότε το $Y(G)$ έχει κύκλο Hamilton.*
Το $Y(G)$ σε αυτή την περίπτωση είναι το C_{2n} και επομένως έχει κύκλο Hamilton.
Αντίστροφο $\Leftarrow$ *Αν $Y(G)$ έχει κύκλο Hamilton τότε το G είναι το γράφημα C_n.*
Οι κορυφές του G (πλήθους n) που είναι και κορυφές του $Y(G)$ έχουν τον ίδιο βαθμό και στα δύο γραφήματα. Δεδομένου πως το $Y(G)$ έχει κύκλο Hamilton όλες οι κορυφές του θα πρέπει να έχουν βαθμό ≥ 2. Για να είναι όμως το G (συνεκτικό γράφημα) διαφορετικό του C_n και θα πρέπει μία τουλάχιστον κορυφή να έχει βαθμό > 2. Επομένως το άθροισμα των βαθμών των κορυφών θα πρέπει να είναι $> 2n$.
Οπότε έχουμε $2n < \sum_{u:\text{κορυφή του}G} \deg(u) = 2m \Rightarrow n < m$.
Το $Y(G)$ έχει κύκλο Hamilton και οι κορυφές του διαμερίζονται με μοναδικό τρόπο σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Τα δύο σύνολα έχουν ίσο πλήθος στοιχείων $n = m$. Καταλήξαμε σε άτοπο. Άρα το G είναι το C_n.

Θέμα 4 (Κύκλος Euler, Κύκλος Hamilton, 1.4 μονάδες)

α) Να δείξετε ότι μπορούμε πάντα να προσανατολίσουμε όλες τις ακμές ενός μη κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος G ώστε για κάθε κορυφή u, ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός της u είτε να είναι ίσοι είτε να διαφέρουν κατά 1.

Εξετάζουμε 2 περιπτώσεις. Να περιέχει το γράφημα ακμές περιττού βαθμού και να μην περιέχει. Αν δεν περιέχει το γράφημα ακμές περιττού βαθμού έχουμε γράφημα με κορυφές άρτιου βαθμού και επομένως έχει κύκλο Euler. Σε αυτή την περίπτωση για κάθε ακμή που καταλήγει σε μια κορυφή υπάρχει και μια άλλη που απομακρύνεται από την κορυφή και επομένως το πλήθος των ακμών που έχουν κατεύθυνση προς την κορυφή ισούται με το πλήθος αυτών που έχουν κατεύθυνση από την κορυφή προς άλλη κορυφή. Σε αυτή την περίπτωση ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσοι. Αν περιέχει το γράφημα ακμές περιττού βαθμού τότε αυτές είναι άρτιου πλήθους και μπορώ να τις “ζευγαρώσω”. Για κάθε 2 τέτοιες κορυφές ζωγραφίζω μια ακμή. Στο νέο γράφημα που προκύπτει μπορώ να βρω κύκλο Euler και να ισχύει πως ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσοι. Αν σβήσω αυτές τις ακμές κάθε τέτοια κορυφή θα έχει μία ακμή λιγότερη και επομένως ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός διαφέρουν κατά ένα. Στις υπόλοιπες κορυφές (σε αυτές που στο αρχικό γράφημα ήταν άρτιου βαθμού) ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός είναι ίσοι.

β) Έστω μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα G το οποίο έχει $k \geq 2$ κορυφές περιττού βαθμού. Να δείξετε ότι το σύνολο των ακμών του G μπορεί να διαμεριστεί σε $k/2$ μονοκονδυλιές που δεν έχουν κοινές ακμές μεταξύ τους.

Κάθε γράφημα έχει άρτιο πλήθος κορυφών περιττού βαθμού. Επομένως το $k/2$ είναι ακέραιος. Παίρνω μία κορυφή περιττού βαθμού και σχεδιάζοντας μία μονοκονδυλιά που ξεκινά από αυτή καταλήγω στην πρώτη κορυφή περιττού βαθμού που θα συναντήσω. Επειδή το γράφημα είναι συνεκτικό υπάρχει τέτοια μονοκονδυλιά. Διαγράφω τις ακμές της μονοκονδυλιάς και το γράφημα που απομένει αποτελείται από συνεκτικές συνιστώσες. Οι κορυφές περιττού βαθμού είναι τώρα $k-2$ διότι οι 2 πρώτες έχουν γίνει πλεόν άρτιου βαθμού. Κάθε συνεκτική συνιστώσα έχει άρτιο πλήθος κορυφών περιττού βαθμού. Ξεκινώ από συνιστώσα που έχει τουλάχιστον 2 κορυφές περιττού βαθμού και επαναλαμβάνω την ίδια διαδικασία. Εφόσσον οι κορυφές είναι k η διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί $k/2$ φορές. Οι συνεκτικές συνιστώσες που απομένουν έχουν κορυφές άρτιου βαθμού και επομένως έχουν κύκλο Euler. Σχεδιάζω ένα τέτοιο κύκλο για κάθε συνιστώσα και τον συνδέω με μία μονοκονδυλιά. Δεδομένης της συνεκτικότητας του αρχικού γραφήματος μπορώ να το κάνω αυτό. Έτσι καμία ακμή δεν θα μείνει εκτός μονοκονδυλιάς και το σύνολο κορυφών του γραφήματος διαμερίζεται σε $k/2$ μονοκονδυλιές που δεν έχουν κοινές ακμές μεταξύ τους.

Θέμα 5 (Συνδετικά δέντρα, 1.0 μον.)
Έστω απλό μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E, w)$ με θετικά βάρη $w : E \to N^*$ στις ακμές. Μία ακμή $e \in E$ καλείται απαραίτητη για το Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο (ΕΣΔ) του G αν η αφαίρεσή της οδηγεί σε αύξηση του βάρους του ΕΣΔ, δηλ. αν ΕΣΔ(G)<ΕΣΔ($G-e$). Να δείξετε ότι μια ακμή $e \in E$ είναι απαραίτητη για το ελάχιστο συνδετικό δέντρο του G αν και μόνο αν υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ τέτοια ώστε η e να είναι η μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$, δηλ. για κάθε ακμή $e' = \{u, \upsilon\}$ με $u \in S$, $\upsilon \in V \setminus S$ και $e' \neq e$, έχουμε ότι $w(e) < w(e')$.

Για το ευθύ της συνεπαγωγής πρέπει να αποδείξουμε πως αν $e \in E$ είναι απαραίτητη για το ελάχιστο συνδετικό δέντρο του $G \Rightarrow$ υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ τέτοια ώστε η e να είναι η μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$.
Απόδειξη
Έστω $e \in E$ είναι απαραίτητη για το ελάχιστο συνδετικό δέντρο του G. Υποθέτουμε πως για κάθε τομή του γραφήματος υπάρχει ακμή με βάρος μικρότερο ή ίσο της e που διασχίζει αυτή την τομή. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε τομή θα μπορώ να επιλέγω για την κατασκευή του ΕΣΔ μία ακμή διαφορετική από την e και επομένως να μην την χρησιμοποιήσω για την κατασκευή του ΕΣΔ. Άτοπο. Άρα υπάρχει τομή τέτοια ώστε η e να είναι η μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους που τη διασχίζει.

Για το ανάστροφο της συνεπαγωγής πρέπει να αποδείξουμε πως
Αν υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ τέτοια ώστε η e να είναι η μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$ $\Rightarrow e \in E$ είναι απαραίτητη για το ελάχιστο συνδετικό δέντρο του G.

Απόδειξη
Υποθέτουμε πως υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ τέτοια ώστε η e να είναι η μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$. Κάθε ΕΣΔ διασχίζει όλες τς τομές. Αν κατά την κατασκευή του ΕΣΔ T δεν επιλέξω την e θα επιλέξω ακμή e' με μεγαλύτερο βάρος και το νέο ΕΣΔ T' δεν θα έχει την e και θα έχει την e'. Δεδομένου ότι $w(e) < w(e')$ θα ισχύει $w(T) < w(T')$ και επομένως το T' δεν είναι ΕΣΔ.

Θέμα 6 (Επιπεδότητα, 2.0 μονάδες)

α) Θεωρούμε συνεκτικό επίπεδο γράφημα στο οποίο όλες οι όψεις έχουν βαθμό 5 ή 6. Να δείξετε ότι (i) αν ο βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσος με 3, τότε το γράφημα έχει 12 όψεις βαθμού 5, και (ii) ότι αν ο βαθμός κάθε κορυφής είναι τουλάχιστον 3, τότε υπάρχουν τουλάχιστον 12 όψεις βαθμού 5.

(i) Υποθέτουμε πως έχουμε x όψεις βαθμού 5 και y όψεις βαθμού 6 $f = x + y$ (1)
Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών ενός γραφήματος είναι διπλάσιο του πλήθους των ακμών. Επομένως για γράφημα με βαθμό κάθε κορυφής ίσο με 3 ισχύει
$3n = 2m$ (2)
Από τον τύπο του Euler προκύπτει πως: $n + f = m + 2 \Rightarrow f = m/3 + 2$ (3)
Το δυϊκό γράφημα έχει ίδιο πλήθος ακμών με το αρχικό και πλήθος κορυφών f (μία όψη για κάθε κορυφή). Οι βαθμοί των κορυφών του δυϊκού γραφήματος είναι 5 και 6. Επομένως ισχύει πως $5x + 6y = 2m$ (4)
Προσπαθώ να υπολογίσω το x
Από την (1) προκύπτει $x = f - y \Rightarrow$ λόγω της (3) $\Rightarrow x = m/3 + 2 - y$
Από (4) προκύπτει $y = \dfrac{2m - 5x}{6}$. Επομένως

$$x = m/3 + 2 - y = m/3 + 2 - \frac{2m - 5x}{6} \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = 12$$

(ii) Η διαφορά εδώ είναι πως η ισότητα (2) γίνεται $3n \leq 2m$. Και με πράξεις προκύπτει το ζητούμενο.

β) Χρησιμοποιώντας επαγωγή στο πλήθος των κορυφών, να δείξετε ότι κάθε απλό επίπεδο γράφημα προκύπτει ως ένωση το πολύ πέντε ακυκλικών γραφημάτων. Υπενθυμίζεται ότι η ένωση δύο γραφημάτων $G_1(V_1, E_1)$ και $G_2(V_2, E_2)$ είναι το γράφημα $G(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο πλήθος των κορυφών του γραφήματος.
Για τη βάση της επαγωγής, κάθε γράφημα με το πολύ 5 κορυφές μπορεί να γραφτεί σαν ένωση 5 ακυκλικών γραφημάτων: για κάθε κορυφή σχημάτισε το δέντρο με όλες τις ακμές της κορυφής.

Έστω για γράφημα με $k \geq 5$ κορυφές η υπόθεση ισχύει κι έστω επίπεδο γράφημα με $k+1$ κορυφές. Στο γράφημα αυτό υπάρχει κορυφή βαθμού το πολύ 5 αφού διαφορετικά οι συνολικές ακμές του θα ήταν $\frac{6n}{2} > 3n-6$, που δεν μπορεί να ισχύει σε επίπεδα γραφήματα. Αν αφαιρέσουμε μια κορυφή u με βαθμό το πολύ 5 τότε το (επίπεδο) γράφημα που μένει μπορεί να γραφτεί σαν ένωση 5 δασών. Προσθέτοντας σε κάθε δάσος την u και μια ακμή της u (διαφορετική ακμή για κάθε δάσος, αν είναι δυνατόν) παίρνουμε 5 δάση, η ένωση των οποίων μας δίνει το επίπεδο γράφημα των $k+1$ κορυφών.

Θέμα 7 (Χρωματικός αριθμός, 1.0 μονάδες)

α) Να δείξετε ότι για κάθε γράφημα $G(V,E)$ με χρωματικό αριθμό $\chi(G) \geq 2$, υπάρχει διαμέριση των κορυφών του σε σύνολα V_1 και V_2 ώστε για τους χρωματκούς αριθμούς των αντίστοιχων επαγόμενων υπογραφημάτων $G_1 = G(V_1)$ και $G_2 = G(V_2)$ να ισχύει ότι $\chi(G_1) + \chi(G_2) = \chi(G)$.

Παίρνουμε έναν ελάχιστο χρωματισμό του γραφήματος. Αυτός χρησιμοποιεί τουλάχιστον δυο χρώματα a και b (υποθέτουμε πως υπάρχει τουλάχιστον μια ακμή στο γράφημα, αλλιώς το ζητούμενο ισχύει μόνο για $V_1 = V$ που δεν το θεωρούμε διαμέριση). Έστω V_1 οι κορυφές με το χρώμα a και $V_2 = V \setminus V_1$. Είναι $\chi(G_1) = 1$ και $\chi(G_2) \leq \chi(G) - 1$ γιατί ο ελάχιστος χρωματισμός του G δίνει και χρωματισμό του G_2. Είναι τελικά $\chi(G_2) = \chi(G) - 1$ αφού χρωματισμός του G_2 με λιγότερα από $\chi(G) - 1$ χρώματα θα έδινε χρωματισμό του G με λιγότερο από $\chi(G)$ χρώματα.

β) Να δείξετε ακόμη ότι αν το G δεν είναι πλήρες γράφημα, υπάρχει μια διαφορετική διαμέριση των κορυφών του σε σύνολα V_1' και V_2' ώστε για τους χρωματκούς αριθμούς των αντίστοιχων επαγόμενων υπογραφημάτων $G_1' = G(V_1')$ και $G_2' = G(V_2')$ να ισχύει ότι $\chi(G_1') + \chi(G_2') > \chi(G)$

Έστω u και v δυο κορυφές που δεν συνδέονται με ακμή. Θέτω V_1 το σύνολο που περιέχει ακριβώς την u και τους γείτονές της. Έτσι η v θα ανήκει στο $V_2 = V \setminus V_1$ και άρα θα έχω διαμέριση. Χρωματίζω το G_1 με $\chi(G_1)$ χρώματα και το G_2 με $\chi(G_2)$ διαφορετικά από το G_1 χρώματα. Επιλέγω τυχαίο χρώμα από το χρωματισμό του G_2 και το δίνω στην κορυφή u του G_1. Με αυτό τον τρόπο χρωματίζω σωστά τον G με $\chi(G_1) + \chi(G_2) - 1$ χρώματα και άρα $\chi(G_1) + \chi(G_2) > \chi(G)$.