**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο**
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

# Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

**2η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 20/5/2019**

---

**Θέμα 1 (Αρχή του Περιστερώνα, 1.8 μον.).** (α) Σε ένα διάστημα 200 ημερών, μία αεροσυνοδός κάνει τουλάχιστον ένα ταξίδι κάθε ημέρα, και όχι περισσότερα από 300 ταξίδια συνολικά. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα διάστημα (αποτελούμενο από διαδοχικές ημέρες) όπου η αεροσυνοδός κάνει ακριβώς 99 ταξίδια.

(β) Θεωρούμε μια ακολουθία $N$ θετικών ακεραίων η οποία περιέχει ακριβώς $n$ διαφορετικούς αριθμούς. Να δείξετε ότι αν $N \geq 2^n$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο ή περισσότερες διαδοχικές θέσεις της ακολουθίας τέτοιες ώστε το γινόμενο των αντίστοιχων αριθμών να είναι ένα τέλειο τετράγωνο. Π.χ., στην ακολουθία $7, 5, 3, 5, 7, 5, 3, 7$, όπου $n = 3$ και $N = 2^3$, το γινόμενο των έξι τελευταίων διαδοχικών θέσεων είναι τέλειο τετράγωνο.

**Θέμα 2 (Αυτοσυμπληρωματικά Γραφήματα, 1.0 μον.).** Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό $k \geq 1$, (i) υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με $4k$ κορυφές όπου οι μισές κορυφές έχουν βαθμό $2k-1$ και οι άλλες μισές έχουν βαθμό $2k$, και (ii) ότι υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με $4k+1$ κορυφές που είναι $2k$-κανονικό. *Υπόδειξη:* Και στις δύο περιπτώσεις, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε επαγωγή στο $k$.

**Θέμα 3 (Διμερή Γραφήματα, 1.8 μον.).** (α) Να δείξετε ότι για κάθε (απλό μη-κατευθυνόμενο) συνεκτικό διμερές γράφημα $G(V, E)$, υπάρχει μια μοναδική διαμέριση των κορυφών του $V$ σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Πόσες διαφορετικές διαμερίσεις υπάρχουν αν το $G$ έχει $k \geq 2$ συνεκτικές συνιστώσες;

(β) Θεωρούμε ένα απλό μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$ με $n \geq 2$ κορυφές και $m \geq 1$ ακμές. Συμβολίζουμε με $Y(G)$ το γράφημα που προκύπτει από την υποδιαίρεση όλων των ακμών του $G$. Για την υποδιαίρεση μιας ακμής $e = \{u, v\}$, διαγράφουμε την $e$ και προσθέτουμε μια νέα κορυφή $x_e$ που είναι γειτονική μόνο με τα άκρα $u$ και $v$ της ακμής $e$. (i) Να δείξετε ότι το $Y(G)$ είναι διμερές γράφημα και να υπολογίσετε το πλήθος των κορυφών και των ακμών του (με δεδομένο ότι το $G$ έχει $n$ κορυφές και $m$ ακμές). (ii) Να δείξετε ότι το $Y(G)$ έχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν το γράφημα $G$ είναι ο κύκλος $C_n$ με $n$ κορυφές.

**Θέμα 4 (Κύκλος Euler, Κύκλος Hamilton, 1.4 μον.).** (α) Να δείξετε ότι μπορούμε πάντα να προσανατολίσουμε όλες τις ακμές ενός μη-κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος $G$ ώστε για κάθε κορυφή $u$, ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός της $u$ είτε να είναι ίσοι είτε να διαφέρουν κατά 1.

(β) Έστω μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G$ το οποίο έχει $k \geq 2$ κορυφές περιττού βαθμού. Να δείξετε ότι το σύνολο των ακμών του $G$ μπορεί να διαμεριστεί σε $k/2$ μονοκονδυλιές που δεν έχουν κοινές ακμές μεταξύ τους.

**Θέμα 5 (Συνδετικά Δέντρα, 1.0 μον.).** Έστω απλό μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E, w)$ με θετικά βάρη $w : E \to \mathbb{N}^*$ στις ακμές. Μια ακμή $e \in E$ καλείται *απαραίτητη* για το Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο (ΕΣΔ) του $G$ αν η αφαίρεσή της οδηγεί σε αύξηση του βάρους του ΕΣΔ, δηλ. αν ΕΣΔ$(G) <$ ΕΣΔ$(G-e)$. Να δείξετε ότι μια ακμή $e \in E$ είναι απαραίτητη για το ΕΣΔ του $G$ αν και μόνο αν υπάρχει τομή $(S, V \setminus S)$ τέτοια ώστε η $e$ να είναι *η μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους* που διασχίζει την $(S, V \setminus S)$, δηλ. για κάθε ακμή $e' = \{u, v\}$, με $u \in S$, $v \in V \setminus S$ και $e' \neq e$, έχουμε ότι $w(e) < w(e')$.

**Θέμα 6 (Επιπεδότητα, 2.0 μον.).** (α) Θεωρούμε συνεκτικό επίπεδο γράφημα στο οποίο όλες οι όψεις έχουν βαθμό 5 ή 6. Να δείξετε δείξτε ότι (i) αν ο βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσος με 3, τότε το γράφημα έχει 12 όψεις βαθμού 5, και (ii) ότι αν ο βαθμός κάθε κορυφής είναι τουλάχιστον 3, τότε υπάρχουν τουλάχιστον 12 όψεις βαθμού 5.

(β) Χρησιμοποιώντας επαγωγή στο πλήθος των κορυφών, να δείξετε ότι κάθε απλό επίπεδο γράφημα προκύπτει ως ένωση το πολύ πέντε ακυκλικών γραφημάτων. Υπενθυμίζεται ότι η ένωση δύο γραφημάτων $G_1(V_1, E_1)$ και $G_2(V_2, E_2)$ είναι το γράφημα $G(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

**Θέμα 7 (Χρωματικός Αριθμός, 1.0 μον.).** (α) Να δείξετε ότι για κάθε γράφημα $G(V, E)$ με χρωματικό αριθμό $\chi(G) \geq 2$, υπάρχει διαμέριση των κορυφών του σε σύνολα $V_1$ και $V_2$ ώστε για τους χρωματικούς αριθμούς των αντίστοιχων επαγόμενων υπογραφημάτων $G_1 = G[V_1]$ και $G_2 = G[V_2]$ να ισχύει ότι $\chi(G_1) + \chi(G_2) = \chi(G)$.

(β) Να δείξετε ακόμη ότι αν το $G$ δεν είναι πλήρες γράφημα, υπάρχει μια διαφορετική διαμέριση των κορυφών του σε σύνολα $V_1'$ και $V_2'$ ώστε για τους χρωματικούς αριθμούς των αντίστοιχων επαγόμενων υπογραφημάτων $G_1' = G[V_1']$ και $G_2' = G[V_2']$ να ισχύει ότι $\chi(G_1') + \chi(G_2') > \chi(G)$.

**Παράδοση.** Οι εργασίες πρέπει είτε να παραδοθούν στο μάθημα της Δευτέρας 20/5 είτε να αναρτηθούν στο `courses. corelab. ntua. gr` μέχρι τα μεσάνυχτα της ίδιας ημέρας.

**Καλή Επιτυχία!**