Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

2η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 26/5/2017

Θέμα 1 (Αρχή του Περιστερώνα, 1.8 μον.). (α) Επιλέγουμε αυθαίρετα n φυσικούς αριθμούς από το σύνολο $\{1, 2, 3, \ldots, 2^n - 3, 2^n - 2\}$. Να δείξετε ότι μεταξύ των αριθμών που έχουμε επιλέξει υπάρχει πάντα ένα ζευγάρι όπου ο μεγαλύτερος από τους δύο αριθμούς είναι μικρότερος ή ίσος από το διπλάσιο του άλλου (π.χ., για $n = 3$, αν επιλέξουμε τους αριθμούς 1, 3, 6, έχουμε ότι $6 \leq 2 \cdot 3$.

(β) Θεωρούμε μια ακολουθία N θετικών ακεραίων η οποία περιέχει ακριβώς n διαφορετικούς αριθμούς. Να δείξετε ότι αν $N \geq 2^n$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο ή περισσότερες διαδοχικές θέσεις της ακολουθίας τέτοιες ώστε το γινόμενο των αντίστοιχων αριθμών να είναι ένα τέλειο τετράγωνο. Π.χ., στην ακολουθία $7, 5, 3, 5, 7, 5, 3, 7$, όπου $n = 3$ και $N = 2^3$, το γινόμενο των έξι τελευταίων διαδοχικών θέσεων είναι τέλειο τετράγωνο.

Θέμα 2 (Γραφήματα - Βασικές Έννοιες, 1.2 μον.). Θεωρούμε το γράφημα $G_1 = C_n * K_m$ που προκύπτει από τη σύνδεση (join) του κύκλου με $n \geq 3$ κορυφές με το πλήρες γράφημα με $m \geq 1$ κορυφές.

1. Πόσες κορυφές και πόσες ακμές έχει το γράφημα G_1 (ως συνάρτηση των n και m);
2. Για ποιες τιμές των n και m το το γράφημα G_1 έχει κύκλο Euler;
3. Για ποιες τιμές των n και m το το γράφημα G_1 έχει κύκλο Hamilton;
4. Ποιος είναι ο χρωματικός αριθμός του G_1;

Θέμα 3 (Διμερή Γραφήματα, 1.8 μον.). (α) Να δείξετε ότι για κάθε (απλό μη-κατευθυνόμενο) συνεκτικό διμερές γράφημα $G(V, E)$, υπάρχει μια μοναδική διαμέριση των κορυφών του V σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Πόσες διαφορετικές διαμερίσεις υπάρχουν αν το G έχει $k \geq 2$ συνεκτικές συνιστώσες;

(β) Θεωρούμε ένα απλό μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$ με $n \geq 2$ κορυφές και $m \geq 1$ ακμές. Συμβολίζουμε με $Y(G)$ το γράφημα που προκύπτει από την υποδιαίρεση όλων των ακμών του G. Για την υποδιαίρεση μιας ακμής $e = \{u, v\}$, διαγράφουμε την e και προσθέτουμε μια νέα κορυφή x_e που είναι γειτονική μόνο με τα άκρα u και v της ακμής e. (i) Να δείξετε ότι το $Y(G)$ είναι διμερές γράφημα και να υπολογίσετε το πλήθος των κορυφών και των ακμών του (με δεδομένο ότι το G έχει n κορυφές και m ακμές). (ii) Να δείξετε ότι το $Y(G)$ έχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν το γράφημα G είναι ο κύκλος C_n με n κορυφές.

Θέμα 4 (Κύκλος Euler, Κύκλος Hamilton, 1.8 μον.). (α) Να δείξετε ότι μπορούμε πάντα να προσανατολίσουμε όλες τις ακμές ενός μη-κατευθυνόμενου συνεκτικού γραφήματος G ώστε για κάθε κορυφή u, ο προς-τα-έσω βαθμός και ο προς-τα-έξω βαθμός της u είτε να είναι ίσοι είτε να διαφέρουν κατά 1.

(β) Έστω μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα G το οποίο έχει $k \geq 2$ κορυφές περιττού βαθμού. Να δείξετε ότι το σύνολο των ακμών του G μπορεί να διαμεριστεί σε $k/2$ μονοκονδυλιές που δεν έχουν κοινές ακμές μεταξύ τους.

(γ) Έστω γράφημα G και έστω x μια κορυφή του G τέτοια ώστε το $G - x$ να έχει κύκλο Hamilton. Υποθέτουμε ότι το G έχει δύο κορυφές u και v που έχουν βαθμό 3 και είναι γειτονικές με την x. (i) Να δείξετε ότι αν οι u και v συνδέονται μεταξύ τους, τότε και το G έχει κύκλο Hamilton. (ii) Να δείξετε ότι αν οι u και v δεν συνδέονται μεταξύ τους, τότε το G δεν έχει απαραίτητα κύκλο Hamilton.

Θέμα 5 (Δέντρα, 1.6 μον.). (α) Έστω $n \geq 2$ θετικοί ακέραιοι $d_1, \ldots, d_n$. Να δείξετε ότι $d_1 + \cdots + d_n = 2(n-1)$ αν και μόνο αν υπάρχει δέντρο T με n κορυφές και βαθμούς κορυφών $d_1, \ldots, d_n$.

(β) Θεωρούμε ένα απλό μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E, w)$ με θετικά βάρη $w : E \to \mathbb{N}^*$ στις ακμές και ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο (ΕΣΔ) T του G. Για κάθε ζευγάρι κορυφών u, v, συμβολίζουμε με p^*_{uv} το μοναδικό $u - v$ μονοπάτι στο T. Να δείξετε ότι για κάθε ζευγάρι κορυφών u, v και για κάθε $u - v$ μονοπάτι p_{uv} στο G, ισχύει ότι $\max_{e \in p^*_{uv}}\{w(e)\} \leq \max_{e \in p_{uv}}\{w(e)\}$ (δηλ. αν θεωρήσουμε ως "κόστος" ενός $u - v$ μονοπατιού p_{uv} το βάρος της βαρύτερης ακμής του, το μοναδικό $u - v$ μονοπάτι p^*_{uv} στο ΕΣΔ T ελαχιστοποιεί αυτό το κόστος για όλα τα ζευγάρια κορυφών u, v).

Θέμα 6 (Επιπεδότητα, Χρωματικός Αριθμός, 1.8 μον.). (α) Για κάθε φυσικό $n \geq 2$, ορίζουμε το απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα H_n με σύνολο κορυφών $V_n = \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$ και σύνολο ακμών

$$E_n = \big\{\{i, i+1\} : i \in \{0, 1, \ldots, 2n-2\}\big\} \cup \big\{\{2n-1, 0\}\big\} \cup \big\{\{i, i+n\} : i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\big\}$$

(i) Να δείξετε ότι το H_n είναι επίπεδο αν και μόνο αν $n = 2$. (ii) Να προσδιορίσετε τον χρωματικό αριθμό του H_n για κάθε τιμή του $n \geq 2$.

(β) Ένα επίπεδο γράφημα λέγεται *εξωεπίπεδο* (outerplanar) αν μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο ώστε οι ακμές του να μην τέμνονται και όλες οι κορυφές του να βρίσκονται στην εξωτερική όψη. Να αποδείξετε ότι κάθε απλό εξωεπίπεδο γράφημα με n κορυφές έχει το πολύ $2n - 3$ ακμές.

Παράδοση. Οι εργασίες πρέπει να παραδοθούν στο μάθημα της Παρασκευής 26/5.

Καλή Επιτυχία!