ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Διδάσκοντες: Δ.Φωτάκης, Θ. Σούλιου
1η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια υποβολής 12/4/2021

Θέμα 1 (Διαδικασίες Απαρίθμησης 2.4 μον.)

(α) Μια συνάρτηση $p: N \to N$ είναι πολυωνυμική βαθμού d όταν υπάρχουν φυσικοί $(a_d, a_{d-1}, ..., a_0)$ τέτοιοι ώστε $p(n) = \sum_{l=0}^{d} a_l n^l$, για κάθε $n \in N$. Συμβολίζουμε με P_d το σύνολο των πολυωνυμικών συναρτήσεων βαθμού d στους φυσικούς και με $P = \bigcup_{d \in N} P_d$ το σύνολο των πολυωνυμικών συναρτήσεων. Να εξετάσετε αν τα σύνολα P_d και P είναι αριθμήσιμα.

Οι διαφορετικές τιμές που παίρνει κάθε a_i είναι αριθμήσιμα άπειρες. Τα a_i είναι $d+1$ στο πλήθος επομένως έχουμε αριθμήσιμα άπειρη ένωση πεπερασμένων συνόλων.
Εφόσσον οι πολυωνυμικές βαθμού $d+1$ είναι αριθμήσιμα άπειρες η ένωσή τους για $d = 1,2,...N$ είναι αριθμήσιμα άπειρη ένωση αριθμήσιμων συνόλων και επομένως το σύνολο όλων των πολυωνυμικών συναρτήσεων είναι αριθμήσιμα άπειρο.

(β) Στη Θεωρητική Πληροφορική, ένα (υπολογιστικό) *πρόβλημα απόφασης* ουσιαστικά χαρακτηρίζεται από ένα ερώτημα στο οποίο η απάντηση είναι είτε "ναί" είτε "όχι" (π.χ. " έχει το γράφημα G κύκλο Hamilton; ", "είναι ο φυσικός αριθμός n άρτιος; ", "είναι ο φυσικός αριθμός n πρώτος; ", κ.λπ.). Έτσι, κάθε πρόβλημα απόφασης στους φυσικούς αριθμούς μπορεί να αναπαρασταθεί από το υποσύνολο των φυσικών για τους οποίους η απάντηση στο αντίστοιχο ερώτημα είναι "ναί". Π.χ. το πρόβλημα της αναγνώρισης των άρτιων αριθμών μπορεί να αναπαρασταθεί από το σύνολο $\{0,2,4,6,...\}$, το πρόβλημα της αναγνώρισης των πρώτων αριθμών μπορεί να αναπαρασταθεί από το σύνολο $\{2,3,5,7,11,...\}$, κ.λπ. Η λύση σε ένα τέτοιο πρόβλημα είναι ένα πρόγραμμα σε μία γλώσσα προγραμματισμού, για παράδειγμα στην C, το οποίο λαμβάνει ως είσοδο έναν φυσικό αριθμό n, και έπειτα από πεπερασμένο αριθμό βημάτων, τυπώνει στην έξοδο τη σωστή απάντηση στην αντίστοιχη ερώτηση. Να δείξετε ότι υπάρχουν άπειρα προβλήματα απόφασης στους φυσικούς για τα οποία δεν υπάρχει λύση.

1ος τρόπος
Το σύνολο όλων των προβλημάτων αντιστοιχεί στο δυναμοσύνολο του N (κάθε υποσύνολο και πρόβλημα) το οποίο είναι μη αριθμήσιμο ενώ το σύνολο των προγραμμάτων είναι αριθμήσιμο, επειδή είναι υποσύνολο του συνόλου των συμβολοσειρών. Επομένως το σύνολο των προβλημάτων για τα οποία δεν υπάρχει λύση είναι μη αριθμήσιμο. Διότι αν ήταν αριθμήσιμο τότε η ένωσή τους με το σύνολο των προβλημάτων που έχουν λύση θα έδινε αριθμήσιμο σύνολο, κάτι το οποίο δεν ισχύει.

2ος τρόπος
Με διαγωνοποίηση. Βάζω στις στήλες όλους τους φυσικούς (τα προγράμματα) και στις γραμμές όλα τα προβλήματα και παίρνω τον παρακάτω πίνακα:

Προβλήματα\ N	1	2	3	4	5	...
Πρόβλημα 1	0	1	1	1	1	
Πρόβλημα 2	1	1	0	0	0	
Πρόβλημα 3	0	0	0	1	1	
Πρόβλημα 4	1	1	1	0	1	
...						

Πάντα θα υπάρχει κάποιο πρόβλημα που θα έχει διαφορετικές τιμές στη διαγώνιο.
Αποδείξαμε πως τα προβλήματα απόφασης είναι άπειρα. Αλλά το σύνολο των προβλημάτων που δεν έχουν λύση είναι μη αριθμήσιμο; Υποθέτουμε ότι είναι αριθμήσιμο. Αν πάρουμε την ένωση του συνόλου όλων των άλυτων προβλημάτων με το σύνολο των προβλημάτων που έχουν λύση (τα οποία είναι το πολύ όσα τα προγράμματα άρα αριθμήσιμα) παίρνουμε το σύνολο όλων των προβλημάτων που είναι μη αριθμήσιμο. Η ένωση δύο αριθμήσιμων συνόλων δίνει αριθμήσιμο. Καταλήξαμε σε άτοπο.
Σκεφτόμαστε όπως όταν θέλουμε να αποδείξουμε πως $R-N$ μη αριθμήσιμο. $(R-N)\cup N = R$ το R είναι μη αριθμήσιμο, το N αριθμήσιμο άρα $R-N$ μη αριθμήσιμο.

(γ) Ένα εχθρικό υποβρύχιο ξεκινά από τη θέση $x \in N$, και κινείται με σταθερή ταχύτητα y μέτρα/λεπτό, $y \in N$, κατά μήκος μιάς ευθείας (την οποία γνωρίζουμε). Έχουμε στη διάθεσή μας απεριόριστο πλήθος τορπιλών που μπορούμε να εκτοξεύσουμε εναντίον του υποβρυχίου, καθώς και απεριόριστο χρόνο για να το βυθίσουμε. Μπορούμε να εκτοξεύουμε μία τορπίλη κάθε λεπτό, στοχεύοντας προς μία θέση $z \in N$ στην ευθεία, και θεωρούμε ότι το υποβρύχιο θα βυθιστεί αν τη χρονική στιγμή εκτόξευσης βρίσκεται στη θέση z.
Να διατυπώσετε μία αλγοριθμική μέθοδο η οποία, χωρίς γνώση των x και y, επιλέγει με συστηματικό τρόπο την ακολουθία των θέσεων όπου κατευθύνονται οι τορπίλες μας, και εγγυάται τη βύθιση του υποβρυχίου σε πεπερασμένο χρόνο. Να αποδείξετε την ορθότητα της μεθόδου, και να υπολογίσετε το πλήθος των τορπιλών (ως συνάρτηση των x και y) που θα χρειαστεί να εκτοξεύσουμε μέχρι τη βύθιση του υποβρυχίου.

Το υποβρύχιο κινείται στην ευθεία και ξεκινά από τη θέση x και κινείται με ταχύτητα y.
Επομένως το που θα βρίσκεται τη χρονική στιγμή t δίνεται από την εξίσωση
$z = x + y * t$. Τα x, y είναι φυσικοί αριθμοί και επομένως το ζευγάρι (x, y) είναι αριθμήσιμο.
Άρα κάποια χρονική στιγμή θα "μετρήσουμε" τη θέση που βρίσκεται το υποβρύχιο και επομένως θα το βυθίσουμε. Σε πόσες χρονικές στιγμές θα γίνει αυτό;
Σε όσες θα χρειαστούν για να μετρήσουμε αυτή τη θέση. Οι τορπίλες θα είναι ίσες στο πλήθος με τη χρονική στιγμή που θα βυθίσουμε το υποβρύχιο. Και το πλήθος τους θα δίνεται από την εξίσωση $\#\text{τορπιλών} = \frac{1}{2}\left[(x+y)^2 + 3x + y\right]$.

Θέμα 2 (Προτασιακή Λογική, 2.4 μον.)

(α) Επισκέπτεσθε ένα νησί όπου κατοικούν δύο είδη ανθρώπων, οι ιππότες που λένε πάντα την αλήθεια, και οι απατεώνες που λένε πάντα ψέματα. (i) Πρώτα συναντάτε δύο κατοίκους του νησιού, τον Α και τον Β. Ο Α λέει ότι “Είμαστε και οι δύο ιππότες”. Ο Β λέει ότι “Ο Α είναι απατεώνας”. Τι είναι οι Α και Β; (ii) Δύο άλλοι κάτοικοι ο C και ο D σας πλησιάζουν, αλλά μιλάει μόνο ο C και λέει ότι: “Είμαστε και οι δύο απατεώνες”. Τι είναι οι C και D;

(iii) Στη συνέχεια συναντάτε τους κατοίκους του νησιού E και F. O E λέει ότι “O F είναι απατεώνας”, και ο F λέει ότι “O E είναι απατεώνας”. Πόσοι από τους E και F είναι απατεώνες; (iv) Τέλος συναντάτε τους G και H που επίσης κατοικούν στο νησί. Ρωτάτε τον G: “Υπάρχει κάποιος ευγενής μεταξύ σας; ”. Αυτός αποκρίνεται, και η απάντησή του είναι τέτοια ώστε να μπορείτε να αποφανθείτε με σιγουριά για τους G και H. Τι απάντησε ο G, και σε ποια κατηγορία ανήκει καθένας από τους G και H;

(i) O A δεν μπορεί να λέει αλήθεια γιατί τότε ο B θα έλεγε αλήθεια και ο A θα ήταν απατεώνας. Επομένως ο A είναι απατεώνας. Κατά συνέπεια ο B είναι ευγενής.
(ii) H πρόταση είναι ψευδής. Άρα D ιππότης και C απατεώνας
(iii) Ένας από τους δύο θα είναι ιππότης και ένας απατεώνας
(iv) Αν η απάντηση ήταν “Ναι” δεν θα μπορούσαμε να αποφανθούμε με βεβαιότητα. Αν όμως η απάντηση ήταν “Όχι” τότε η απάντηση δεν είναι αληθής (ένας απατεώνας λέει πάντα ψέματα και κατά συνέπεια δεν λέει πως είναι απατεώνας), επομένως ο G λέει ψέματα και κατά συνέπεια είναι απατεώνας ενώ ο H είναι ιππότης (για να μην είναι αλήθεια το όχι του G).

(β) Έστω φ προτασιακός τύπος. Ορίζουμε την ακολουθία προτασιακών τύπων $\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_n, ...$ ως εξής: $\sigma_0 \equiv \varphi \to \varphi$, και για κάθε $n \geq 0$, $\sigma_{n+1} \equiv \sigma_n \to \varphi$. Για ποιές τιμές του n ο σ_n είναι ικανοποιήσιμος και για ποιές είναι ταυτολογία; Για ποιές τιμές του n αληθέυει ο $\sigma_n \models \sigma_{n+1}$;

σ_n ταυτολογία όταν n άρτιος και ικανοποιήσιμος όταν n περιττός και ο $\sigma_n \models \sigma_{n+1}$ αληθεύει για κάθε περιττό φυσικό n.

(γ) H n-οστή πρόταση σε μία λίστα με 100 μαθηματικές προτάσεις δηλώνει ότι “Οι n από τις προτάσεις στη λίστα είναι ψευδείς”. (i) Ποιές από τις 100 προτάσεις είναι αληθείς και ποιές ψευδείς; (ii) Ποιές από τις 100 προτάσεις είναι αληθείς και ποιές ψευδείς αν η n-οστή πρόταση δηλώνει ότι “Τουλάχιστον n από τις προτάσεις στη λίστα είναι ψευδείς;” (iii) Τι συμβαίνει αν έχουμε 99 δηλώσεις όπως αυτές στο (ii);

(i)Εφόσσον κάθε πρόταση δίνει διαφορετικό πλήθος ψευδών προτάσεων μόνο μία μπορεί να είναι αληθής και 99 ψευδείς. Επομένως η πρόταση 99 είναι αληθής.
(ii) Αν μία πρόταση είναι αληθής τότε όλες οι προηγούμενες είναι αληθείς. Άρα οι πρώτες x προτάσεις αληθείς και $100 - x$ ψευδείς. Αλλά η x πρόταση λέει πως $100 - x$ προτάσεις είναι ψευδείς. Επομένως $x = 100 - x$. Άρα $x = 50$ προτάσεις αληθείς και 50 ψευδείς.
(iii) Εδώ έχουμε αντίστοιχα $x = 99 - x$ που δεν μπορεί να ισχύει δεδομένου ότι $1 \leq x \leq 99$ και x ακέραιος.

(δ) Έστω T ένα άπειρο σύνολο προτασιακών τύπων, και έστω φ αυθαίρετα επιλεγμένος προτασιακός τύπος. Να δείξετε ότι:
1. Αν $T \models \varphi$, τότε υπάρχει πεπερασμένο $T_0 \subseteq T$ τέτοιο ώστε $T_0 \models \varphi$.
Από το θεώρημα της Πληρότητας αν $T \models \varphi \to T \mid -\varphi$. Η τυπική απόδειξη του φ προκύπτει από πεπερασμένα βήματα συνακτικών αντικαταστάσεων και κανόνων παραγωγής. Επομένως ένα πεπερασμένο υποσύνολο του T συνεπάγεται ταυτολογικά τον φ.
2. Αν το T είναι μη ικανοποιήσιμο, τότε υπάρχει πεπερασμένο $T_0 \subseteq T$ που δεν είναι ικανοποιήσιμο.

Εφόσσον Τ μη κανοποιήσιμο $T \models \varphi$ για κάθε προτασιακό τύπο φ. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο του Τ έστω T_0 που συνεπάγεται ταυτολογικά τον φ. Αυτό σημαίνει πως $T_0 \cup \{\neg\varphi\}$ μη ικανοποιήσιμο. Στην περίπτωση που το φ είναι αντίφαση το $\neg\varphi$ είναι ταυτολογία και κατά συνέπεια το T_0 είναι μη ικανοποιήσιμο. Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να βρούμε T_0 μη ικανοποιήσιμο.

Θέμα 3 (Κατηγορηματική Λογική, 2.0 μον.)

(α) Θεωρούμε πρωτοβάθμια γλώσσα με μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα P και Q και διμελή κατηγορηματικά σύμβολα T και L. Ερμηνεύουμε αυτή τη γλώσσα στο σύμπαν που αποτελείται από την ένωση του συνόλου των καθηγητών και των μαθημάτων της σχολής, με το $P(x)$ να δηλώνει ότι "ο x είναι καθηγητής", το $M(x)$ να δηλώνει ότι "το x είναι μάθημα", το $T(x,y)$ να δηλώνει ότι "ο x διδάσκει το y", και το να δηλώνει ότι "ο x συμπαθεί τον y". Σε αυτή την ερμηνεία, να γράψετε τύπους που να δηλώνουν ότι:

1. Κάθε καθηγητής διδάσκει τουλάχιστον ένα μάθημα.
2. Ένας καθηγητής συμπαθεί τον άλλο μόνο αν υπάρχει μάθημα που το διδάσκουν και οι δύο.
3. Υπάρχουν δύο καθηγητές που διδάσκουν ακριβώς τα ίδια μαθήματα.
4. Υπάρχει ένας καθηγητής που διδάσκει (ακριβώς) δύο μαθήματα.
5. Αν ένας καθηγητής διδάσκει ακριβώς περισσότερα του ενός μαθήματα, τότε τουλάχιστον ένα από αυτά το συνδιδάσκει με όλους τους άλλους καθηγητές που τον συμπαθούν.

(β) Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q. Να διερευνήσετε την λογική εγκυρότητα της παρακάτω πρότασης:

$$\forall x \forall y (Q(x,y) \leftrightarrow \neg Q(x,y)) \to \exists x \forall y (Q(x,y))$$

(α)
1. $\forall x (P(x) \to \exists y (M(y) \wedge T(x,y)))$
2. $\forall x \forall y ((P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y \wedge L(x,y)) \to \exists z (M(z) \wedge T(x,z) \wedge T(y,z)))$
3. $\exists x \exists y (P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z (M(z) \to (T(x,z) \leftrightarrow T(y,z))))$
4. $\exists x \exists y \exists z \begin{pmatrix} P(x) \wedge M(y) \wedge M(z) \wedge T(x,y) \wedge T(x,z) \wedge y \neq z \wedge \\ \forall w ((M(w) \wedge \mathrm{T}(x,w)) \to (z = w \vee y = w)) \end{pmatrix}$

5. Φτιάχνω τύπο που αληθεύει αν ο x διδάσκει περισσότερα του ενός μαθήματα.

$\varphi(x) = \exists y \exists z (y \neq z \wedge T(x,y) \wedge T(x,z))$

$\forall (\varphi(x) \to \exists y (M(y) \wedge T(x,y) \wedge \forall z ((P(z) \wedge L(z,x)) \to T(z,y))))$

(β)

Η υπόθεση της συνεπαγωγής είναι πάντα ψευδής. Επομένως η συνεπαγωγή είναι αληθής.

Θέμα 4 (Κατηγορηματική Λογική, 2.0 μον.)

(α) Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε τις προτάσεις:

$$\varphi = \forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x,z) \vee P(z,y))) \to \forall x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x))$$

$$\psi = \forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x,z) \vee P(z,y))) \to \exists x \forall y P(x,y)$$

1. Να διερευνήσετε τη λογική εγκυρότητα της φ.
2. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της ψ.
3. Να διατυπώσετε ερμηνεία που δεν αποτελεί μοντέλο της ψ.

(β) Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε την πρόταση:

$$\xi = \forall x (P(x,x) \to \forall y (P(x,y) \vee P(y,x))) \to \exists x \forall y P(x,y)$$

Να διερευνήσετε σε ποια από τις παρακάτω ερμηνείες αληθεύει η ξ:

1. Σύμπαν $A = \{a,b,c\}$ και το P ερμηνεύεται με τη σχέση $P^A = \{(a,b),(b,c)\}$.
2. Σύμπαν $A = \{a,b,c\}$ και το P ερμηνεύεται με τη σχέση $P^A = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$.
3. Σύμπαν $A = \{a,b,c\}$ και το P ερμηνεύεται με τη σχέση $P^A = \{(a,a),(a,b),(a,c)\}$.
4. Σύμπαν οι θετικοί φυσικοί αριθμοί, με το $P(x,y)$ να δηλώνει ότι "ο x διαιρεί τον y".

(α)
1. Η φ αληθεύει πάντα διότι στην υπόθεση της συνεπαγωγής αν βάλω όπου y το x αληθεύει το συμπέρασμα.

2. Σε κάθε ερμηνεία που η υπόθεση της συνεπαγωγής δεν αληθεύει η συνεπαγωγή μας είναι αληθής.
Θα εξετάσουμε τι ισχύει όταν η υπόθεση της συνεπαγωγής αληθεύει.
Οι ερμηνείες στις οποίες αληθεύει η υπόθεση της συνεπαγωγής είναι εκείνες στις οποίες:
(α) Κάθε στοιχείο του σύμπαντος σχετίζεται με τον εαυτό του και (β) Για κάθε ζεύγος στοιχείων (x,y) που σχετίζονται $(x \to y)$ και για κάθε στοιχείο του σύμπαντος z θα έχουμε συσχέτιση ή του πρώτου στοιχείου του ζεύγους με το z (x,z) ή του z με το δεύτερο στοιχείο του ζεύγους (z,y). Δεδομένου ότι σε κάθε σύμπαν που αληθεύει η υπόθεση της συνεπαγωγής κάθε στοιχείο σχετίζεται με τον εαυτό του και παίρνοντας ως ζεύγος στοιχείων κάθε στοιχείο με τον εαυτό του συμπεραίνουμε από το δεύτερο όρο του συνδέσμου $\wedge$ πως όλα τα ζεύγη στοιχείων σχετίζονται προς τη μία τουλάχιστον κατεύθυνση [ή $(x \to y)$ ή $(y \to x)$]. (Πλήρης σχέση. Όλα τα στοιχεία συσχετίζονται)
Το συμπέρασμα της συνεπαγωγής αληθεύει αν υπάρχει στοιχείο του σύμπαντος που συσχετίζεται με όλα τα στοιχεία.
Επαγωγή
Βάση της επαγωγής:
Αν το σύμπαν μου αποτελείται από ένα στοιχείο η συνεπαγωγή αληθεύει τετριμμένα.
Επαγωγική Υπόθεση:
Η συνεπαγωγή αληθεύει σε κάθε σύμπαν με n στοιχεία. Έστω το σύμπαν $A_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ και έστω a_i το στοιχείο που σχετίζεται με όλα τα άλλα

Επαγωγικό βήμα:
Θα αποδείξουμε πως η συνεπαγωγή αληθεύει όταν έχω σύμπαν με $n+1$ στοιχεία δηλ. το σύμπαν μου είναι το $A_{n+1} = \{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}\}$.
Όπως εξηγήσαμε παραπάνω όλα τα στοιχεία του σύμπαντος σχετίζονται μεταξύ τους προς τη μία τουλάχιστον κατεύθυνση. Έτσι αν το στοιχείο a_i σχετίζεται με το στοιχείο που προσθέσαμε δηλ. το a_{n+1} έχουμε αποδείξει πως η συνεπαγωγή αληθεύει και το στοιχείο a_i παραμένει αυτό που σχετίζεται με όλα.
Αν όμως δεν ισχύει αυτό τότε θα πρέπει το a_{n+1} να σχετίζεται με το a_i.
Για να αληθεύει η υπόθεση της συνεπαγωγής στο σύμπαν A_{n+1} θα πρέπει το a_{n+1} να σχετίζεται με τον εαυτό του και επιπλέον να αληθεύει πως $\forall x \forall y (P(x,y) \to \forall z (P(x,z) \vee P(z,y)))$. Αν όπου x βάλω το a_i και όπου z το a_{n+1} θα πρέπει να ισχύει πως $\forall y (P(a_i, y) \to (P(a_i, a_{n+1}) \vee P(a_{n+1}, y)))$ και δεδομένου πως υποθέσαμε ότι το a_i δεν σχετίζεται με το a_{n+1} θα πρέπει να αληθεύει πως $\forall y (P(a_i, y) \to P(a_{n+1}, y))$ δηλαδή το a_{n+1} συνδέεται με όλα τα στοιχεία του σύμπαντος και επομένως επαληθεύει το συμπέρασμα της συνεπαγωγής.

3. Στους ακεραίους και αν το $P(x,y) \equiv x \leq y$ δεν έχω στοιχείο που να συνδέεται με όλα τα άλλα.

(β)
1. Η υπόθεση είναι πάντα αληθής (δεν έχω στοιχείο με ανακύκλωση). Το συμπέρασμα είναι ψευδές (δεν υπάρχει στοιχείο που σχετίζεται με όλα. Επομένως η συνεπαγωγή είναι ψευδής.

2. Η υπόθεση είναι ψευδής. Επομένως η συνεπαγωγή είναι αληθής.

3. Το συμπέρασμα είναι αληθές (το στοιχείο a σχετίζεται με όλα).

4. Η υπόθεση είναι ψευδής. Κάθε αριθμός διαιρεί τον εαυτό του αλλά δεν σχετίζεται κάθε ζεύγος αριθμών με τη σχέση της διαιρετότητας. Το συμπέρασμα είναι αληθές. Το 1 διαιρεί όλους τους αριθμούς. Επομένως η συνεπαγωγή είναι αληθής.

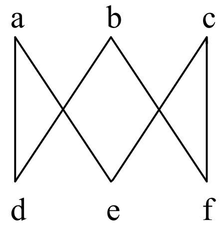
Θέμα 5 (Διμελείς Σχέσεις 1.2 μον.)

(α) Έστω R μια ανακλαστική και μεταβατική σχέση. Να δείξετε ότι η $R \cap R^{-1}$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Για να ανήκει ένα ζεύγος στοιχείων (a,b) στην $R \cap R^{-1}$ θα πρέπει τόσο το (a,b) όσο και το (b,a) να ανήκουν στην R. Δηλαδή η R πρέπει να είναι συμμετρική. Επίσης όλα τα ζεύγη στοιχείων που αποτελούνται από το ίδιο στοιχείο π.χ. (a,a) ανήκουν στην $R \cap R^{-1}$. Έτσι η σχέση $R \cap R^{-1}$ είναι ανακλαστική και συμμετρική. Επίσης η R είναι μεταβατική. Δηλ. αν (a,b) και (b,c) ανήκουν στην R τότε και το (a,c) ανήκει στην R. Και επειδή στην $R \cap R^{-1}$

υπάρχουν τα ζεύγη στοιχείων που ανήκουν και στις δυο σχέσεις R και R^{-1} αν (a,b) και (b,c) ανήκουν στην $R \cap R^{-1}$ τότε ανήκουν και τα (b,a) και (c,b) και επειδή η R είναι μεταβατική θα υπάρχουν στην R τα ζεύγη στοιχείων (a,c) και (c,a) τα οποία θα έχει και η $R \cap R^{-1}$. Επομένως είναι και μεταβατική η $R \cap R^{-1}$. Άρα σχέση ισοδυναμίας.

(β) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα Hasse ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου το οποίο έχει 3 minimal και 3 maximal στοιχεία, και είναι τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο είναι είτε μεγαλύτερο είτε μικρότερο από (ακριβώς) δύο άλλα στοιχεία.



(γ) Ορίζουμε μία σχέση R στο σύνολο των θετικών φυσικών ως εξής: Για κάθε $m,n \in N_+, (n,m) \in R$ αν και μόνο αν κάθε πρώτος παράγοντας του n είναι και πρώτος παράγοντας του m. Είναι η R σχέση διάταξης; Να αιτιολογήσετε κατάλληλα τον ισχυρισμό σας.

Για να είναι σχέση διάταξης θα πρέπει να ισχύει η αντισυμμετρική ιδιότητα. Το 6 και το 12 έχουν τους ίδιους πρώτους παράγοντες και επομένως $(6,12) \in R$ και $(12,6) \in R$ αλλά το 6 δεν είναι ίσο με το 12.