

Το Μοντέλο SIR

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



SIR Μοντέλο

- (Κομψό) **μαθηματικό μοντέλο** για διάδοση μεταδοτικών ασθενειών (γρίπη, ευλογιά, corona, κλπ.)
 - Προτάθηκε από **Kermack και McKendrick (1927)**.
 - Εφαρμόζεται όταν αναρρώσαντες έχουν **μόνιμη ανοσία**.
 - Μπορεί να γενικευθεί, λαμβάνοντας υπόψη **χωρικά χαρακτηριστικά** και **κοινωνικό δίκτυο**.
- Διαμέριση πληθυσμού σε τρεις κατηγορίες:
 - Σύνολο **S**: άτομα που είναι **ευάλωτα** (susceptible).
 - Σύνολο **I**: άτομα που έχουν **προσβληθεί** και **μεταδίδουν** την ασθένεια (infectious).
 - Σύνολο **R**: άτομα που έχουν **αναρρώσει** (recovered).



SIR Μοντέλο – Εξισώσεις

- Έστω N ο συνολικός πληθυσμός.
 - S_t , I_t και R_t πλήθος **Susceptible**, **Infectious** και **Recovered** τη χρονική στιγμή t (π.χ., βόρο, ημέρα, 3μέρο, εβδομάδα).
 - Προφανώς, $S_t + I_t + R_t = N$, για κάθε t .
 - β ο ρυθμός μετάδοσης
 - $1/\gamma$ χρονικό διάστημα που άτομο παραμένει infectious.
- Για κάθε χρονική στιγμή t ,
 - $S_0 = N - k$, $I_0 = k$, $R_0 = 0$
 - $\beta S_t / N$: πόσους «κολλά» κάθε infectious σε κάθε χρονική στιγμή.
 - γI_t : πόσοι infectious γίνονται «καλά» σε κάθε χρονική στιγμή.

$$S_{t+1} = S_t - \frac{\beta S_t}{N} I_t$$

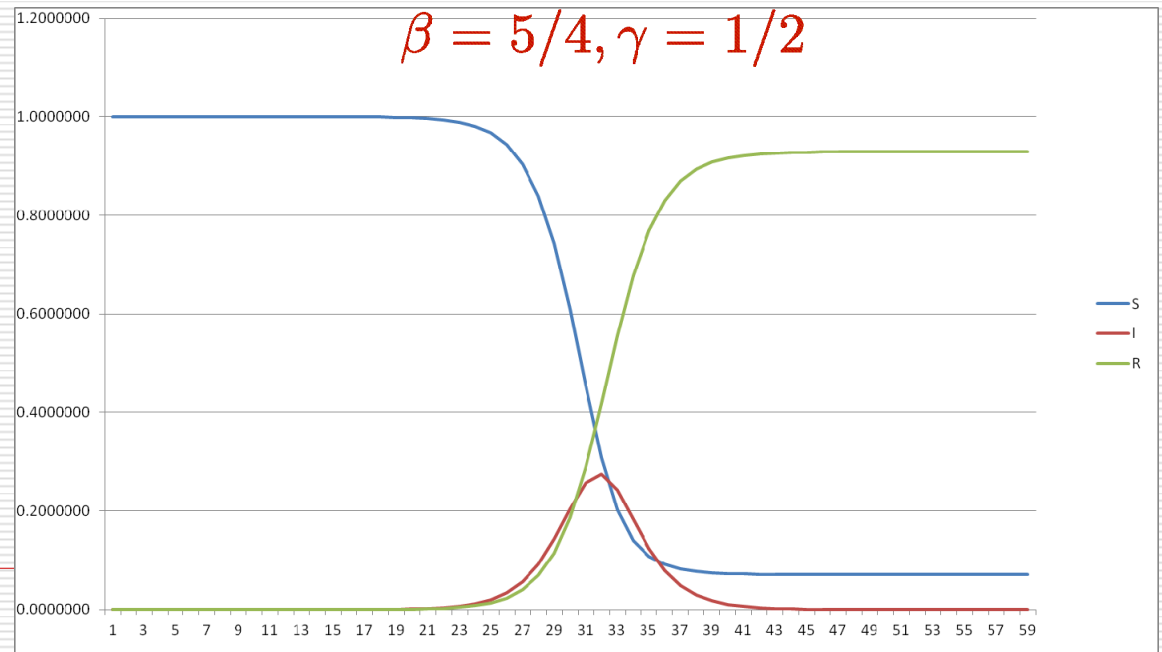
$$I_{t+1} = I_t - \gamma I_t + \frac{\beta S_t}{N} I_t$$

$$R_{t+1} = R_t + \gamma I_t$$

SIR Μοντέλο – Εξέλιξη

- Για κάθε χρονική στιγμή t ,
$$S_{t+1} = S_t - \frac{\beta S_t}{N} I_t$$
$$I_{t+1} = I_t - \gamma I_t + \frac{\beta S_t}{N} I_t$$
- Basic reproduction ratio $R_0 = \beta / \gamma$

- Ρυθμός εξάπλωσης της νόσου και βαθμός διάδοσής της στον πληθυσμό.
- Όσο $N / S_t < R_0$, εξάπλωση.
- Όταν $N / S_t > R_0$, συρρίκνωση.



SIR Μοντέλο – Έλεγχος Διάδοσης

□ Για κάθε χρονική στιγμή t ,

$$S_{t+1} = S_t - \frac{\beta S_t}{N} I_t$$
$$I_{t+1} = I_t - \gamma I_t + \frac{\beta S_t}{N} I_t$$

□ Μέθοδοι ελέγχου διάδοσης:

- **Εμβόλιο**: εμβολιασμένος πληθυσμός αφαιρείται από S_0 και προστίθεται σε R_0 .
- **Φάρμακα** μειώνουν διάστημα $1 / \gamma$ που κάποιος παραμένει infectious, άρα **αυξάνουν γ** .
- **Καραντίνα / social distancing** μειώνουν επαφές μεταξύ infectious και susceptible, άρα **μειώνουν β** .

SIR Μοντέλο – Ισορροπία

- Σε συνθήκες ισορροπίας, πρέπει να ισχύει ότι:

$$S = S - \frac{\beta S}{N} I$$

$$I = I - \gamma I + \frac{\beta S}{N} I$$

- Άρα πρέπει $\beta S I = 0$ και $\beta S I = \gamma N I$.
 - $\beta S I = \gamma N I$: αν $S = 0$, τότε και $I = 0$.
- $I = 0$ ικανοποιεί σχέσεις ισορροπίας χωρίς περιορισμό σε S .
 - Επιδημία σταματά μόνο όταν δεν υπάρχουν άλλοι infectious!