

# Δέντρα

---

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

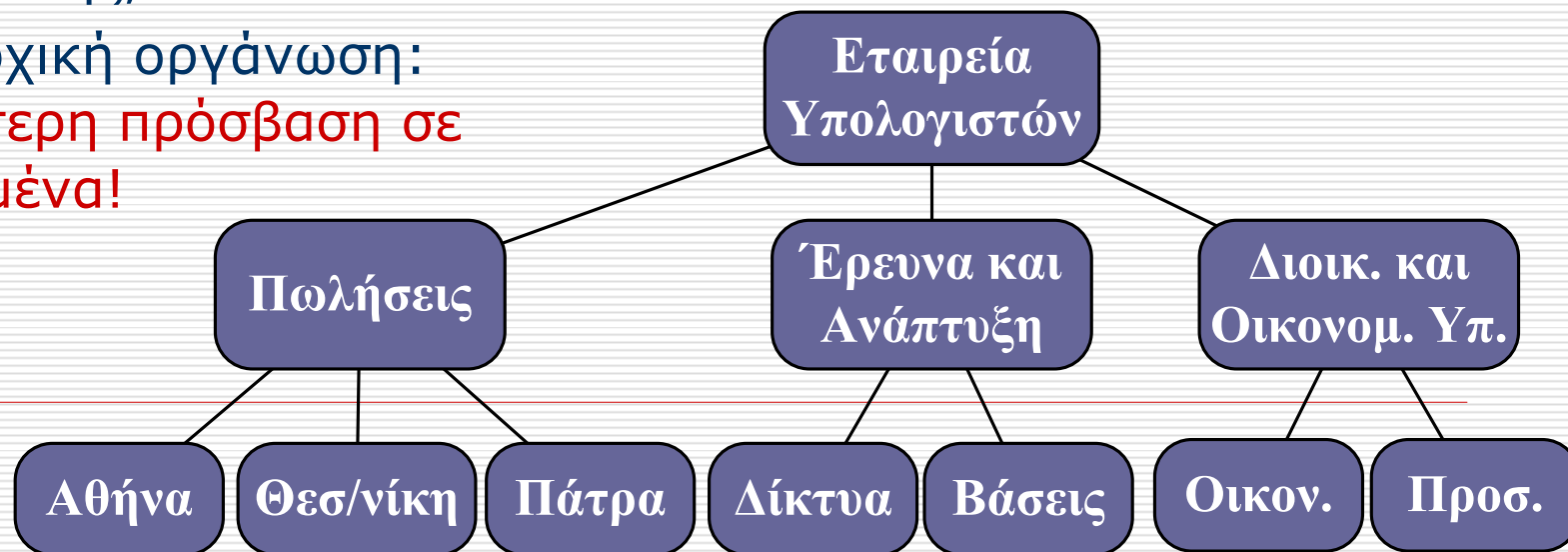
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Δέντρα

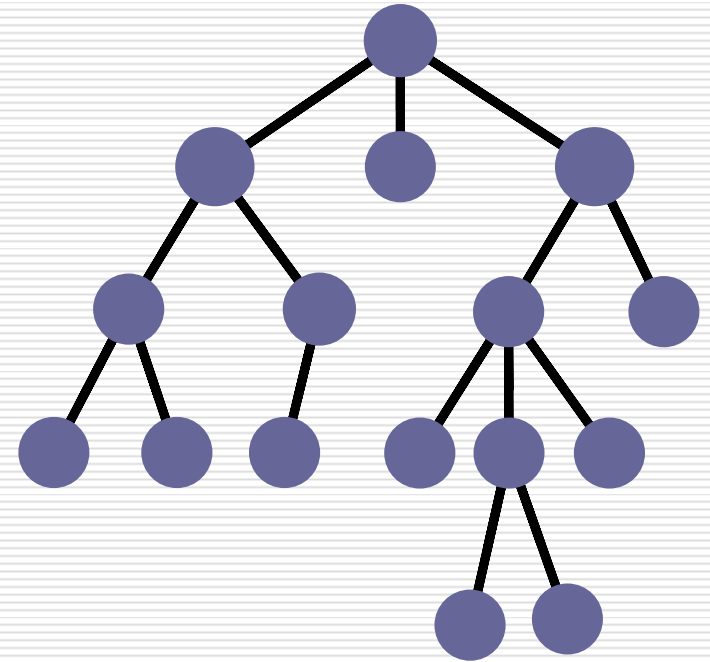
---

- **Δέντρο:** πρότυπο **ιεραρχικής δομής**.
  - Αναπαράσταση (**ιεραρχικών**) σχέσεων: προγόνου-απογόνου, προϊσταμένου-υφισταμένου, όλου-μέρους, ...
- Εφαρμογές:
  - Γενεαλογικά δέντρα.
  - Οργανόγραμμα επιχείρησης, ιεραρχία διοίκησης.
  - User interfaces, web sites, module hierarchy, δέντρα απόφασης, ...
  - Ιεραρχική οργάνωση:  
**ταχύτερη πρόσβαση σε δεδομένα!**



# Δέντρα: Βασικές Ιδιότητες

- Γράφημα **ακυκλικό** και **συνεκτικό**.
- Τα παρακάτω είναι **ισοδύναμα** για κάθε απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G(V, E)$ :
  - $G$  είναι **δέντρο**.
  - Κάθε ζευγάρι κορυφών του  $G$  συνδέεται με **μοναδικό μονοπάτι**.
  - $G$  **ελαχιστικά συνεκτικό**.
  - $G$  **συνεκτικό** και  $|E| = |V| - 1$ .
  - $G$  **ακυκλικό** και  $|E| = |V| - 1$ .
  - $G$  **μεγιστικά ακυκλικό**.
- Άθροισμα βαθμών =  $2(|V| - 1)$



# Δέντρα: Βασικές Ιδιότητες

---

- Αν  $G$  δέντρο, τότε κάθε ζευγάρι κορυφών του  $G$  συνδέεται με μοναδικό μονοπάτι.
  - Αφού  $G$  συνεκτικό, κάθε ζευγάρι κορυφών συνδέεται με μονοπάτι.
  - Αν για κάποιο ζευγάρι κορυφών είχαμε δύο εναλλακτικά μονοπάτια, θα είχαμε κύκλο.
- Αν κάθε ζευγάρι κορυφών του  $G$  συνδέεται με μοναδικό μονοπάτι, τότε το  $G$  ελαχιστικά συνεκτικό.
  - Συνεκτικό γιατί όλες οι κορυφές συνδέονται.
  - Ελαχιστικά συνεκτικό γιατί τα μονοπάτια είναι μοναδικά.

# Δέντρα: Βασικές Ιδιότητες

---

- Αν  $G$  είναι ελαχιστικά συνεκτικό, τότε το  $G$  είναι συνεκτικό και έχει  $m = n - 1$ .
  - Επαγωγή για το πλήθος των ακμών.
  - Βάση  $n = 1$ , τετριμμένη περίπτωση (μεμονωμένη κορυφή).
  - Βήμα: αφαίρεση ακμής δημιουργεί δύο συνεκτικές συνιστώσες με  $k$  και  $n - k$  κορυφές.
  - Οι συνιστώσες είναι ελαχιστικά συνεκτικές: από επαγωγική υπόθεση έχουν  $k - 1$  και  $n - k - 1$  ακμές.
  - Άρα  $(k - 1) + (n - k - 1) + 1 = n - 1$  ακμές συνολικά.

# Δέντρα: Βασικές Ιδιότητες

---

- Αν  $G$  είναι **συνεκτικό** και έχει  $m = n - 1$ , τότε το  $G$  είναι **ακυκλικό** και έχει  $m = n - 1$ .
  - Αν  $G$  έχει **κύκλο**, αφαιρούμε **ακμή** και παραμένει **συνεκτικό**.
  - Άτοπο, δεν υπάρχει **συνεκτικό** γράφημα με  $< n - 1$  ακμές.
- Αν  $G$  είναι **ακυκλικό** και έχει  $m = n - 1$ , τότε το  $G$  είναι **μεγιστικά ακυκλικό**.
  - Αρκεί να δείξουμε ότι το  $G$  είναι **συνεκτικό** (μετά η προσθήκη μιας **ακμής** δημιουργεί **κύκλο** με μονοπάτι στα άκρα της).
  - Αν  $G$  **μη** **συνεκτικό**, κάθε **συνεκτική** **συνιστώσα** είναι **ακυκλική**, άρα **δέντρο** (και άρα έχει  $n_p - 1$  ακμές).
  - Αν  $k$  **συνεκτικές** **συνιστώσες**,  $n - k$  **ακμές** **συνολικά**.
  - Άρα έχουμε  $k = 1$  **συνεκτική** **συνιστώσα**.

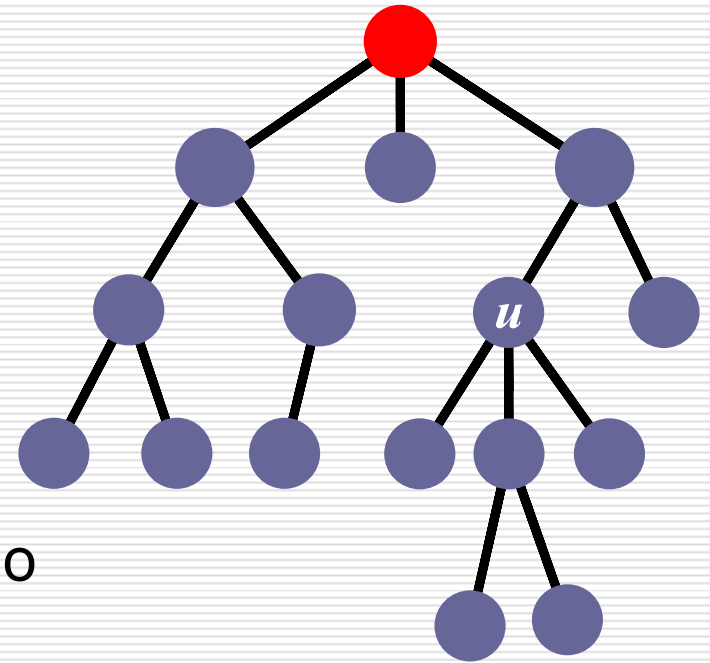
# Δέντρα: Βασικές Ιδιότητες

---

- Αν  $G$  είναι **μεγιστικά ακυκλικό**, τότε το  $G$  είναι **ακυκλικό** και **συνεκτικό** (δέντρο).
  - Αν  $G$  μη συνεκτικό, προσθήκη ακμής μεταξύ συνεκτικών συνιστωσών δεν δημιουργεί κύκλο, αντίφαση!
- Ένα γράφημα με  $n$  κορυφές και  $< n - 1$  ακμές δεν είναι **συνεκτικό**.
- Απλό γράφημα με  $n$  κορυφές και **τουλάχιστον  $n$  ακμές** έχει τουλάχιστον έναν **κύκλο**.
- Μη συνεκτικό **ακυκλικό** γράφημα είναι **δάσος**.
  - Συνεκτικές συνιστώσες ενός δάσους είναι δέντρα.
- **Φύλλο**: κορυφή (δέντρου) με **βαθμό 1**.
  - Κάθε δέντρο έχει **τουλάχιστον 2 φύλλα**.

# Δέντρα (με Ρίζα): Ορολογία

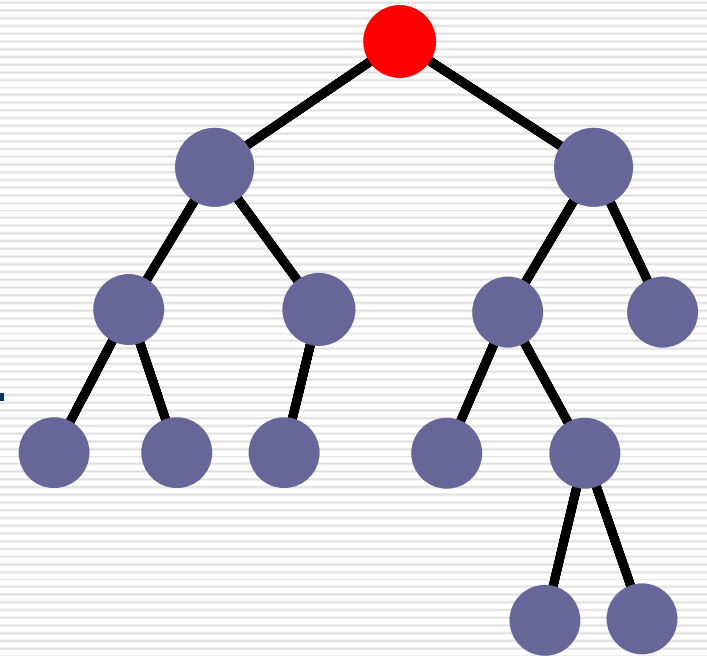
- **Ρίζα** : κόμβος χωρίς πρόγονο.
  - Δέντρο με **ρίζα** : **ιεραρχία**
- **Πρόγονοι  $u$** : κόμβοι στο (μοναδικό) μονοπάτι  $u$  προς ρίζα.
- **Απόγονοι  $u$** : κόμβοι σε μονοπάτια από  $u$  προς φύλλα.
- **Υποδέντρο  $u$**  : Δέντρο αποτελούμενο από  $u$  και απόγονούς του.





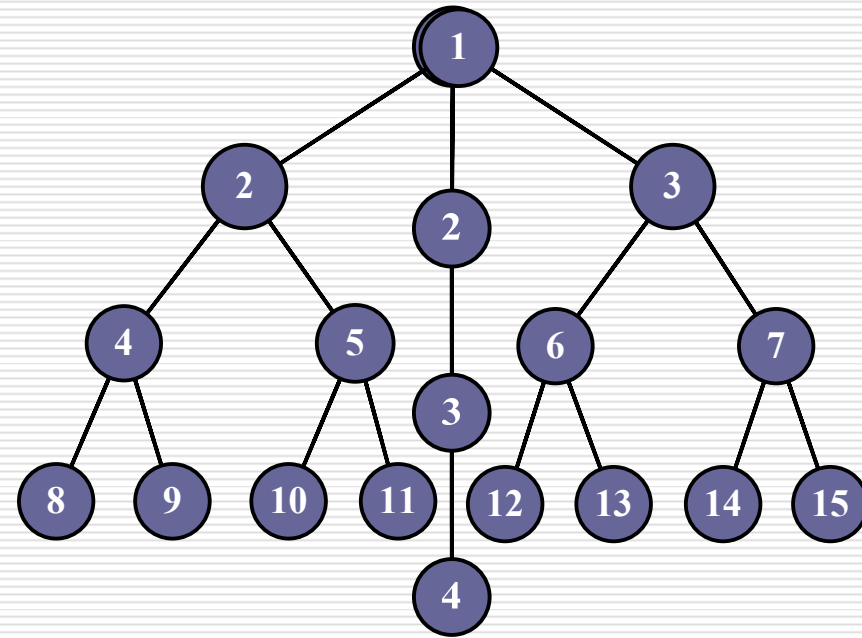
# Δέντρα (με Ρίζα): Ορολογία

- **Επίπεδο  $u$**  : μήκος μονοπατιού από  $u$  προς ρίζα.
- **Ύψος** : μέγιστο επίπεδο κόμβου (φύλλου).
  - Μέγιστη απόσταση φύλλου από ρίζα.
- **Δυαδικό δέντρο** :  
κάθε κορυφή  $\leq 2$  **παιδιά**
  - **Αριστερό** και **δεξιό**.
- Κάθε **υποδέντρο** είναι δυαδικό δέντρο.



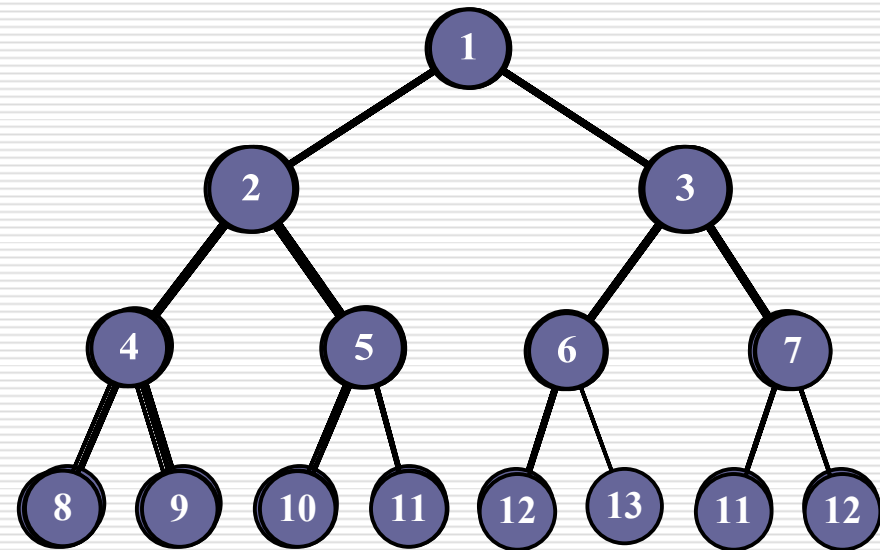
# Δυαδικά Δέντρα

- #κορυφών για ύψος =  $h$ :  
 $h+1 \leq \#κορυφών \leq 2^{h+1} - 1$ 
  - $h+1$  επίπεδα,  $\geq 1$  κορ. / επίπ.
  - $\leq 2^i$  κορυφές στο επίπεδο  $i$ .  
 $1 + 2 + \dots + 2^h = 2^{h+1} - 1$
- Ύψος για #κορυφών =  $n$ :  
 $\log_2(n+1) - 1 \leq \text{ύψος} \leq n - 1$
- **Γεμάτο** (full):
  - Κάθε κορυφή είτε φύλλο είτε 2 παιδιά.
- **Πλήρες** (complete) :
  - Όλα τα επίπεδα συμπληρωμένα (εκτός ίσως τελευταίο).
- **Τέλειο** (perfect) :  $n = 2^{h+1} - 1$



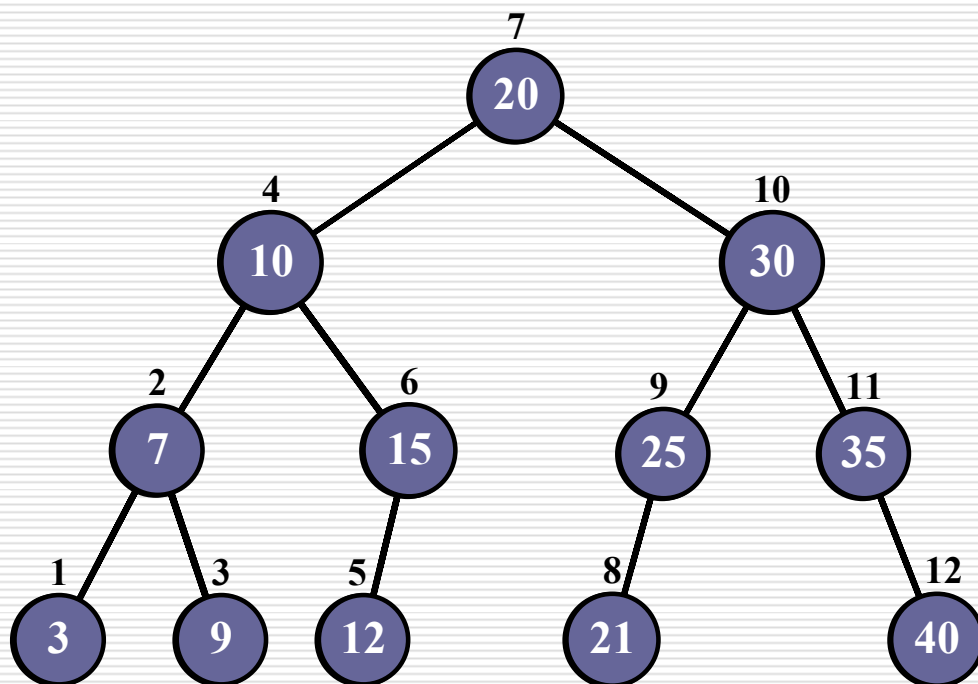
# Πλήρες

- Όλα τα επίπεδα **συμπληρωμένα εκτός ίσως από τελευταίο** που γεμίζει από αριστερά προς τα δεξιά.
- $n(h)$ : #κορυφών για ύψος  $h$ :  
 $2^h \leq n(h) \leq 2^{h+1} - 1$ 
  - τέλειο( $h$ ) :  $2^{h+1} - 1$
  - τέλειο( $h - 1$ ) + 1 :  $(2^h - 1) + 1 = 2^h$ .
- $h(n)$ : ύψος για  $n$  κορυφές:  
 $\log_2(n+1) - 1 \leq h(n) \leq \log_2 n$
- Ύψος :  $h(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$
- #φύλλων =  $\lceil n / 2 \rceil$



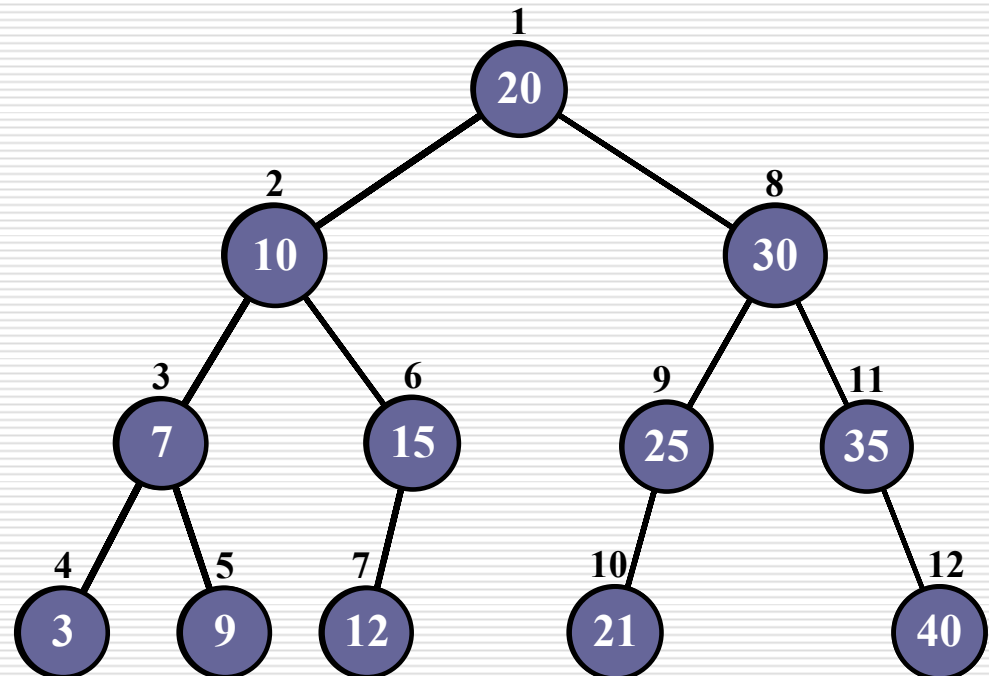
# Inorder

- **Ενδο**-διατεταγμένη (inorder) διέλευση:
  - Αριστερό – Ρίζα – Δεξί.
  - Κόμβος εξετάζεται **μετά** από κόμβους αριστερού υποδέντρου και **πριν** από κόμβους δεξιού υποδέντρου.



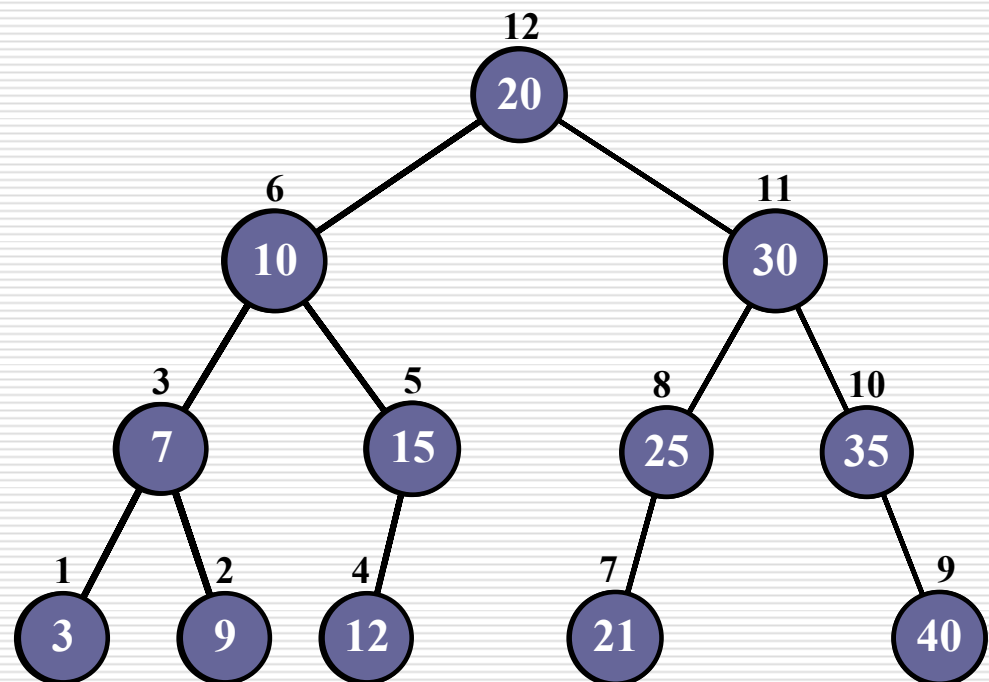
# Preorder

- Προ-διατεταγμένη (preorder) διέλευση:
  - Ρίζα – Αριστερό – Δεξί.
  - Κόμβος εξετάζεται **πριν** από κόμβους αριστερού και δεξιού υποδέντρου.



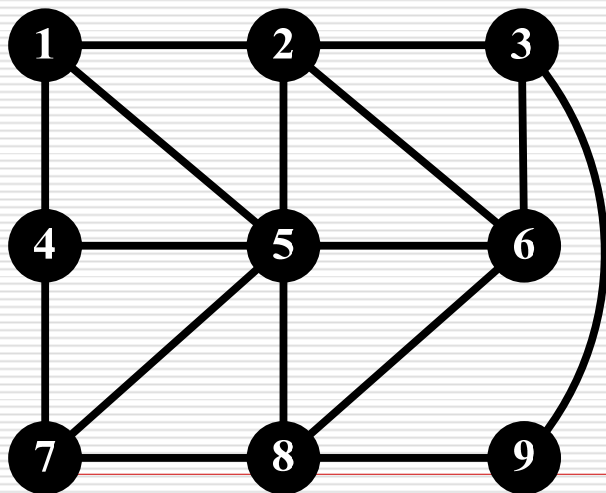
# Postorder

- **Μετα**-διατεταγμένη (preorder) διέλευση:
  - Αριστερό – Δεξί – Ρίζα
  - Κόμβος εξετάζεται **μετά** από κόμβους αριστερού και δεξιού υποδέντρου.

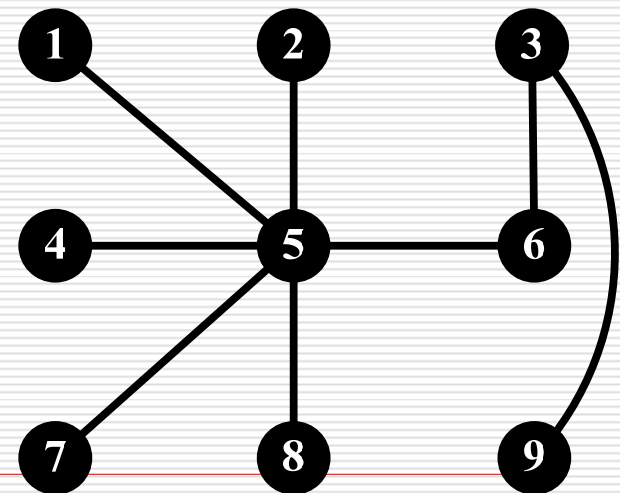
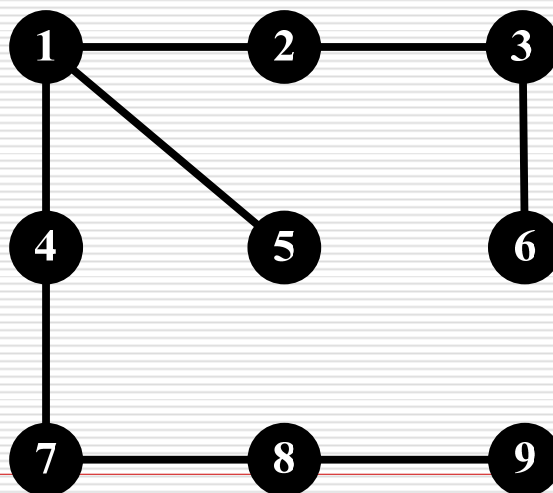


# Συνδετικό (Επικαλύπτον) Δέντρο (Spanning Tree)

- Έστω συνεκτικό γράφημα  $G(V, E)$ :
  - Κάθε δέντρο  $T(V, E')$ , με  $E' \subseteq E$ , που «καλύπτει» όλες τις κορυφές είναι **επικαλύπτον** (ή συνδετικό, spanning) δέντρο του  $G$ .
  - Γράφημα  $G$  συνεκτικό ανν έχει **συνδετικό** δέντρο.
  - Υπολογισμός ενός συνδετικού δέντρου με **Αναζήτηση κατά Πλάτος** ή **Αναζήτηση κατά Βάθος**.



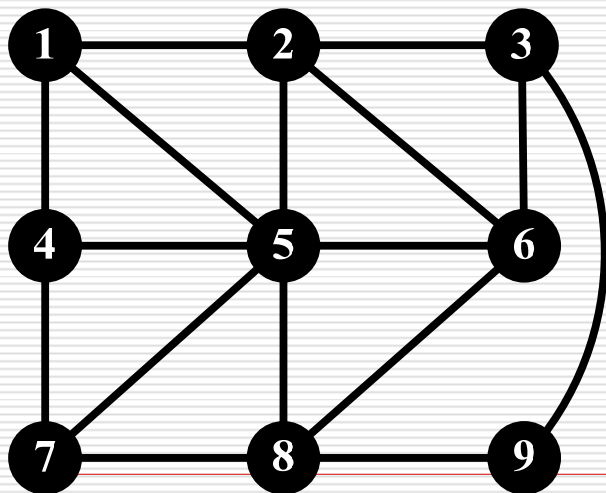
Διακριτά Μαθηματικά (Άνοιξη 2020)



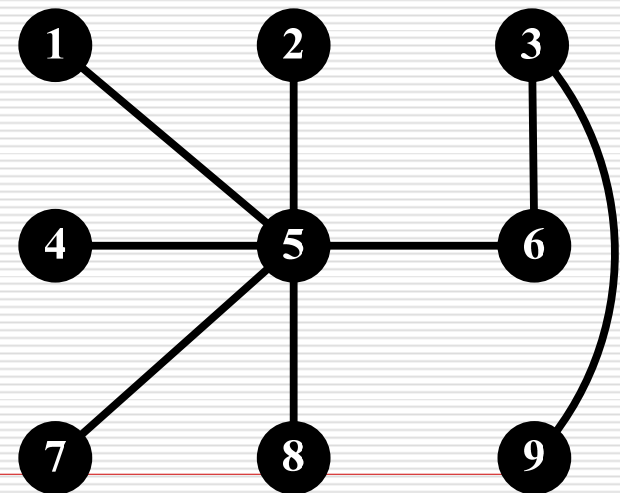
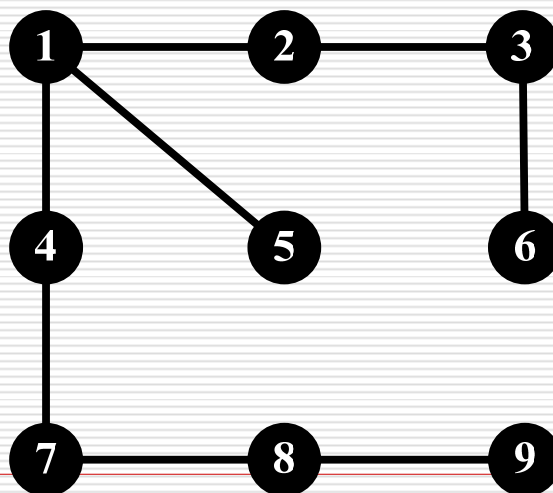
Δέντρα 15

# Συνδετικό (Επικαλύπτον) Δέντρο (Spanning Tree)

- Συνεκτικό  $G$  μπορεί να έχει πολλά συνδετικά δένδρα.
  - Πότε  $G$  έχει μοναδικό συνδετικό δέντρο;
  - Θεώρημα Cayley (1889):  $K_n$  έχει  $n^{n-2}$  συνδετικά δένδρα



Διακριτά Μαθηματικά (Άνοιξη 2020)

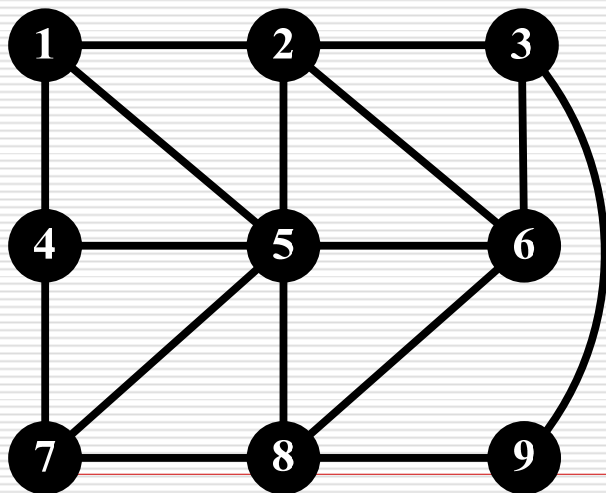


Δέντρα 16

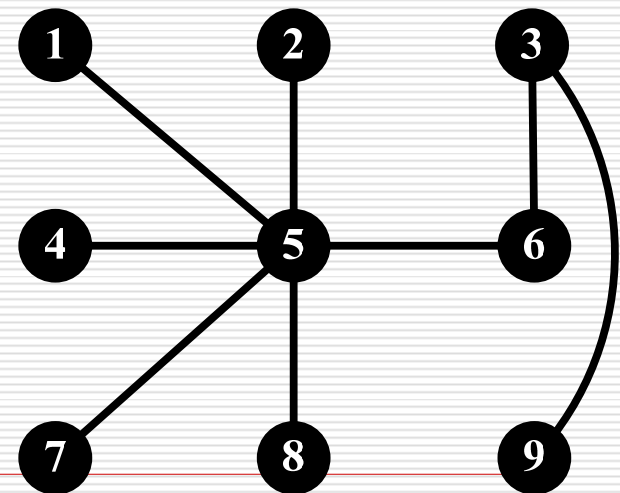
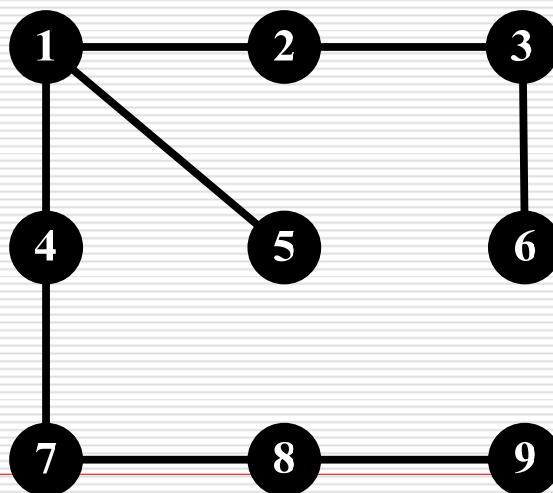


# Συνδετικό (Επικαλύπτον) Δέντρο (Spanning Tree)

- Έστω  $T$  και  $T'$  συνδετικά δέντρα  $G$ . Για κάθε ακμή  $e \in T \setminus T'$ , υπάρχει ακμή  $e' \in T' \setminus T$ , τ.ω.  $(T'+e) - e'$  είναι συνδετικό δέντρο.
  - Για κάθε  $e$  εκτός του  $T'$ , το  $T'+e$  περιέχει μοναδικό κύκλο  $C$ .
  - Αφαιρούμε οποιαδήποτε ακμή  $e'$  του  $C$  που δεν ανήκει στο  $T$ .
    - Υπάρχει τέτοια ακμή  $e'$  γιατί κύκλος  $C$  δεν σχηματίζεται στο  $T$ .
    - Η  $e'$  είναι διαφορετική της  $e$  γιατί  $e \in T$ .
  - $(T'+e) - e'$  συνδετικό δέντρο: συνεκτικό, ακυκλικό όλες τις κορυφές.



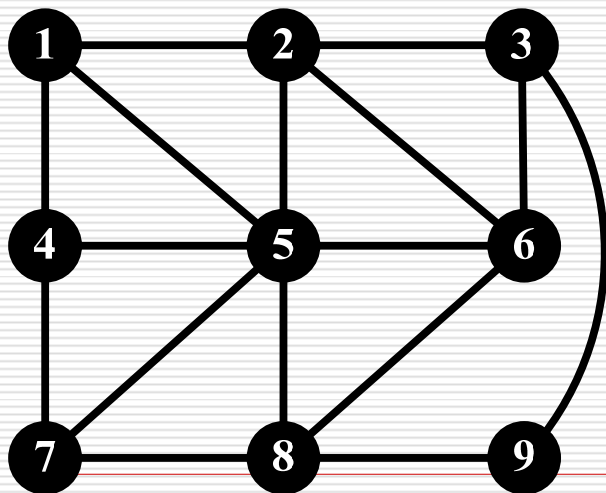
Διακριτά Μαθηματικά (Άνοιξη 2020)



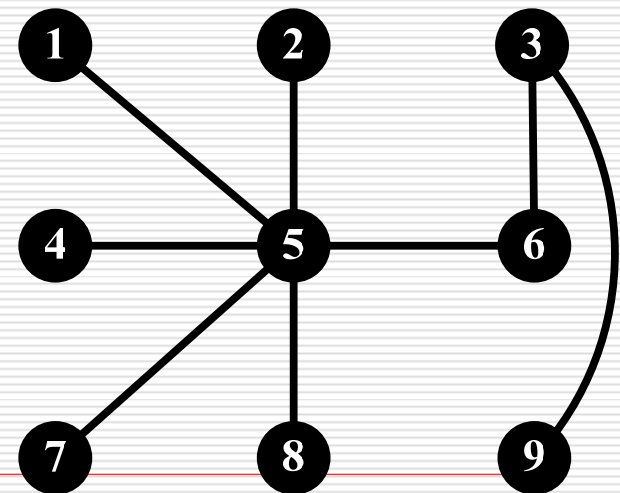
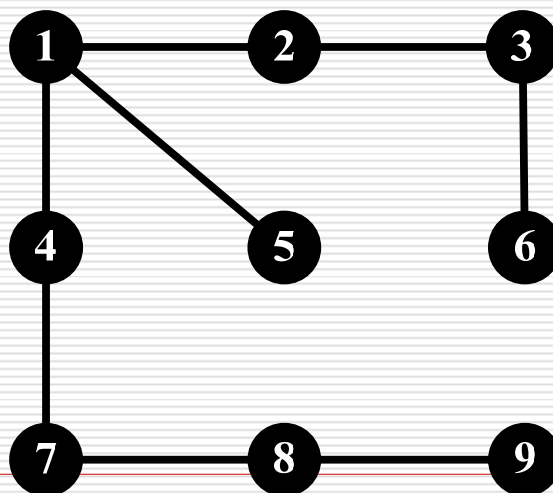
Δέντρα 17

# Συνδετικό (Επικαλύπτον) Δέντρο (Spanning Tree)

- Έστω  $T$  και  $T'$  συνδετικά δέντρα  $G$ . Για κάθε ακμή  $e \in T \setminus T'$ , υπάρχει ακμή  $e' \in T' \setminus T$ , τ.ω.  $(T - e) + e'$  είναι συνδετικό δέντρο.
- Από οποιοδήποτε συνδετικό δέντρο  $T$  μπορούμε να «μεταβούμε» σε οποιοδήποτε άλλο  $T'$  με διαδοχικές «ανταλλαγές» ακμών.
  - Χρειάζονται ακριβώς  $|T \setminus T'|$  «ανταλλαγές» ακμών. Από κάθε ανταλλαγή προκύπτει συνδετικό δέντρο.
  - (Διακριτό) σύνολο  $\Sigma\Delta$  έχει παρόμοια δομή με (συνεχή) κυρτά σύνολα!



Διακριτά Μαθηματικά (Άνοιξη 2020)



Δέντρα 18

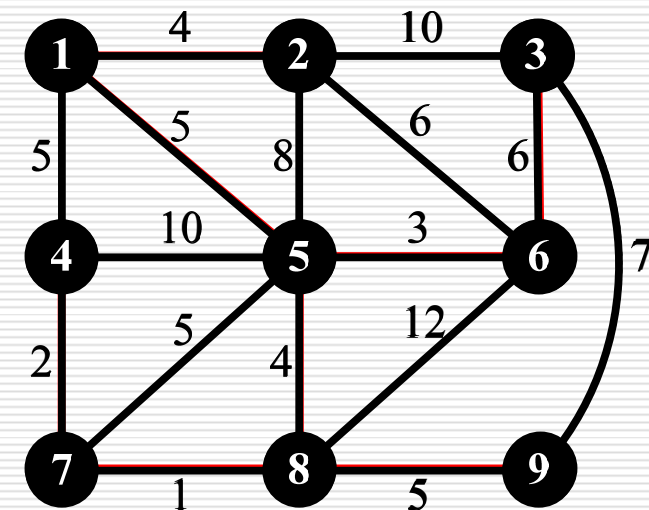
# Παραδείγματα

---

- Νδο κάθε δέντρο με  $n \geq 2$  κορυφές έχει **τουλ. 2 κορυφές** που **δεν είναι σημεία κοπής**.
  - Τα **φύλλα** δεν είναι σημεία κοπής.
- Νδο κάθε συνεκτικό γράφημα με  $n \geq 2$  κορυφές έχει **τουλ. 2 κορυφές** που **δεν είναι σημεία κοπής**.
  - Τα **φύλλα του συνδετικού δέντρου** δεν είναι σημεία κοπής.
- Να διατυπώσετε **αλγόριθμο** για την **εύρεση 2 κορυφών** που **δεν είναι σημεία κοπής**.
  - Βρίσκουμε **φύλλα στο δέντρο** της Αναζ. κατά Πλάτος (ή Βάθος).
- Συνεκτικό γράφημα  $G$  με  $n \geq 4$  κορυφές. Νδο αν το  $G$  έχει **ζευγάρι διαφορετικών συνδετικών δέντρων χωρίς κοινές ακμές**, τότε το  $G$  **δεν έχει γέφυρα**.
  - Μια ακμή είναι γέφυρα αν ανήκει σε όλα τα  **$\Sigma\Delta$**  ενός συνεκτικού γραφήματος.

# Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο (MST)

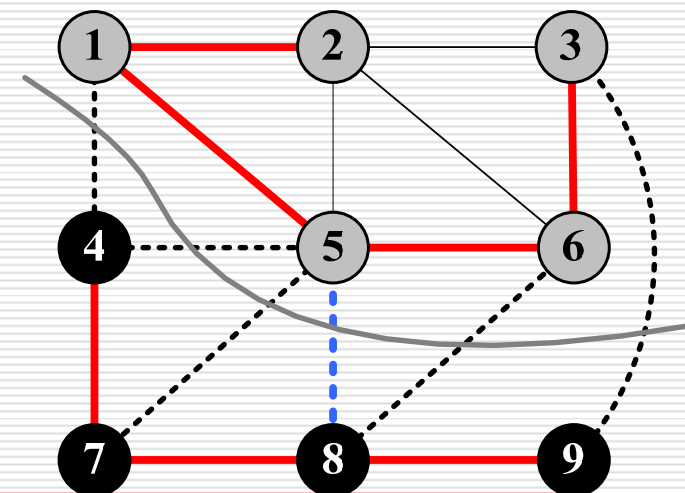
- Συνεκτικό μη-κατευθ.  $G(V, E, w)$  με βάρη  $w : E \mapsto \mathbb{R}_{>0}$ 
  - Βάρος υπογραφήματος  $T(V, E_T): w(T) = \sum_{e \in E_T} w(e)$
- Ζητούμενο: ελάχιστου βάρους **συνεκτικό** υπογράφημα που καλύπτει όλες τις κορυφές.
  - Συνεκτικό (εξ' ορισμού) + ακυκλικό (ελάχιστο)  $\Rightarrow$  Δέντρο.
  - **Minimum Spanning Tree** (MST, ΕΣΔ).
- Πρόβλημα συνδυαστ. βελτιστοποίησης με πολλές και σημαντικές εφαρμογές.
  - Σχεδιασμός συνδετικού δικτύου (οδικού, τηλεπ/κου, ηλεκτρικού) με ελάχιστο κόστος.



Δέντρα 20

# Τομές, Σύνολα Τομής και Συνδετικά Δέντρα

- Τομή  $(S, V \setminus S)$ : διαμέριση κορυφών σε 2 σύνολα  $S, V \setminus S$ .
- Σύνολο τομής  $\delta(S, V \setminus S)$ : σύνολο ακμών με ένα άκρο στο  $S$  και το άλλο άκρο στο  $V \setminus S$ .
  - $\delta(S, V \setminus S)$ : όλες οι ακμές που **διασχίζουν** τομή  $(S, V \setminus S)$ .
- Σύνολο  $E'$  **διασχίζει** τομή  $(S, V \setminus S)$ :  $E' \cap \delta(S, V \setminus S) \neq \emptyset$
- Γράφημα  $G(V, E)$  **συνεκτικό** ανν  $E$  **διασχίζει** κάθε τομή.
  - Για κάθε (μη κενό)  $S \subseteq V$ , υπάρχει ακμή με ένα άκρο στο  $S$  και άλλο άκρο στο  $V \setminus S$ .
  - Συνδετικό δέντρο: **ελαχιστικό σύνολο ακμών που διασχίζει** κάθε τομή.



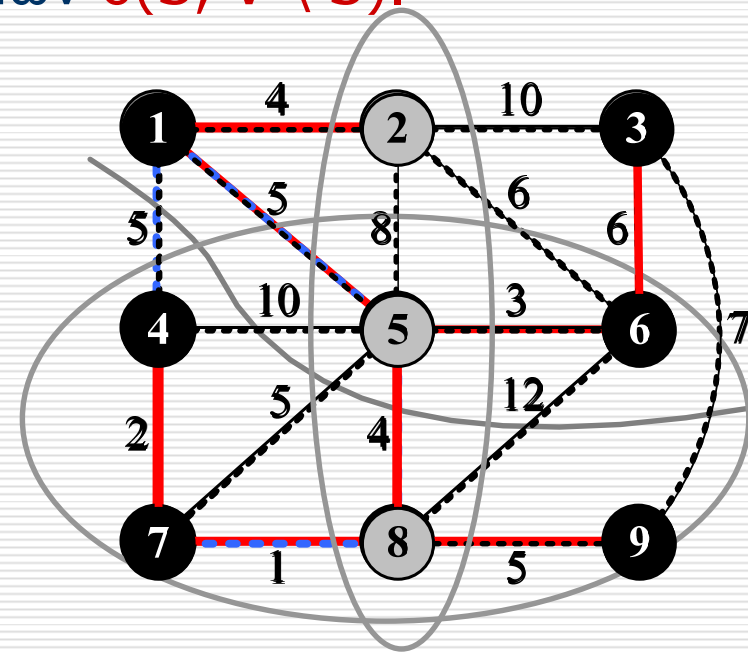
# Κανόνες Σχηματισμού ΕΣΔ

---

- Ακμή  $e$  που για κάποια τομή  $(S, V \setminus S)$ , αποτελεί **ελάχιστου βάρους ακμή που διασχίζει τομή  $(S, V \setminus S)$** :
  - $e$  **ανήκει** σε κάποιο ΕΣΔ.
- Ακμή  $e$  που για κάποιον κύκλο  $C$  αποτελεί **μέγιστου βάρους ακμή κύκλου  $C$** :
  - Αν βάρος  $e$  **μεγαλύτερο** από βάρος άλλων ακμών του  $C$ ,  $e$  **δεν ανήκει** σε κανένα ΕΣΔ.
  - Αν όλες οι ακμές του  $C$  έχουν ίδιο βάρος,  $e$  **δεν ανήκει** σε κάποιο ΕΣΔ.
  - Ενόσω υπάρχει κύκλος  $C$ , **αποκλεισμός** (μιας) βαρύτερης ακμής  $C$ .

# Άπληστος Αλγόριθμος για ΕΣΔ

- Έστω  $\Delta$  δάσος (σύνολο ακμών χωρίς κύκλους).
- Ακμή  $e \notin \Delta$  είναι **ακμή επαύξησης** για  $\Delta$  αν:
  - $e$  διασχίζει μια τομή  $(S, V \setminus S)$  που δεν διασχίζει το  $\Delta$ , και
  - $e$  είναι ελάχιστου βάρους μεταξύ ακμών  $\delta(S, V \setminus S)$ .
- Ακμή επαύξησης για δάσος  $\Delta$  οδηγεί σε ΕΣΔ έπειτα από  $|V|-1$  βήματα:
  - Αν  $\Delta$  δάσος και  $e$  ακμή επαύξησης για  $\Delta$ ,  $\Delta \cup \{e\}$  δάσος.
    - $e$  δεν δημιουργεί κύκλο.
  - Αν  $\Delta \subset \text{ΕΣΔ}$  και  $e$  ακμή επαύξησης  $\Delta$ ,  $\Delta \cup \{e\} \subseteq \text{ΕΣΔ}$ .



# Άπληστος Αλγόριθμος για ΕΣΔ

---

$\text{MST}(G(V, E, w))$

$\Delta \leftarrow \emptyset;$

**while**  $|\Delta| < |V| - 1$  **do**

**Υπολόγισε** μια **ακμή επαύξησης**  $e$  για  $\Delta$ ;

$\Delta \leftarrow \Delta \cup \{e\};$

**return**( $\Delta$ );

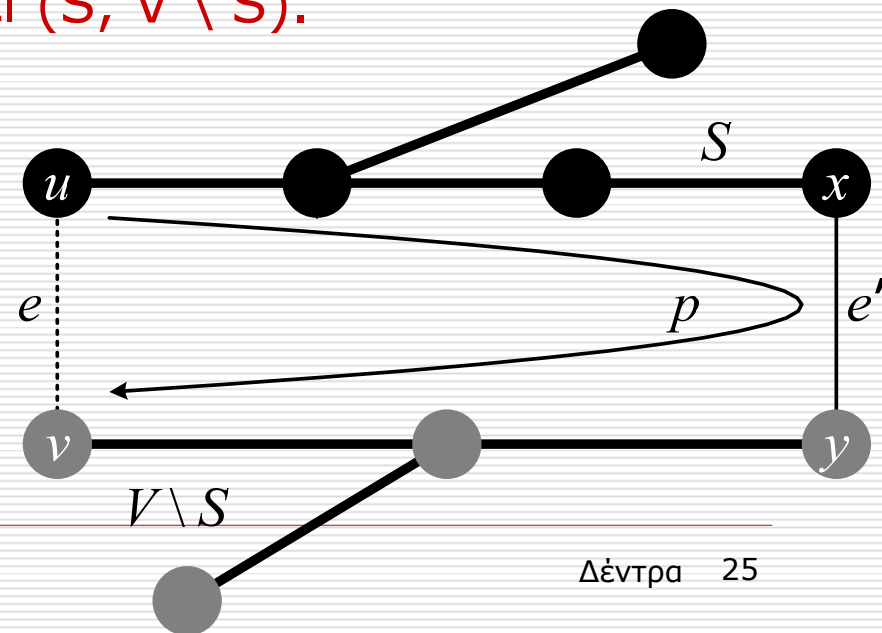
- Αρχικά  $\Delta = \emptyset$  **δάσος** και **υποσύνολο** κάθε ΕΣΔ.
- **Επαγωγικά**,  $e$  ακμή επαύξησης για  $\Delta$ :
  - $\Delta \cup \{e\}$  **δάσος** και **υποσύνολο** κάποιου ΕΣΔ.
- Όταν  $|\Delta| = |V| - 1$ ,  $\Delta$  δέντρο, άρα και **ΕΣΔ**.



# Ορθότητα

□ Έστω δάσος  $\Delta \subset \text{ΕΣΔ}$  και  $e = \{u, v\}$  **ακμή επαύξησης**  $\Delta$ .  
Τότε  $\Delta \cup \{e\} \subseteq \text{ΕΣΔ}$ .

- $(S, V \setminus S)$  τομή που δεν διασχίζει  $\Delta$  και διασχίζει η ακμή  $e$ .
- $e$  ελάχιστου βάρους μεταξύ ακμών του  $\delta(S, V \setminus S)$ .
- Έστω  $T \in \text{ΕΣΔ}$  τ.ω.  $\Delta \subseteq T$ . Υποθέτουμε ότι  $\Delta \cup \{e\} \not\subseteq T$
- Έστω  $p$  μονοπάτι  $u - v$  στο  $T$ , και  $e' = \{x, y\}$  ακμή  $T$  που διασχίζει  $(S, V \setminus S)$ .
- Αφού  $w(e) \leq w(e')$ , και το  $T' = (T \cup \{e\}) \setminus \{e'\}$  είναι **ΕΣΔ**:  
 $w(T') = w(T) + w(e) - w(e') \leq w(T)$
- Έχουμε ότι  $\Delta \subseteq T$  και  $e' \notin \Delta$ .  
Άρα  $\Delta \subseteq T \setminus \{e'\} = T' \setminus \{e\}$
- ... και  $\Delta \cup \{e\} \subseteq T'$



# Αλγόριθμος Kruskal

---

MST-Kruskal( $G(V, E, w)$ )

Ταξινόμηση ακμές σε αύξουσα σειρά βάρους,  $w(e_1) \leq \dots \leq w(e_m)$ .

$\Delta \leftarrow \emptyset; i \leftarrow 1;$

**while**  $|\Delta| < |V| - 1$  **and**  $i \leq m$  **do**

**if**  $\Delta \cup \{e_i\}$  δεν έχει κύκλο **then**

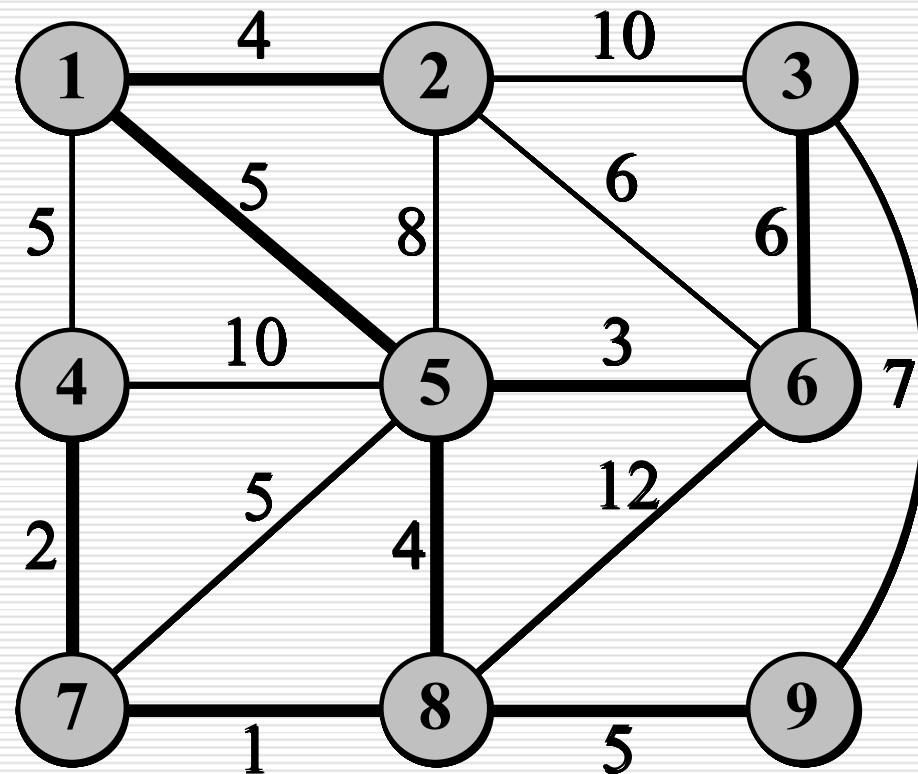
$\Delta \leftarrow \Delta \cup \{e_i\};$

$i \leftarrow i + 1;$

- **Ορθότητα:** αν  $e_i$  προστεθεί τότε:
  - Όχι κύκλος, άρα  $e_i$  διασχίζει μια τομή που δεν διασχίζει το  $\Delta$ .
  - Αύξουσα σειρά βάρους:  $e_i$  ελάχιστου βάρους (πρώτη που ελέγχεται) από όσες ακμές διασχίζουν συγκεκριμένη τομή.

# Αλγόριθμος Kruskal: Παράδειγμα

---



# Αλγόριθμος Prim

---

MST-Prim( $G(V, E, w), s$ )

**for all**  $u \in V$  **do**

$c[u] \leftarrow \infty$ ;  $p[u] \leftarrow \text{NULL}$ ;

$c[s] \leftarrow 0$ ;  $S \leftarrow \emptyset$ ;  $\Delta \leftarrow \emptyset$ ;

**while**  $|S| < |V|$  **do**

$u \notin S : c[u] = \min_{v \notin S} \{c[v]\}$ ;

$S \leftarrow S \cup \{u\}$ ;

**for all**  $v \in \text{AdjList}[u]$  **do**

**if**  $v \notin S$  **and**  $w(u, v) < c[v]$  **then**

$c[v] \leftarrow w(u, v)$ ;

$p[v] \leftarrow u$ ;

**if**  $p[u] \neq \text{NULL}$  **then**

$\Delta \leftarrow \Delta \cup \{u, p[u]\}$ ;

□ **Ορθότητα:**

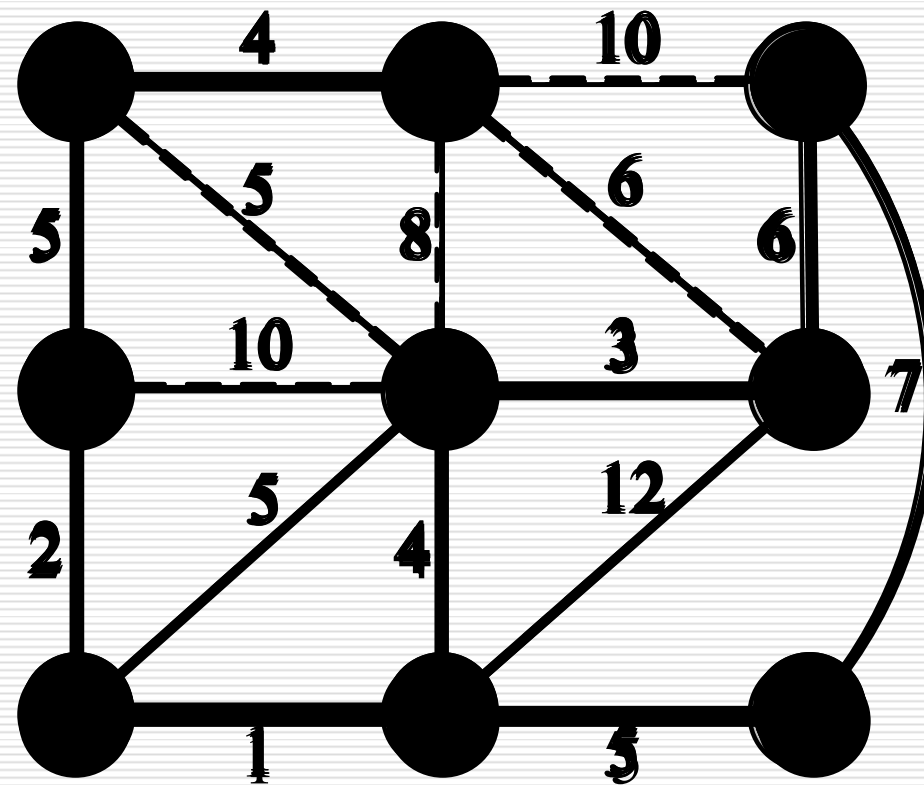
■ Ακμή  $\{v, p[v]\}$ :

□ Διασχίζει τομή  $(S, V \setminus S)$ .

□ Ελάχιστου βάρους μεταξύ ακμών του  $\delta(S, V \setminus S)$ .

# Αλγόριθμος Prim: Παράδειγμα

---



# Ασκήσεις

---

- Έστω γράφημα  $G$  με διαφορετικά βάρη στις ακμές.
  - Νδο κάθε ΕΣΔ του  $G$  περιέχει την ακμή ελάχιστου βάρους.
  - Νδο  $G$  έχει μοναδικό ΕΣΔ.
  - Αληθεύει ότι η ακμή μέγιστου βάρους δεν ανήκει στο ΕΣΔ;
- Μεταβολή (αύξηση ή μείωση) βάρους ακμής μετά τον υπολογισμό ενός ΕΣΔ;
- Έστω γράφημα  $G$  με κύκλο  $C$ .
  - Νδο η ακμή μέγιστου βάρους του  $C$  (αν είναι μοναδική) δεν ανήκει σε κανένα ΕΣΔ του  $G$ .
- Έστω  $T$  ΕΣΔ για γράφημα  $G(V, E, w)$ .
  - Να δείξετε ότι  $T$  παραμένει ΕΣΔ για  $G(V, E, w/2)$ .
  - Αληθεύει ότι το  $T$  παραμένει ΕΣΔ για  $G(V, E, w+k)$ ;

# Ασκήσεις

---

- Υπολογισμός ΕΣΔ  $T$  υπό περιορισμούς ότι κάποιες ακμές πρέπει να (μην) ανήκουν στο  $T$ ;
- Υπολογισμός ΕΣΔ  $T$  (αν υπάρχει) όταν δεδομένο σύνολο κορυφών  $L$  πρέπει να είναι φύλλα του  $T$ ;
- Υπολογισμός ΣΔ με μέγιστο βάρος;