

# Μαθηματική Επαγωγή

---

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

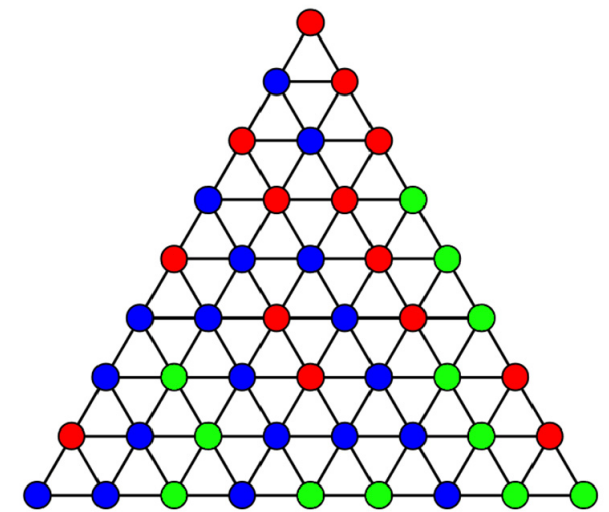


# Τεχνικές Απόδειξης

---

- Εξαντλητική μέθοδος: **πεπερασμένος** αριθμός περιπτώσεων.
- Απόδειξη για  $p \rightarrow q$ :
  - Ευθέως: αιτιολογούμε ότι συμπέρασμα  $q$  έπεται από υπόθεση  $p$ .
  - **Αντιθετοαναστροφή**: αιτιολογούμε ότι η άρνηση της υπόθεσης ( $\neg p$ ) έπεται από την άρνηση του συμπεράσματος ( $\neg q$ ).
    - Ιδιότητα  $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
    - Π.χ. αν  $n^2$  περιττός, τότε  $n$  περιττός.
  - **Απαγωγή σε άτοπο**: Υποθέτουμε ότι  $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$  και αιτιολογούμε **αντίφαση**.
    - Π.χ. το  $\sqrt{2}$  είναι άρρητος (Πυθαγόρας).
- Μαθηματική Επαγωγή.

# Αποδείξεις Ύπαρξης



- Κατασκευαστικές αποδείξεις ύπαρξης.
  - Αλγόριθμος κατασκευής του ζητούμενου.
- Μη κατασκευαστικές αποδείξεις ύπαρξης.
  - Αρχή περιστρώνα.
    - Αν  $m$  μπάλες σε  $n$  κουτιά και  $m > n$ , τότε κάποιο κουτί έχει περισσότερες από 1 μπάλες.
  - Επιχειρήματα ισοτιμίας και καταμέτρησης.
    - Κάθε ακυκλικό κατευθυνόμενο γράφημα με «πηγή», έχει «καταβόθρα».
    - Κάθε (μη κατευθυνόμενο) γράφημα έχει άρτιο αριθμό κορυφών περιττού βαθμού.
  - Πιθανοτική μέθοδος.
    - Αν κάτι έχει θετική πιθανότητα να επιλεγεί από (κατάλληλο) δειγματοχώρο, τότε υπάρχει.



# Μαθηματική Επαγωγή

---

- Αποδεικνύουμε ότι « $P(n)$  αληθεύει για κάθε φυσικό  $n \geq n_0$ ».
  - **Δομική επαγωγή:** όλα τα στοιχεία (αριθμήσιμα) άπειρου συνόλου που ορίζεται αναδρομικά έχουν ιδιότητα  $P$ .

## Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής

- Έστω  $P(n)$  μια πρόταση που εξαρτάται από φυσικό αριθμό  $n$ .
- Για να δο  $P(n)$  αληθεύει για κάθε φυσικό  $n \geq n_0$ , αρκεί να δο:
  - **Βάση:** το  $P(n_0)$  αληθεύει.
  - **Βήμα:** για κάθε  $n \geq n_0$ , αν  $P(n)$  αληθεύει, τότε  $P(n+1)$  αληθεύει.

## Αρχή Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής

- Για να δο  $P(n)$  αληθεύει για κάθε  $n \geq n_0$ , αρκεί να δο:
  - **Βάση:** το  $P(n_0)$  αληθεύει.
  - **Βήμα:** για κάθε  $n \geq n_0$ , αν  $P(k)$  αληθεύει για κάθε  $k \in \{n_0, \dots, n\}$ , τότε  $P(n+1)$  αληθεύει.

# Όροι Γεωμετρικής Προόδου

- Να δείξετε ότι για κάθε  $n \geq 0$ ,  $1+2+\dots+2^n = 2^{n+1} - 1$ .
  - Πρόταση  $P(n) \equiv \ll 1+2+\dots+2^n = 2^{n+1} - 1 \gg$ .
  - Βάση: Αληθεύει για  $n = 0$ :  $2^0 = 1 = 2 - 1$ .
  - Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο)  $n \geq 0$ , αληθεύει  $P(n)$ , δηλ. ότι  $1+2+\dots+2^n = 2^{n+1} - 1$ .
  - Επαγωγικό βήμα: Θδο αληθεύει  $P(n+1)$ , δηλ. ότι  $1+2+\dots+2^n+2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$ .

$$\begin{aligned} \overbrace{1 + 2 + 2^2 \dots + 2^n}^{=2^{n+1}-1} + 2^{n+1} &= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \\ &= 2^{n+2} - 1 \end{aligned}$$

- Νδο για κάθε  $r \neq 1$  και  $n \geq 0$ ,

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

# Αρμονικοί Αριθμοί

---

- Αρμονικός αριθμός τάξης  $k$ :  $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}$
- Να δείξετε ότι για κάθε  $n \geq 0$ ,  $1 + \frac{n}{2} \leq H_{2^n} \leq 1 + n$ 
  - Συνεπώς  $1 + \frac{1}{2} \log_2 k \leq H_k \leq 1 + \log_2 k$
  - Άνω φράγμα, πρόταση  $P(n) \equiv \ll H_{2^n} \leq 1 + n \gg$
  - Βάση: Αληθεύει για  $n = 0$ :  $H_1 = 1 = 1 + 0$ .
  - Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο)  $n \geq 0$ , αληθεύει  $P(n)$ , δηλ. ότι  $H_{2^n} \leq 1 + n$

# Αρμονικοί Αριθμοί

---

- **Επαγωγικό βήμα:** Θδο αληθεύει  $P(n+1)$ , δηλ. ότι  $H_{2^{n+1}} \leq 1 + (n + 1)$

$$H_{2^{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

# Διαιρετότητα

---

- Να δείξετε ότι για κάθε  $n \geq 1$ , το  $n^3 + 2n$  διαιρείται από το 3.
  - **Βάση:** Αληθεύει για  $n = 1$ : Το 3 διαιρείται από το 3.
  - **Επαγωγική υπόθεση:** Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο)  $n \geq 1$ , το  $n^3 + 2n$  διαιρείται από το 3.
  - **Επαγωγικό βήμα:** Θδο το  $(n+1)^3 + 2(n+1)$  διαιρείται από το 3.
  - Πράγματι,

$$\begin{aligned}(n + 1)^3 + 2(n + 1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 2(n + 1) \\ &= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1),\end{aligned}$$

όπου και οι δύο όροι διαιρούνται από το 3 (ο 1<sup>ος</sup> λόγω της επαγωγικής υπόθεσης).



# Πληθάριθμος Δυναμοσύνολου

- Νδο για κάθε (πεπερασμένο) **σύνολο**  $A$  με  $n$  **στοιχεία**, το **δυναμοσύνολο** του  $A$  έχει  $2^n$  **στοιχεία**.
  - Μαθηματική επαγωγή στο  $n$  (πληθικό αριθμό συνόλου  $A$ ).
  - **Βάση:** Αληθεύει για  $n = 0$ :  $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$  και  $|P(\emptyset)| = 2^0$ .
  - **Επαγωγική υπόθεση:** Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο)  $n \geq 0$ , αληθεύει ότι για κάθε σύνολο  $A$  με  $|A| = n$ ,  $|P(A)| = 2^n$ .
  - **Επαγωγικό βήμα:** Θδο  $\forall$  σύνολο  $A$  με  $|A| = n+1$ ,  $|P(A)| = 2^{n+1}$ .
    - $A$  (αυθαίρετα επιλεγμένο) σύνολο με  $n+1$  στοιχεία.  
Θεωρούμε  $x \in A$  και  $A_x = A - \{x\}$  με  $|A_x| = n$ .
    - Κάθε υποσύνολο του  $A$  είτε περιέχει το  $x$  είτε όχι.
    - Σε κάθε υποσύνολο  $S \subseteq A_x$  αντιστοιχούν δύο υποσύνολα του  $A$ : το  $S$  και το  $S \cup \{x\}$ .
    - Άρα  $|P(A)| = 2 \cdot |P(A_x)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ .

# Λάθος Χρώμα!

- Να βρείτε το **λάθος** στον παρακάτω επαγωγικό συλλογισμό.
- Θδο για κάθε  $n \geq 1$ , σε **κάθε σύνολο  $n$**  αυτοκινήτων, **όλα** τα αυτοκίνητα έχουν το **ίδιο χρώμα**.
  - **Βάση:** Ισχύει για  $n = 1$ .
  - **Επαγωγική υπόθεση:** Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο)  $n \geq 1$ , σε κάθε σύνολο  $n$  αυτοκινήτων, όλα έχουν το ίδιο χρώμα.
  - **Επαγωγικό βήμα:** Θδο σε κάθε σύνολο  $n+1$  αυτοκινήτων, όλα έχουν το ίδιο χρώμα.
    - Σύνολο με  $n+1$  αυτοκίνητα:  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$
    - Από επαγ. υπόθεση, τα  **$n$  πρώτα** αυτοκίνητα έχουν **ίδιο χρώμα**, και  **$n$  τελευταία** αυτοκίνητα έχουν **ίδιο χρώμα**:  
$$\underbrace{\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}}_{\text{ίδιο χρώμα}} \qquad \underbrace{\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}}_{\text{ίδιο χρώμα}}$$
    - Αφού **σύνολο  $n$  πρώτων** και **σύνολο  $n$  τελευταίων** αυτοκινήτων έχουν **κοινά** στοιχεία, όλα τα αυτοκ. στο  $A$  έχουν ίδιο χρώμα!

# Λάθος Χρώμα!

- **Επαγωγικό βήμα:** Θδο σε κάθε σύνολο  $n+1$  αυτοκινήτων, όλα έχουν το ίδιο χρώμα.
  - Σύνολο με  $n+1$  αυτοκίνητα:  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$
  - Από επαγ. υπόθεση, τα  $n$  πρώτα αυτοκίνητα έχουν **ίδιο χρώμα**, και  $n$  τελευταία αυτοκίνητα έχουν **ίδιο χρώμα**:  
$$\overbrace{\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}}^{\text{ίδιο χρώμα}} \qquad \overbrace{\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}}^{\text{ίδιο χρώμα}}$$
  - Αφού **σύνολο  $n$  πρώτων** και **σύνολο  $n$  τελευταίων** αυτοκινήτων έχουν **κοινά** στοιχεία, όλα τα αυτοκ. στο  $A$  έχουν ίδιο χρώμα!
- Για  $n = 1$ , τα δύο σύνολα **δεν** έχουν **κοινά** στοιχεία!
- Εδώ ισχύει ότι  $P(1)$  και ότι  $P(n) \rightarrow P(n+1)$  για κάθε  $n \geq 2$ .
  - **Δεν ισχύει ότι  $P(1) \rightarrow P(2)$ :** αυτό καθιστά συμπέρασμα αβάσιμο!

# Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

---

- Κάποτε χρήσιμο να αποδείξουμε **ισχυρότερη** πρόταση  $P'(n)$ .
  - Είναι δυνατό να **μην** ισχύει ότι  $P(n) \rightarrow P(n+1)$ , αλλά να ισχύει  $P'(n) \rightarrow P'(n+1)$ , για **ισχυρότερη** πρόταση  $P'(n)$ .

- Νδο. για κάθε  $n \geq 1$ ,

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} \leq 2$$

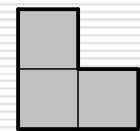
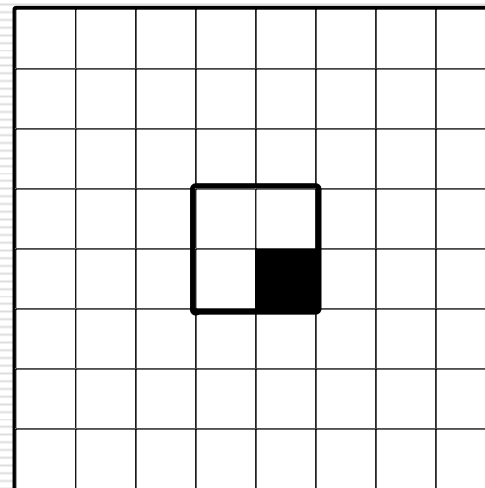
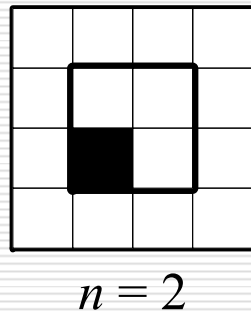
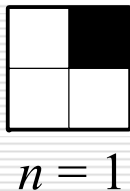
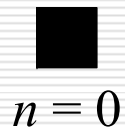
- Επαγωγική υπόθεση  $S_n \leq 2$  δεν συνεπάγεται ότι  $S_{n+1} \leq 2$ .

- Ευκολότερο νδ (επαγωγικά) ότι για κάθε  $n \geq 1$ ,

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

# Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

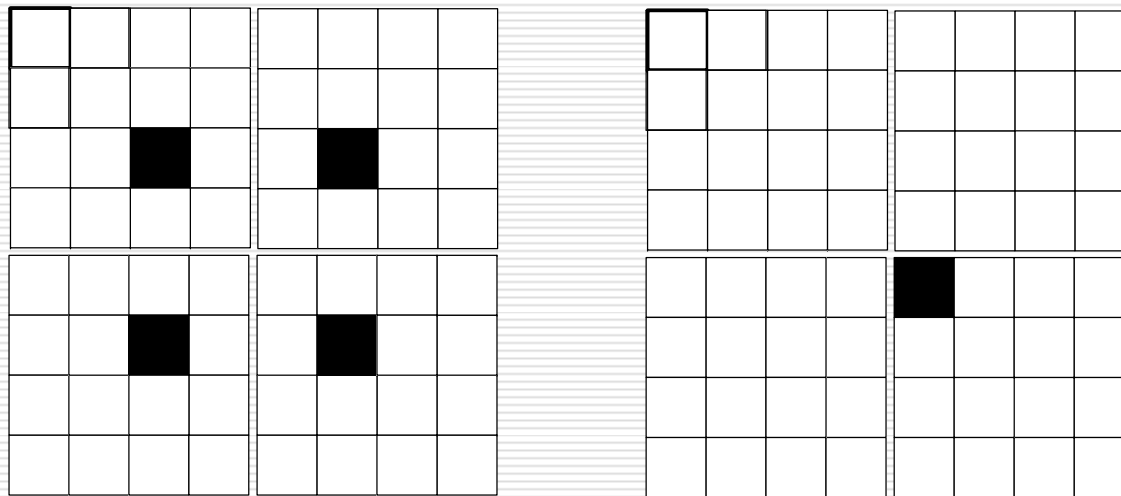
- Κάποτε χρήσιμο να αποδείξουμε **ισχυρότερη** πρόταση  $P'(n)$ .
  - Είναι δυνατό να **μην** ισχύει ότι  $P(n) \rightarrow P(n+1)$ , αλλά να ισχύει  $P'(n) \rightarrow P'(n+1)$ , για **ισχυρότερη** πρόταση  $P'(n)$ .
- **Σκακιέρα** τάξης  $n$  με μαύρο στο **κέντρο**: τετράγωνη σκακιέρα με  $2^n \times 2^n$  τετράγωνα, όλα **λευκά** εκτός από **ένα μαύρο** στο **κέντρο**.
- Ν.δ.ο. για κάθε  $n \geq 0$ , **λευκά** τετράγωνα **σκακιέρας** τάξης  $n$  με μαύρο στο **κέντρο** **καλύπτονται** από **πλακίδια** σχήματος  $L$  (μη επικαλυπτόμενα).



Πλακίδιο  
σχήματος  $L$

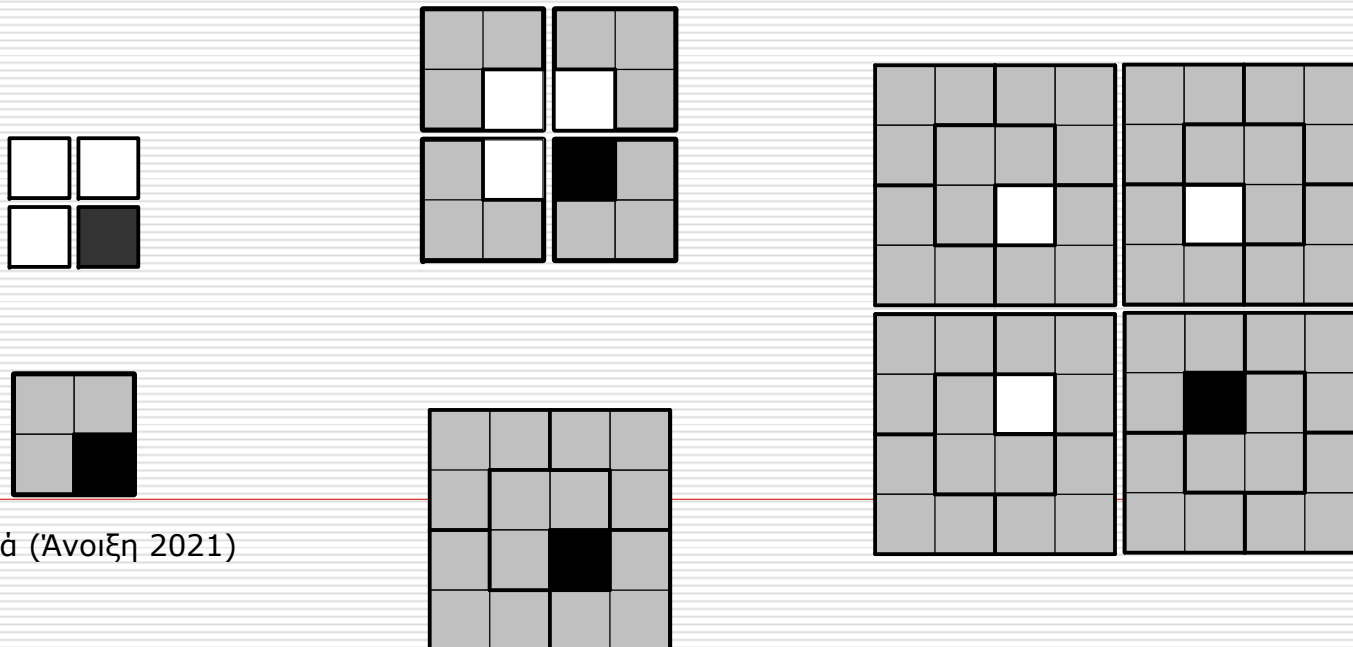
# Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

- Βάση:  $P(0)$  ισχύει (δεν υπάρχουν λευκά τετράγωνα).
- Επαγωγικό βήμα:
  - Σκακιέρα τάξης  $n+1$  με μαύρο στο κέντρο:  
ένωση 4 σκακιέρων τάξης  $n$  με μαύρο στο κέντρο,  
3 μαύρα γίνονται λευκά, 1 μαύρο μετακινείται στο κέντρο.



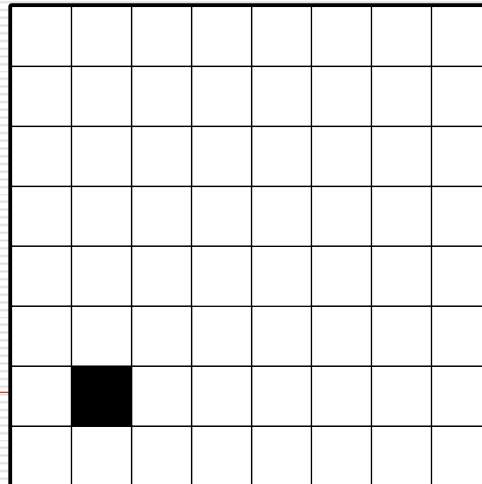
# Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

- Βάση:  $P(0)$  ισχύει (δεν υπάρχουν λευκά τετράγωνα).
- Επαγωγικό βήμα:
  - $P(0) \rightarrow P(1), P(1) \rightarrow P(2)$ : 3 νέα λευκά καλύπτονται με 1 πλακίδιο.
- $P(2) \rightarrow P(3)$ ;
  - Λευκά όχι γειτονικά, μετακινήσεις επηρεάζουν διάταξη πλακιδίων!
  - Χρήση επαγωγικής υπόθεσης όχι προφανής!
- Δυσκολία λόγω **περιορισμού** ότι μαύρο **στο κέντρο!**



# Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

- **Σκακιέρα τάξης  $n$** : τετράγωνη σκακιέρα με  $2^n \times 2^n$  τετράγωνα, όλα **λευκά** εκτός από **ένα μαύρο** (οπουδήποτε).
- Ν.δ.ο. για κάθε  $n \geq 0$ , **λευκά** τετράγωνα **σκακιέρας τάξης  $n$**  **καλύπτονται** από **πλακίδια σχήματος  $L$**  (μη επικαλυπτόμενα).
  - Πρόταση  $P'(n)$  **ισχυρότερη** από αρχική  $P(n)$ .
  - **Βάση**:  $P'(0)$  ισχύει τετριμένα.
  - **Επαγωγική υπόθεση**: για (αυθαίρετα επιλεγμένο)  $n \geq 0$ , αληθεύει ότι **λευκά** τετράγωνα **οποιασδήποτε** σκακιέρας τάξης  $n$  **καλύπτονται** από **πλακίδια σχήματος  $L$** .

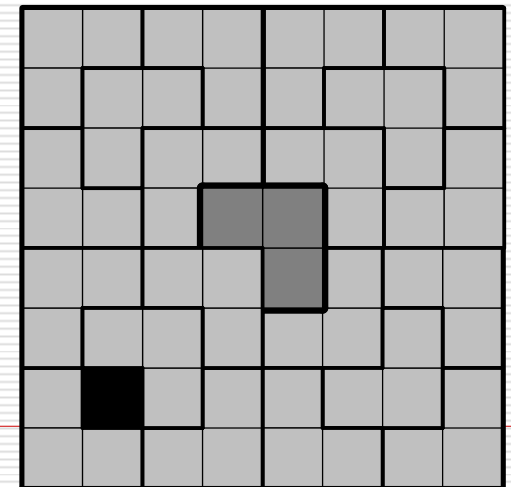
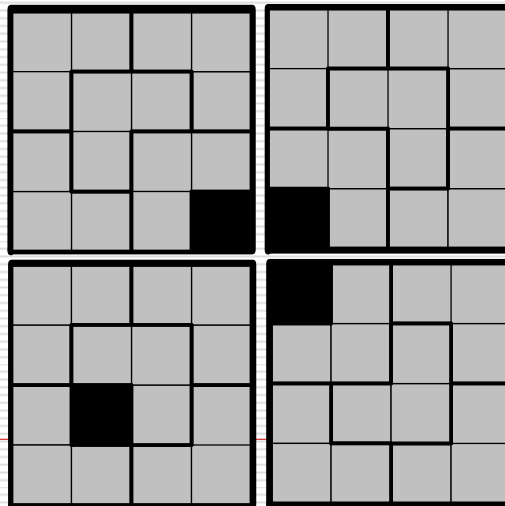
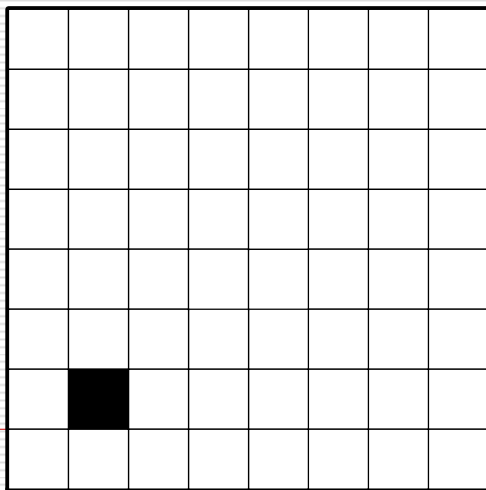




# Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

---

- Σκακιέρα τάξης  $n+1$ : 4 σκακιέρες τάξης  $n$  (τεταρτημόρια).
  - 1 με μαύρο τετράγωνο σε αντίστοιχη θέση.
  - 3 με μαύρα τετράγωνα σε άκρα, ώστε γειτονικά κεντρικά τετράγωνα σε σκακιέρα  $n+1$ .
- Από επαγωγική υπόθεση, λευκά τετράγωνα σε τεταρτημόρια καλύπτονται από πλακίδια L.
- Νέα λευκά τετράγωνα σχηματίζουν L: καλύπτονται με πλακίδιο.



# Παράδειγμα Ισχυρής Επαγωγής

- Νδο κάθε τμήμα τουλ. 18 φοιτητών διαμερίζεται σε ομάδες 4 ή 7 φοιτητών.
  - Για κάθε φυσικό  $n \geq 18$ , υπάρχουν φυσικοί  $\kappa_n, \lambda_n$ :  $n = 4\kappa_n + 7\lambda_n$ .
- Βάση: επαλήθευση για  $n = 18$
- Επαγωγική υπόθεση: για (αυθαίρετα επιλεγμ.) φυσικό  $n \geq 18$ , ισχύει ότι για κάθε φυσικό  $m$ ,  $18 \leq m \leq n$ :
  - Υπάρχουν φυσικοί  $\kappa_m, \lambda_m$ :  $m = 4\kappa_m + 7\lambda_m$ .
- Επαγωγικό βήμα: Θδο υπάρχουν φυσικοί  $\kappa_{n+1}, \lambda_{n+1}$ :  
$$n+1 = 4\kappa_{n+1} + 7\lambda_{n+1}.$$
  - Επαγ. υπόθεση για  $n - 3$ , και  $\kappa_{n+1} = \kappa_{n-3} + 1$  και  $\lambda_{n+1} = \lambda_{n-3}$ :  
$$4(\kappa_{n-3} + 1) + 7\lambda_{n-3} = \underbrace{(4\kappa_{n-3} + 7\lambda_{n-3})}_{=n-3} + 4 = n + 1$$
- Αρκεί βάση για  $n = 18$ ; Γιατί  $n \geq 21$  στην υπόθεση;

# Και Άλλο Λάθος!

---

- Θδο όλοι οι φυσικοί αριθμοί είναι άρτιοι(;)!
  - Βάση: ισχύει ότι το 0 είναι άρτιος.
  - Επαγωγική υπόθεση: για (αυθαίρετα επιλεγμένο) φυσικό  $n \geq 0$ , ισχύει ότι για κάθε  $m$ ,  $0 \leq m \leq n$ , το  $m$  είναι άρτιος.
  - Επαγωγικό βήμα: Θδο το  $n+1$  είναι άρτιος.
    - Επαγωγική υπόθεση: το  $n$  και το 1 είναι άρτιοι.
    - Άρα  $n+1$  άρτιος, ως άθροισμα δύο άρτιων!
- Απόδειξη βήματος **δεν** ισχύει για  $n = 0$ !
  - Χρησιμοποιεί ότι το 1 είναι άρτιος χωρίς απόδειξη (στη βάση) και χωρίς να εμπίπτει στην επαγωγική υπόθεση!