

# Στοιχεία Προτασιακής Λογικής

---

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Μαθηματικές Προτάσεις

---

- (Μαθηματική) **πρόταση**: δήλωση που μπορεί να είναι **αληθής** ή **ψευδής** (όχι και τα δύο).
  - Το όνομά μου είναι Δημήτρης.
  - Χθες χιόνισε στην Καστοριά.
  - Ο Σεφέρης τιμήθηκε με το Νόμπελ Λογοτεχνίας.
  - Σήμερα είναι η πρώτη μέρα της άνοιξης.
- Άλλα όχι:
  - Τι ώρα είναι;
  - Κάνετε ησυχία παρακαλώ.
  - Σχεδόν κάθε μέρα βρέχει (χωρίς το σχεδόν;)

# Προτασιακή Λογική

---

- Προτάσεις συνδυάζονται **λογικά**: σύνθετες προτάσεις.
  - Αν χιονίσει, θα πάω για σκι ή θα παίξω χιονοπόλεμο.
  - Ο Δ είναι καλός ή ο Δ δεν είναι καλός.
  - Θα κάνω μάθημα στις 9 και θα παίξω μπάσκετ στις 10.
- Στοιχειώδεις προτάσεις: **προτασιακές μεταβλητές**  $p, q, r$ .
  - Βασικά δομικά στοιχεία. Διακριτές τιμές  $A$  ή  $\Psi$  (1 ή 0).
- Συνδυασμοί προτάσεων με **(λογικούς) συνδέσμους**:  
 $\neg, \wedge, \vee, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow$ .
- **Προτασιακός τύπος**:
  - Είτε προτασιακή μεταβλητή  $p, q, r, \dots$
  - Είτε  $(\neg\phi), (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \oplus \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$ , όπου  $\phi, \psi$  ήδη σχηματισμένοι προτασιακοί τύποι.
- Δομή π.τ. αποτυπώνεται σε **δενδροδιάγραμμα**.

# Σημασιολογική Προσέγγιση

- Λογικοί σύνδεσμοι ορίζονται με **πίνακες αλήθειας**.
- **Αποτίμηση**: ανάθεση τιμών αλήθειας στις μεταβλητές ενός π.τ.
  - Από τιμές αλήθειας μεταβλητών, δενδροδιάγραμμα, και **πίνακες αλήθειας** λογικών συνδέσμων, **υπολογίζουμε τιμή αλήθειας π.τ.**

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow q$ | $p \oplus q$ |
|-----|-----|----------|--------------|------------|-------------------|-----------------------|--------------|
| A   | A   | Ψ        | A            | A          | A                 | A                     | Ψ            |
| A   | Ψ   | Ψ        | Ψ            | A          | Ψ                 | Ψ                     | A            |
| Ψ   | A   | A        | Ψ            | A          | A                 | Ψ                     | A            |
| Ψ   | Ψ   | A        | Ψ            | Ψ          | A                 | A                     | Ψ            |

# Λογική Συνεπαγωγή

- Αν αληθεύει το  $p$ , τότε αληθεύει το  $q$  :  
 $p \rightarrow q$ .
  - Αν μελετήσεις τουλάχιστον 30 ώρες, τότε θα επιτύχεις στις εξετάσεις.
  - Αν είμαι ο Πρόεδρος των ΗΠΑ, τότε όλοι βαθμολογείστε με 10.
  - Αν γίνω πρωθυπουργός, θα λύσω όλα τα προβλήματα.
  - Όλοι οι φοιτητές εκτός ΣΗΜΜΥ φορούν μαγιό.

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$<br>( $\equiv \neg p \vee q$ ) |
|-----|-----|---|
| A   | A   | A   |
| A   | Ψ   | Ψ   |
| Ψ   | A   | A   |
| Ψ   | Ψ   | A   |

# Σημασιολογική Προσέγγιση

---

- Ταυτολογική ισοδυναμία  $\varphi \equiv \psi$ 
  - Για κάθε αποτίμηση,  $\varphi$  και  $\psi$  έχουν ίδια τιμή αλήθειας.
  - Π.χ.  $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- Ταυτολογία  $\varphi$ :  $\varphi$  πάντα Α (για κάθε αποτίμηση).
  - Αντίφαση  $\varphi$ :  $\varphi$  πάντα Ψ (για κάθε αποτίμηση).
  - Αντίφαση  $\varphi$  ανν  $\neg\varphi$  ταυτολογία.
- Ικανοποιήσιμος  $\varphi$ :  $\varphi$  δεν είναι αντίφαση.
  - $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$  ικανοποιήσιμο:  $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$  ικανοποιήσιμος.
    - Υπάρχει αποτίμηση που ικανοποιεί (ταυτόχρονα) όλους τους τύπους του  $T$ .

# Παραδείγματα

---

- Νδο  $\varphi \equiv ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$   
ούτε αντίφαση (άρα ικανοποιήσιμος) ούτε ταυτολογία.
  - **Ικανοποιήσιμος  $\varphi$ :**  $p = q = r = A$  ή  $p = q = A$  και  $r = \Psi$ .
  - **Όχι ταυτολογία  $\varphi$ :**  $r = \Psi$  και είτε  $p = A, q = \Psi$  είτε  $p = \Psi, q = A$ .

| $p$    | $q$    | $r$    | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $(p \wedge q) \rightarrow r$ | $(p \vee q) \rightarrow r$ | $\varphi$ |
|--------|--------|--------|--------------|------------|------------------------------|----------------------------|-----------|
| A      | A      | A      | A            | A          | A                            | A                          | A         |
| A      | A      | $\Psi$ | A            | A          | $\Psi$                       | $\Psi$                     | A         |
| A      | $\Psi$ | A      | $\Psi$       | A          | A                            | A                          | A         |
| A      | $\Psi$ | $\Psi$ | $\Psi$       | A          | A                            | $\Psi$                     | $\Psi$    |
| $\Psi$ | A      | A      | $\Psi$       | A          | A                            | A                          | A         |
| $\Psi$ | A      | $\Psi$ | $\Psi$       | A          | A                            | $\Psi$                     | $\Psi$    |
| $\Psi$ | $\Psi$ | A      | $\Psi$       | $\Psi$     | A                            | A                          | A         |
| $\Psi$ | $\Psi$ | $\Psi$ | $\Psi$       | $\Psi$     | A                            | A                          | A         |

# Παραδείγματα

□ Νδο  $\psi \equiv ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$  ταυτολογία.

■ Αν  $p = \mathbf{A}$ , τότε  $\mathbf{A}$   
(αληθές συμπέρασμα).

■ Αν  $p = \Psi$ , τότε  $\mathbf{A}$   
(ψευδής υπόθεση).

| $p$          | $q$          | $p \rightarrow q$ | $(p \rightarrow q) \rightarrow p$ | $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ |
|--------------|--------------|-------------------|-----------------------------------|---|
| $\mathbf{A}$ | $\mathbf{A}$ | $\mathbf{A}$      | $\mathbf{A}$                      | $\mathbf{A}$                                      |
| $\mathbf{A}$ | $\Psi$       | $\Psi$            | $\mathbf{A}$                      | $\mathbf{A}$                                      |
| $\Psi$       | $\mathbf{A}$ | $\mathbf{A}$      | $\Psi$                            | $\mathbf{A}$                                      |
| $\Psi$       | $\Psi$       | $\mathbf{A}$      | $\Psi$                            | $\mathbf{A}$                                      |

□ Νδο  $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$  ταυτολογία.

■ Κάθε π.τ. με ίδια συντακτική μορφή  $\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$   
(για κάθε  $\varphi, \psi$ ) είναι ταυτολογία!



# Ταυτολογική Συνεπαγωγή

---

- Σύνολο π.τ.  $T$  **συνεπάγεται ταυτολογικά** π.τ.  $\varphi$ ,  $T \models \varphi$  :
  - Κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το  $T$  ικανοποιεί και τον  $\varphi$ . ( $\varphi$  έπεται αναγκαία από υποθέσεις στο  $T$ ).
  - $T \models \varphi$  ανν  $T \cup \{\neg\varphi\}$  **μη** ικανοποιήσιμο.
  - $\emptyset \models \varphi$  (ή απλά  $\models \varphi$ ) δηλώνει ότι  $\varphi$  ταυτολογία.
  - Αν  $T$  μη ικανοποιήσιμο, τότε  $T \models \varphi$  για **κάθε** π.τ.  $\varphi$ !

# Παραδείγματα

---

- Έστω σύνολο π.τ.  $T = \{p_1 \vee \neg p_2, p_1 \wedge p_2, p_1 \vee p_3\}$   
Ποιές από τις παρακάτω αληθεύουν;

$$T \models \neg p_1 \rightarrow (p_1 \wedge p_2)$$

$$T \models (p_2 \vee p_3) \rightarrow (p_1 \wedge p_3)$$

$$T \models (p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3$$

$$T \models (p_1 \vee p_2) \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow \neg p_3)$$

# Παραδείγματα

- Ποιές ταυτολογικές συνεπαγωγές αληθεύουν:

$$\begin{array}{ll} \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi & \Psi \\ (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \models \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) & \text{A} \\ \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \models \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) & \text{A} \\ \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi & \text{A} \\ (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \models \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) & \Psi \\ \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \models \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) & \Psi \\ \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \models \varphi \wedge \neg\varphi & \text{A} \end{array}$$

- Παρατηρήσεις για ταυτολογικές συνεπαγωγές:

- μη ικανοποιήσιμο  $\models$  οτιδήποτε
- οτιδήποτε  $\models$  ταυτολογία
- ταυτολογία  $\models$  **μόνο** ταυτολογία
- **μόνο** μη ικανοποιήσιμο  $\models$  αντίφαση

# Ιδιότητες Λογικών Συνδέσμων (I)

|                              |  |
|------------------------------|--|
| Αντιμεταθετική               | $p \wedge q \equiv q \wedge p$<br>$p \vee q \equiv q \vee p$   |
| Προσεταιριστική              | $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$<br>$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$                     |
| Επιμεριστική                 | $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$<br>$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ |
| Διπλή άρνηση                 | $\neg \neg p \equiv p$   |
| Αντικατάσταση<br>συνεπαγωγής | $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$   |

# Ιδιότητες Λογικών Συνδέσμων (II)

|                    |  |
|--------------------|--|
| Αποκλεισμός τρίτου | $p \vee \neg p \equiv A$   |
| Αντιθετοαναστροφή  | $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$   |
| Εξαγωγή            | $p \wedge q \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$                            |
| De Morgan          | $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$<br>$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ |
| Άρνηση συνεπαγωγής | $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$   |

# Παράδειγμα

---

- Απλοποίηση προτασιακού τύπου:

$$((\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

$$\dots \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee ((\neg\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi))$$

$$\equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee ((\neg\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi)))$$

$$\equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee \neg\varphi$$

$$\equiv (\varphi \vee \neg\varphi) \wedge (\neg\psi \vee \neg\varphi)$$

$$\equiv \neg\psi \vee \neg\varphi$$

$$\equiv \neg(\psi \wedge \varphi)$$

# Παράδειγμα

- Υποπτος δηλώνει: «Λέω την αλήθεια ανν είμαι ένοχος».
  - Γνωρίζουμε ότι είτε λέει πάντα αλήθεια είτε πάντα ψέματα.
  - Μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι ένοχος;

- $p \equiv$  «λέει αλήθεια»  
 $q \equiv$  «είναι ένοχος»
  - Δήλωση:  $p \leftrightarrow q$ .
  - Πρέπει να αληθεύει ότι:  
 $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ | $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$ |
|-----|-----|-----------------------|---|
| A   | A   | A                     | A   |
| A   | Ψ   | Ψ                     | Ψ   |
| Ψ   | A   | Ψ                     | A   |
| Ψ   | Ψ   | A                     | Ψ   |

# Παράδειγμα

- Ο κόσμος χωρίζεται σε ευγενείς και απατεώνες.
  - Ευγενείς: πάντα αλήθεια. Απατεώνες: πάντα ψέματα.
- Κάποιος δηλώνει:  
«Αν είμαι ευγενής, τότε η σύζυγός μου είναι ευγενής».
  - Είναι ευγενής; Η σύζυγός του;
- $p \equiv$  «άνδρας ευγενής»  
 $\equiv$  «άνδρας λέει αλήθεια»  
 $q \equiv$  «σύζυγος ευγενής»
  - Δήλωση:  $p \rightarrow q$ .
  - Πρέπει να αληθεύει ότι:  
 $p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ |
|-----|-----|-------------------|---------------------------------------|
| A   | A   | A                 | A                                     |
| A   | Ψ   | Ψ                 | Ψ                                     |
| Ψ   | A   | A                 | Ψ                                     |
| Ψ   | Ψ   | A                 | Ψ                                     |



# Παραδείγματα

---

- Συναντάμε 3 ανθρώπους, Α, Β, Γ, και ρωτάμε τον Α αν είναι ευγενής:
  - Ο Α λέει κάτι, αλλά δεν τον ακούμε.
  - Ο Β πετάγεται και λέει: «Ο Α είπε ότι είναι απατεώνας».
  - Ο Γ λέει: «Μην τον πιστεύεις, ο Β είναι ψεύτης!».
- Είναι οι δηλώσεις: «το καλό φαγητό δεν είναι φθηνό» και «το φθηνό φαγητό δεν είναι καλό» ισοδύναμες;
  - Ισοδυναμία  $k \rightarrow \neg\varphi$  και  $\varphi \rightarrow \neg k$  ;
- Είναι το «αυτή η πρόταση είναι ψευδής» **μαθ.** πρόταση;
  - Μπορεί να είναι αληθής; Ψευδής;

# Μαθηματική Λογική

---

- Αντικείμενο: θεμελίωση των μαθηματικών.
  - Πότε μια πρόταση ισχύει / μια απόδειξη είναι σωστή;
  - **Σημασιολογικά**: συμπέρασμα έπεται αναγκαία από υποθέσεις.
    - Ενδιαφέρει αλλά δεν ελέγχεται (αποδοτικά).
  - **Συντακτικά**: όταν στην **αποδεικτική διαδικασία εφαρμόζουμε** σωστά συγκεκριμένους **κανόνες** (συντακτικής φύσης).
    - Διατύπωση με νοημοσύνη – «μηχανιστικός» έλεγχος.
  - Ζητούμενο **ισοδυναμία**: σωστές «συντακτικά» **αποδείξεις** θεμελιώνουν (**όλες και μόνο τις**) «σημασιολογικά» σωστές **προτάσεις**.
    - Εγκυρότητα – Πληρότητα.

# Συντακτική Προσέγγιση – Προτασιακός Λογισμός

---

- Αξιωματικό Σύστημα (όχι μοναδικό):
  - ΑΣ1:  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
  - ΑΣ2:  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
  - ΑΣ3:  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$
- Αποδεικτικός κανόνας Modus Ponens: 
$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$
- Ξεκινώντας από **αξιώματα** (ή υποθέσεις, ή τυπικά θεωρήματα), και **μόνο** με συντακτική αντικατάσταση και **MP**, αποδεικνύουμε **τυπικά θεωρήματα**.
  - $\vdash \varphi$  :  $\varphi$  είναι τυπικό θεώρημα.
  - $T \vdash \varphi$  :  $\varphi$  αποδεικνύεται τυπικά από υποθέσεις  $T$ .

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$$

# Τυπικές Αποδείξεις

---

□ Τυπική απόδειξη για  $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$

1.  $(\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$

ΑΣ2 με  $(\varphi, \varphi)$ ,  $(\psi, \varphi \rightarrow \varphi)$ , και  $(\chi, \varphi)$

2.  $\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$

ΑΣ1 με  $(\varphi, \varphi)$ ,  $(\psi, \varphi \rightarrow \varphi)$

3.  $(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$

1, 2, MP

4.  $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$

ΑΣ1 με  $(\varphi, \varphi)$ ,  $(\psi, \varphi)$

5.  $\varphi \rightarrow \varphi$

3, 4, MP

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$$

# Τυπικές Αποδείξεις

□ Τυπική απόδειξη για  $\neg\varphi \vdash (\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$

1.  $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$  ΑΣ3 με  $(\varphi, \psi)$  και  $(\psi, \varphi)$

2.  $\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$  ΑΣ1 με  $(\varphi, \neg\varphi)$  και  $(\psi, \neg\psi)$

3.  $\neg\varphi$  Υπόθεση

4.  $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$  2, 3, MP

5.  $(\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$  1, 4, MP

■ Ποια από τα παρακάτω προκύπτουν **άμεσα** από αξιώματα;

■  $\varphi \rightarrow \varphi$

■  $\chi \rightarrow (\chi \rightarrow \chi)$

■  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$

■  $(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\varphi)$

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$$

# Τυπικές Απόδειξεις

□ Είναι σωστή τυπική απόδειξη για  $\psi \mid - (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

1.  $\psi$

Υπόθεση

2.  $\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$

ΑΣ1 με  $(\varphi, \psi)$  και  $(\psi, \neg\varphi)$

3.  $\neg\varphi \rightarrow \psi$

2, 1, MP

4.  $(\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi)$

ΑΣ3 με  $(\varphi, \varphi)$  και  $(\psi, \neg\psi)$

5.  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

4, 3, MP

■ Το βήμα 4 είναι **λάθος!!!**

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$$

# Τυπικές Αποδείξεις

□ Σωστή τυπική απόδειξη για  $\neg\neg\psi \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

1.  $\neg\neg\psi$

Υπόθεση

2.  $\neg\neg\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$

ΑΣ1 με  $(\varphi, \neg\neg\psi)$  και  $(\psi, \neg\varphi)$

3.  $\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$

2, 1, MP

4.  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi)$

ΑΣ3 με  $(\varphi, \varphi)$  και  $(\psi, \neg\psi)$

5.  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

4, 3, MP

■ Με χρήση του  $\vdash \psi \rightarrow \neg\neg\psi$  μπορούμε να αποδείξουμε και ότι  $\psi \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

# Τυπικές Αποδείξεις

- Θεώρημα Απαγωγής:  $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Leftrightarrow T \vdash \varphi \rightarrow \psi$
- Θ. Αντιθετοαναστροφής:  $T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi \Leftrightarrow T \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$

- Τυπική απόδειξη για  $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$

$$\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi \stackrel{\Theta.\text{Απαγ.}}{\Leftrightarrow} \varphi \vdash \neg\neg\varphi \stackrel{\Theta.\text{Αν/φης}}{\Leftrightarrow} \neg\varphi \vdash \neg\varphi$$

- Για νδο  $\vdash (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) \dots$

- ... αρκεί νδο  $\{\varphi \rightarrow \chi, \varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi), \varphi\} \vdash \psi$ .

1.  $\varphi$  Υπόθεση
2.  $\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)$  Υπόθεση
3.  $\chi \rightarrow \psi$  2, 1, MP
4.  $\varphi \rightarrow \chi$  Υπόθεση
5.  $\chi$  4, 1 MP
6.  $\psi$  3, 5, MP



# Συντακτική vs Σημασιολογική Προσέγγιση

## Σημασιολογική Προσέγγιση

- ταυτολογία:  $\models \varphi$
- ταυτολ. συνεπαγωγή  $T \models \varphi$
- **ικανοποιήσιμο**  $T$
- μη ικανοποιήσιμο  $T$
- αν  $T$  μη ικανοποιήσιμο,  
τότε  $T \models \varphi$ , για κάθε  $\varphi$ .

□ Εγκυρότητα:  $\forall T, \forall \varphi, T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

□ Πληρότητα:  $\forall T, \forall \varphi, T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$

## Συντακτική Προσέγγιση

- τυπικό θεώρημα:  $\vdash \varphi$
- απόδειξη με υποθέσεις  $T \vdash \varphi$
- **συνεπές**  $T$ :  $\nexists \varphi (T \vdash \varphi \text{ και } T \vdash \neg \varphi)$
- **αντιφατικό**  $T$ :  $\exists \varphi (T \vdash \varphi \text{ και } T \vdash \neg \varphi)$   
 $\forall \varphi T \vdash \varphi$
- αν  $T$  αντιφατικό,  
τότε  $T \vdash \varphi$ , για κάθε  $\varphi$ .