

# Σχέσεις

---

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Διμελής Σχέση

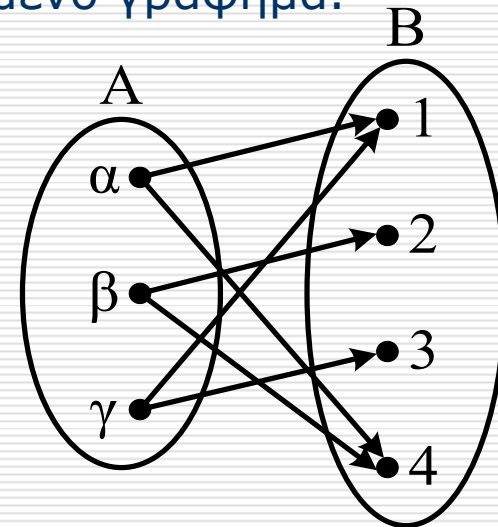
---

- Διατεταγμένο ζεύγος  $(a, \beta)$ :
  - Δύο αντικείμενα (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικά) σε καθορισμένη σειρά.
  - **Γενίκευση:** διατεταγμένη τριάδα  $(a, \beta, \gamma)$ , διατεταγμένη  $n$ -άδα  $(a_1, \dots, a_n)$ .
- Καρτεσιανό γινόμενο  $A \times B$ :
  - $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ και } b \in B\}$
  - **Γενίκευση:**  $A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$
- Διμελής σχέση  $R$  από σύνολο  $A$  σε σύνολο  $B$ :  $R \subseteq A \times B$ .
  - $a$  σχετίζεται με  $\beta$  (στην  $R$ ):  $(a, \beta) \in R$ .
  - $A = \{a, \beta, \gamma\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $R = \{(a, 1), (a, 4), (\beta, 2), (\beta, 4), (\gamma, 1), (\gamma, 3)\}$
  - $A$  φοιτητές,  $B$  μαθήματα,  $R$  δηλώσεις μαθημάτων.
  - $A$  υποψήφιοι εργαζόμενοι,  $B$  εταιρείες,  $R$  αιτήσεις πρόσληψης.
- Τριμελής σχέση  $R$ :  $R \subseteq A \times B \times \Gamma$ .  
 $n$ -μελής σχέση  $R$ :  $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$ .

# Αναπαράσταση

- Αναπαράσταση διμελούς σχέσης  $R$ :
  - **Σύνολο:** παράθεση διατεταγμένων ζευγών.
  - **Κατηγορία:** χαρακτηριστική ιδιότητα σχετιζόμενων στοιχείων.
  - **Συσχέτιση:** Boolean πίνακας, κατευθυνόμενο γράφημα.

	1	2	3	4
$\alpha$	1	0	0	1
$\beta$	0	1	0	1
$\gamma$	1	0	1	0

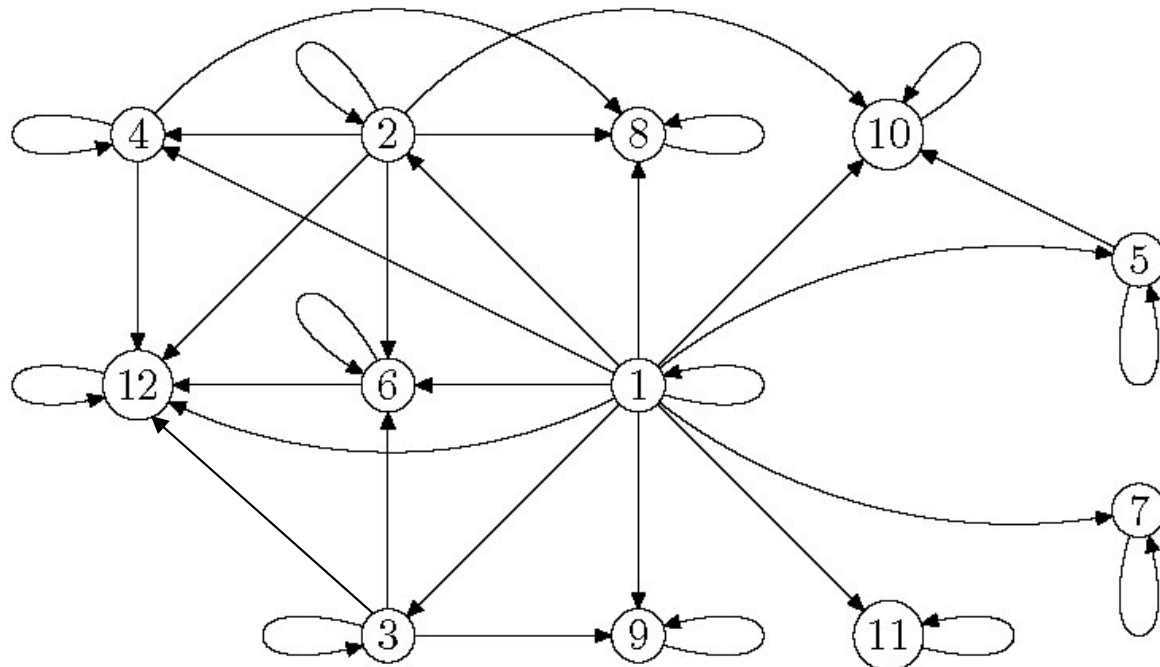


$$A = \{\alpha, \beta, \gamma\}, B = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$R = \{(\alpha, 1), (\alpha, 4), (\beta, 2), (\beta, 4), (\gamma, 1), (\gamma, 3)\}$$

# Στο Ίδιο Σύνολο

- Διμελής **σχέση**  $R$  στο σύνολο  $A$ :  $R \subseteq A \times A$ .
  - Σχέσεις μεταξύ αριθμών ( $<$ ,  $\geq$ ,  $a$  διαιρεί  $\beta$ , ...), ανθρώπων, συνόλων, κλπ.
  - Γράφημα: **κορυφές** στοιχεία  $A$ , **ακμή**  $(a, \beta)$  δηλώνει  $(a, \beta) \in R$ .



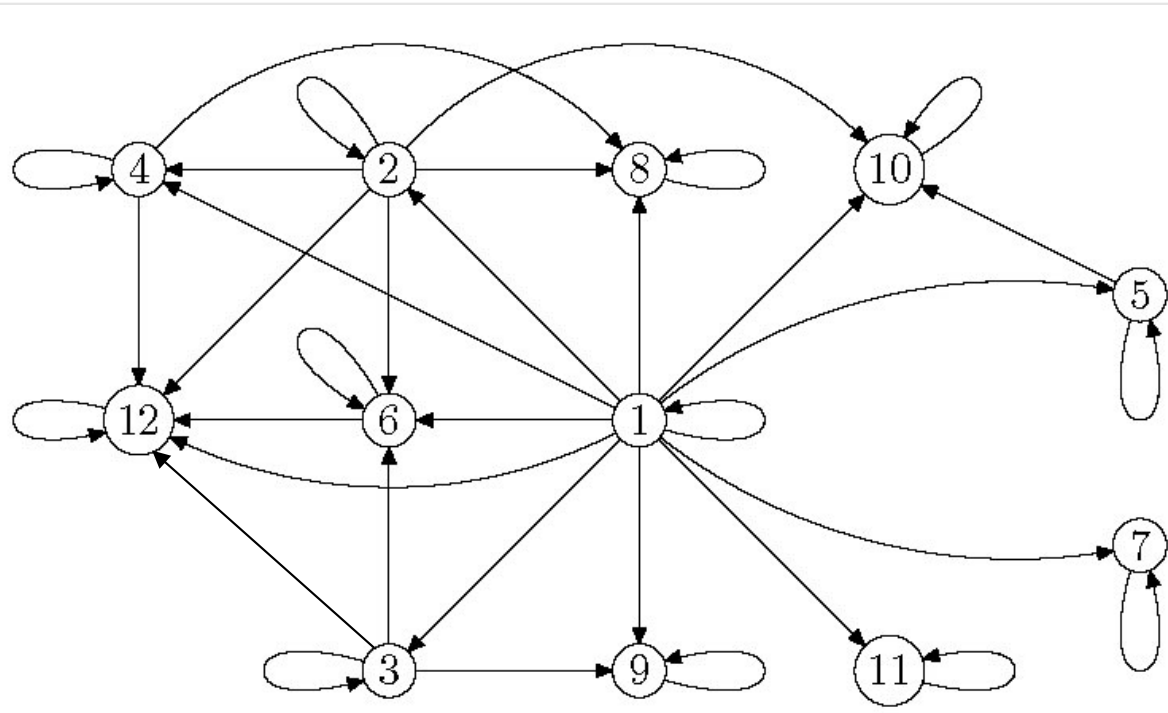
# Ιδιότητες Διμελών Σχέσεων

---

- **Ανακλαστική:** για κάθε  $a \in A$ ,  $(a, a) \in R$ .
  - Συμπληρωμένη διαγώνιος. Όλες οι κορυφές έχουν ανακύκλωση.
- **Συμμετρική:** για κάθε  $(a, \beta) \in R$ , έχουμε  $(\beta, a) \in R$ .
  - Συμμετρία ως προς διαγώνιο. Μη κατευθυνόμενο γράφημα.
- **Αντισυμμετρική:** Αν  $(a, \beta), (\beta, a) \in R$ , τότε  $a = \beta$ .
  - Εκτός διαγωνίου,  $\leq 1$  από κάθε ζεύγος «συμμετρικών» θέσεων.  
 $\leq 1$  ακμή για κάθε ζεύγος **διαφορετικών** κορυφών.
  - Υπάρχει σχέση συμμετρική και αντισυμμετρική;
- **Μεταβατική:** για κάθε  $(a, \beta), (\beta, \gamma) \in R$ , έχουμε  $(a, \gamma) \in R$ .
  - Αν υπάρχει  $a - \gamma$  μονοπάτι, τότε υπάρχει  $(a, \gamma)$  ακμή.

# Παραδείγματα

- Σχέση  $a|b$  ( $a$  διαιρεί  $b$ , στο  $\mathbb{N}$ ).
  - Ανακλαστική, όχι συμμετρική, αντισυμμετρική, μεταβατική.
  - Π.χ. γράφημα σχέσης  $a|b$  στο  $\{1, \dots, 12\}$ .



# Παραδείγματα

---

- $R_1 = \{(a, \beta): a \leq \beta\}$ 
  - Ανακλαστική, όχι συμμετρική, αντισυμμετρική, μεταβατική.
- $R_2 = \{(a, \beta): a > \beta\}$ 
  - Όχι ανακλαστική, όχι συμμετρική, αντισυμμετρική, μεταβατική.
- $R_3 = \{(a, \beta): a = \beta \text{ ή } a = -\beta\}$ 
  - Ανακλαστική, συμμετρική, όχι αντισυμμετρική, μεταβατική.
- $R_4 = \{(a, \beta): a = \beta\}$ 
  - Ανακλαστική, συμμετρική, αντισυμμετρική, μεταβατική.
- $R_5 = \{(a, \beta): a + \beta \leq 3\}$ 
  - Όχι ανακλαστική, συμμετρική, όχι αντισυμμετρική, όχι μεταβατική.
- $R_6 = \{(A, B): A \subseteq B\}$ 
  - Ανακλαστική, όχι συμμετρική, αντισυμμετρική, μεταβατική.

# Πράξεις μεταξύ Σχέσεων

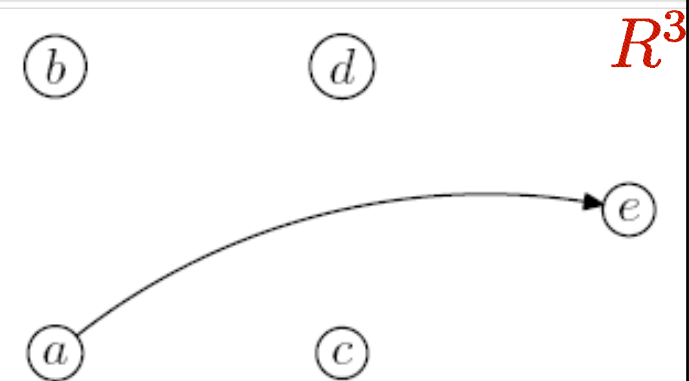
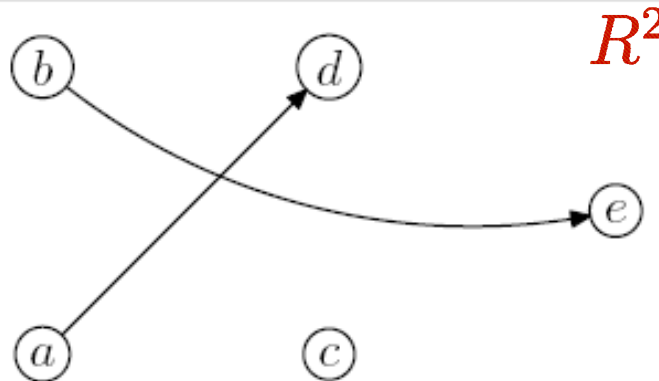
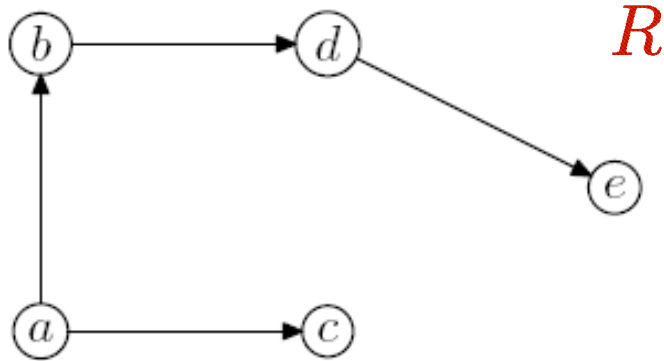
---

- Σχέσεις (στα ίδια σύνολα) συνδυάζονται με **πράξεις συνόλων**:
  - Ένωση, τομή, διαφορά, συμπλήρωμα, συμμετρική διαφορά.
  - Πως **υπολογίζονται** από αναπαράσταση με **πίνακα** ή **γράφημα**;
- **Αντίστροφη** σχέση  $R^{-1} = \{(\beta, \alpha) : (\alpha, \beta) \in R\}$ 
  - R φοιτητές δηλώνουν μαθήματα:  
 $R^{-1}$  μαθήματα δηλώνονται από φοιτητές.
  - **Ανάστροφος** πίνακας, αντιστροφή φοράς των ακμών.
- **Σύνθεση**  $S \circ R \subseteq A \times \Gamma$  σχέσεων  $R \subseteq A \times B$  και  $S \subseteq B \times \Gamma$ :
  - $S \circ R = \{(\alpha, \gamma) : \exists \beta \text{ τ.ω. } (\alpha, \beta) \in R \text{ και } (\beta, \gamma) \in S\}$
  - Σύνθεση συναρτήσεων προκύπτει ως ειδική περίπτωση.
  - Δεν είναι αντιμεταθετική!
  - Υπολογισμός με **Boolean** πολλαπλασιασμό πινάκων.



# Πράξεις μεταξύ Σχέσεων

- Σύνθεση σχέσης  $R \subseteq A \times A$  με τον εαυτό της:  $R^2 = R \circ R$ .
- $n$ -οστή «δύναμη» σχέσης  $R \subseteq A \times A$ :  $R^n = R^{n-1} \circ R$ ,  $R^1 = R$ .
  - $R^3 = (R \circ R) \circ R$ ,  $R^4 = ((R \circ R) \circ R) \circ R$ , ...
  - Υπολογισμός με Boolean πολλαπλασιασμό πινάκων.
  - «Διαδρομή» μήκους  $k \geq 0$  σε σχέση  $R$ : ακολουθία  $a_0, \dots, a_k \in A$  τ.ω.  $(a_i, a_{i+1}) \in R$  για κάθε  $i < k$ .
  - $R^n = \{(a, \beta) : \text{υπάρχει } a - \beta \text{ διαδρομή μήκους } n \text{ στην } R\}$ 
    - Απόδειξη με επαγωγή (άσκηση).



# Πράξεις μεταξύ Σχέσεων

- Σχέση  $R \subseteq A \times A$  **μεταβατική** αν  $R^n \subseteq R$  για  $n = 1, 2, 3, \dots$
- $R^n \subseteq R$  για  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Άρα και  $R^2 \subseteq R$ .
  - Για κάθε  $(a, \beta), (\beta, \gamma) \in R$ , έχουμε  $(a, \gamma) \in R^2 \subseteq R$ .
  - Άρα  $(a, \gamma) \in R$ , και  $R$  μεταβατική.
- $R$  μεταβατική. Απόδειξη με **επαγωγή** ότι  $R^n \subseteq R$ , για  $n = 1, 2, \dots$ 
  - Βάση:  $R \subseteq R$ , ισχύει τετριμμένα για  $n = 1$ .
  - Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι  $R^n \subseteq R$  για αυθαίρετο  $n \geq 1$ .
  - Επαγωγικό βήμα: Θδο  $\forall (a, \gamma) \in R^{n+1}, (a, \gamma) \in R$ .
    - $(a, \gamma) \in R^{n+1}$
    - (ορισμός  $R^{n+1}$ )  $\Rightarrow \exists \beta$  τ.ω.  $(a, \beta) \in R$  και  $(\beta, \gamma) \in R^n$
    - (επαγ. υπόθ.  $R^n \subseteq R$ )  $\Rightarrow \exists \beta$  τ.ω.  $(a, \beta) \in R$  και  $(\beta, \gamma) \in R$
    - ( $R$  μεταβατική)  $\Rightarrow (a, \gamma) \in R$

# Σχεσιακές Βάσεις Δεδομένων

- (Συστήματα Διαχείρισης) Βάσεων Δεδομένων (DBMSs) επιτρέπουν αποδοτική αποθήκευση και επεξεργασία μεγάλου όγκου δεδομένων.
- Σχεσιακές ΒΔ βασίζονται σε **n-μελείς σχέσεις**:
  - Δεδομένα αποθηκεύονται σε **πίνακες**.
  - Πίνακας: **n-μελής σχέση** (στήλες: πεδία, #στηλών: βαθμός πίνακα).
  - Στοιχεία σχέσης: **εγγραφές**.

Πίνακας 1: Φοιτητές			
Επώνυμο	Όνομα	Ον. Πατέρα	Α.Μ.
Φωτάκης	Δημήτριος	Ανδρέας	1041
Παπαδόπουλος	Απόστολος	Αθανάσιος	996
Αθανασίου	Δημήτριος	Ανδρέας	850
Νικολάου	Απόστολος	Ανδρέας	1201

# Σχεσιακές Βάσεις Δεδομένων

---

- (Πρωτεύον) κλειδί πίνακα: πεδίο με **μοναδική τιμή** σε κάθε εγγραφή.
  - Τιμή κλειδιού προσδιορίζει μοναδικά εγγραφή πίνακα.

Πίνακας 1: Φοιτητές			
Επώνυμο	Όνομα	Ον. Πατέρα	Α.Μ.
Φωτάκης	Δημήτριος	Ανδρέας	1041
Παπαδόπουλος	Απόστολος	Αθανάσιος	996
Αθανασίου	Δημήτριος	Ανδρέας	850
Νικολάου	Απόστολος	Ανδρέας	1201

# Σχεσιακές Βάσεις Δεδομένων

- (Πρωτεύον) κλειδί πίνακα: πεδίο με **μοναδική τιμή** σε κάθε εγγραφή.
  - Τιμή κλειδιού προσδιορίζει μοναδικά εγγραφή πίνακα.
- Αν ένα πεδίο δεν αρκεί, **σύνθετο (πρωτεύων) κλειδί**: καρτεσιανό γινόμενο  $\geq 2$  πεδίων ώστε τιμή να **προσδιορίζει μοναδικά** εγγραφή.

Πίνακας 2: Μαθήματα – Βαθμολογία			
Α.Μ.	Μάθημα	Βαθμ.	Εξετ.
1041	Διακριτά Μαθηματικά	10	6/2007
1041	Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα	10	2/2008
1041	Κρυπτογραφία	8.5	2/2009
850	Διακριτά Μαθηματικά	8.5	9/2006
850	Βάσεις Δεδομένων	10	2/2007

# Επιλογή

- $n$ -μελής σχέση  $R$ ,  $C$  συνθήκη για στοιχεία  $R$ .
- **Επιλογή** (γραμμών) από  $R$  υπό **συνθήκη  $C$** :
  - $n$ -μελής σχέση με στοιχεία  $R$  που ικανοποιούν συνθήκη  $C$ .
  - Επιλογή από Φοιτητές με Όνομα = «Δημήτριος».
  - Επιλογή από Φοιτητές με  $AM \leq 950$ .

Πίνακας 1: Φοιτητές			
Επώνυμο	Όνομα	Ον. Πατέρα	A.M.
Φωτάκης	Δημήτριος	Ανδρέας	1041
Παπαδόπουλος	Απόστολος	Αθανάσιος	996
Αθανασίου	Δημήτριος	Ανδρέας	850
Νικολάου	Απόστολος	Ανδρέας	1201

# Επιλογή

- n-μελής σχέση R, C συνθήκη για στοιχεία R.
- **Επιλογή** (γραμμών) από R υπό **συνθήκη C**:
  - n-μελής σχέση με στοιχεία R που ικανοποιούν συνθήκη C.
  - Επιλογή από Φοιτητές με Όνομα = «Δημήτριος».
  - Επιλογή από Φοιτητές με AM  $\leq 950$ .
  - Επιλογή από Μαθ-Βαθμ. με Μάθημα = «Διακριτά» και Βαθμ  $\geq 8.0$

A.M.	Μάθημα	Βαθμ.	Εξετ.
1041	Διακριτά Μαθηματικά	10	6/2007
1041	Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα	10	2/2008
1041	Κρυπτογραφία	8.5	2/2009
850	Διακριτά Μαθηματικά	8.5	9/2006
850	Βάσεις Δεδομένων	10	2/2007

# Προβολή

- $n$ -μελής σχέση  $R$ , πεδία (στήλες)  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  της  $R$ .
- **Προβολή** (επί στηλών)  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  της  $R$  :
  - $k$ -μελής σχέση με στοιχείο  $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$  για κάθε στοιχείο  $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in R$  (μια φορά κάθε  $k$ -αδα).
  - Προβολή **Φοιτητές** στην στήλη **Όνομα** και **Όνομα Πατέρα**.

Πίνακας 1: Φοιτητές			
Επώνυμο	Όνομα	Ον. Πατέρα	Α.Μ.
Φωτάκης	Δημήτριος	Ανδρέας	1041
Παπαδόπουλος	Απόστολος	Αθανάσιος	996
Αθανασίου	Δημήτριος	Ανδρέας	850
Νικολάου	Απόστολος	Ανδρέας	1201



# Προβολή

- $n$ -μελής σχέση  $R$ , πεδία (στήλες)  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  της  $R$ .
- **Προβολή** (επί στηλών)  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  της  $R$  :
  - $k$ -μελής σχέση με στοιχείο  $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$  για κάθε στοιχείο  $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in R$  (μια φορά κάθε  $k$ -αδα).
  - Προβολή Φοιτητές στην στήλη Όνομα και Όνομα Πατέρα.
  - Προβολή Μαθ-Βαθμ. στις στήλες Μάθημα και Εξεταστική.

Α.Μ.	Μάθημα	Βαθμ.	Εξετ.
1041	Διακριτά Μαθηματικά	10	6/2007
1041	Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα	10	2/2008
1041	Κρυπτογραφία	8.5	2/2009
850	Διακριτά Μαθηματικά	8.5	9/2006
850	Βάσεις Δεδομένων	10	2/2007

# Συνένωση (Join)

---

- $n$ -μελής σχέση  $R$ ,  $m$ -μελής σχέση  $S$ , με  $p$  κοινά πεδία.
- **Συνένωση**  $R$  και  $S$  επί  $p$  κοινών πεδίων:
  - $(n+m-p)$ -μελής σχέση με στοιχεία
$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-p}, b_1, \dots, b_p, c_1, c_2, \dots, c_{m-p})$$
όπου  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-p}, b_1, \dots, b_p) \in R$ και  $(b_1, \dots, b_p, c_1, c_2, \dots, c_{m-p}) \in S$
  - Σχέση συνένωσης: προβολή (στα  $n+m-p$  διαφορετικά πεδία) επί υποσυνόλου της  $R \times S$  με εγγραφές με ίδια τιμή στα κοινά πεδία.

# Παράδειγμα Συνένωσης

Πίνακας 1: Φοιτητές			
Επώνυμο	Όνομα	Ον. Πατέρα	Α.Μ.
Φωτάκης	Δημήτριος	Ανδρέας	1041
Παπαδόπουλος	Απόστολος	Αθανάσιος	996
Αθανασίου	Δημήτριος	Ανδρέας	850
Νικολάου	Απόστολος	Ανδρέας	1201

Πίνακας 2: Μαθήματα – Βαθμολογία			
Α.Μ.	Μάθημα	Βαθμ.	Εξετ.
1041	Διακριτά Μαθηματικά	10	6/2007
1041	Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα	10	2/2008
1041	Κρυπτογραφία	8.5	2/2009
850	Διακριτά Μαθηματικά	8.5	9/2006
850	Βάσεις Δεδομένων	10	2/2007

# Παράδειγμα Συνένωσης

Πίνακας 3: Φοιτητές – Βαθμολογία

Επώνυμο	Όνομα	Ον. Πατ.	A.M.	Μάθημα	Βαθμ.	Εξετ.
Φωτάκης	Δημήτριος	Ανδρέας	1041	Διακριτά Μαθηματικά	10	6/2007
Φωτάκης	Δημήτριος	Ανδρέας	1041	Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα	10	2/2008
Φωτάκης	Δημήτριος	Ανδρέας	1041	Κρυπτογραφία	8.5	2/2009
Αθανασίου	Δημήτριος	Ανδρέας	850	Διακριτά Μαθηματικά	8.5	9/2006
Αθανασίου	Δημήτριος	Ανδρέας	850	Βάσεις Δεδομένων	10	2/2007

# Ερώτηση

- Τι δηλώνουν οι παρακάτω προτάσεις;
  - Αληθεύουν σε πεπερασμένο σύμπαν;
  - Αληθεύουν σε άπειρο σύμπαν;

$$\begin{aligned} & \forall x R(x, x) \wedge \\ & \forall x \forall y (R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y) \wedge \\ & \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} & \exists x \forall y (y \neq x \rightarrow \neg R(y, x)) \wedge \\ & \exists x \forall y (y \neq x \rightarrow \neg R(x, y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \forall x R(x, x) \wedge \\ & \forall x \forall y (R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y) \wedge \\ & \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \wedge \\ & \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x)) \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} & \exists x \forall y R(x, y) \wedge \\ & \exists x \forall y R(y, x) \end{aligned}$$