Στοιχεία Προτασιακής Λογικής

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Μαθηματικές Προτάσεις

- (Μαθηματική) **πρόταση**: δήλωση που μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής (όχι και τα δύο).
  - Το όνομά μου είναι Δημήτρης.
  - Χθες χιόνισε στην Καστοριά.
  - Ο Σεφέρης τιμήθηκε με το Νόμπελ Λογοτεχνίας.
  - Σήμερα είναι η πρώτη μέρα της άνοιξης.
- Άλλα όχι:
  - Τι ώρα είναι;
  - Κάνετε ησυχία παρακαλώ.
  - Σχεδόν κάθε μέρα βρέχει (χωρίς το σχεδόν;)

Προτασιακή Λογική

- Προτάσεις συνδυάζονται λογικά: σύνθετες προτάσεις.
  - Αν χιονίσει, θα πάω για σκι ή θα παίξω χιονοπόλεμο.
  - Ο Δ είναι καλός ή ο Δ δεν είναι καλός.
  - Θα κάνω μάθημα στις 9 και θα παίζω μπάσκετ στις 10.
- Στοιχειώδεις προτάσεις: **προτασιακές μεταβλητές** p, q, r.
  - Βασικά δομικά στοιχεία. Διακριτές τιμές Α ή Ψ (1 ή 0).
- Συνδυασμοί προτάσεων με (λογικούς) συνδέσμους:
  $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
- **Προτασιακός τύπος**:
  - Είτε προτασιακή μεταβλητή p, q, r, …
  - Είτε $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \oplus \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$,
    όπου φ, ψ ήδη σχηματισμένοι προτασιακοί τύποι.
- Δομή π.τ. αποτυπώνεται σε δενδροδιάγραμμα.

Σημασιολογική Προσέγγιση

- Λογικοί σύνδεσμοι ορίζονται με πίνακες αλήθειας.
- Αποτίμηση: ανάθεση τιμών αλήθειας στις μεταβλητές ενός π.τ.
  - Από τιμές αλήθειας μεταβλητών, δενδροδιάγραμμα, και πίνακες αλήθειας λογικών συνδέσμων, υπολογίζουμε τιμή αλήθειας π.τ.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \oplus q$
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ

Λογική Συνεπαγωγή

- Αν αληθεύει το p, τότε αληθεύει το q : $p \to q$.
  - Αν μελετήσεις τουλάχιστον 30 ώρες, τότε θα επιτύχεις στις εξετάσεις.
  - Αν είμαι ο Πρόεδρος των ΗΠΑ, τότε όλοι βαθμολογείστε με 10.
  - Αν γίνω πρωθυπουργός, θα λύσω όλα τα προβλήματα.
  - Όλοι οι φοιτητές εκτός ΣΗΜΜΥ φορούν μαγιό.

p	q	$p \to q$ $(\equiv \neg p \vee q)$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

Σημασιολογική Προσέγγιση

- Ταυτολογική ισοδυναμία $\varphi \equiv \psi$
  - Για κάθε αποτίμηση, φ και ψ έχουν ίδια τιμή αλήθειας.
  - Π.χ. $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- Ταυτολογία φ: φ πάντα Α (για κάθε αποτίμηση).
  - Αντίφαση φ: φ πάντα Ψ (για κάθε αποτίμηση).
  - Αντίφαση φ ανν $\neg\varphi$ ταυτολογία.
- Ικανοποιήσιμος φ: φ δεν είναι αντίφαση.
  - Τ = $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ ικανοποιήσιμο: $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k$ ικανοποιήσιμος.
    - Υπάρχει αποτίμηση που ικανοποιεί (ταυτόχρονα) όλους τους τύπους του Τ.

Παραδείγματα

- Νδο $\varphi \equiv ((p \wedge q) \to r) \to ((p \vee q) \to r)$ ούτε αντίφαση (άρα ικανοποιήσιμος) ούτε ταυτολογία.
  - Ικανοποιήσιμος φ: $p = q = r =$ Α ή $p = q =$ Α και $r =$ Ψ.
  - Όχι ταυτολογία φ: $r =$ Ψ και είτε $p =$ Α, $q =$ Ψ είτε $p =$ ψ, $q =$ Α.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \to r$	$(p \vee q) \to r$	φ
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	**Α**
Α	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	**Α**
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	**Α**
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	**Ψ**
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	**Α**
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	**Ψ**
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	**Α**
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	**Α**

Παραδείγματα

- Νδο $\psi \equiv ((p \to q) \to p) \to p$ ταυτολογία.
  - Αν p = Α, τότε Α (αληθές συμπέρασμα).
  - Αν p = Ψ, τότε Α (ψευδής υπόθεση).

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \to p$	$((p \to q) \to p) \to p$
Α	Α	Α	Α	**Α**
Α	Ψ	Ψ	Α	**Α**
Ψ	Α	Α	Ψ	**Α**
Ψ	Ψ	Α	Ψ	**Α**

- Νδο $p \wedge (p \to q) \to q$ ταυτολογία.
  - Κάθε π.τ. με ίδια συντακτική μορφή $\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \to \psi$ (για κάθε φ, ψ) είναι ταυτολογία!

Ταυτολογική Συνεπαγωγή

- Σύνολο π.τ. T συνεπάγεται ταυτολογικά π.τ. φ, $T \models \varphi$:
  - Κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το T ικανοποιεί και τον φ. (φ έπεται αναγκαία από υποθέσεις στο T).
  - $T \models \varphi$ ανν $T \cup \{\neg\varphi\}$ **μη** ικανοποιήσιμο.
  - $\emptyset \models \varphi$ (ή απλά $\models \varphi$) δηλώνει ότι φ ταυτολογία.
  - Αν T μη ικανοποιήσιμο, τότε $T \models \varphi$ για κάθε π.τ. φ!

Παραδείγματα

- Έστω σύνολο π.τ. $T = \{p_1 \vee \neg p_2, p_1 \wedge p_2, p_1 \vee p_3\}$
  Ποιές από τις παρακάτω αληθεύουν;

  $T \models \neg p_1 \to (p_1 \wedge p_2)$ $\qquad$ $T \models (p_2 \vee p_3) \to (p_1 \wedge p_3)$

  $T \models (p_1 \wedge p_2) \to p_3$ $\qquad$ $T \models (p_1 \vee p_2) \to (\neg p_1 \to \neg p_3)$

Παραδείγματα

- Ποιές ταυτολογικές συνεπαγωγές αληθεύουν:

$$\varphi \to (\psi \to \varphi) \models (\varphi \to \psi) \to \varphi \qquad \mathbf{Ψ}$$
$$(\varphi \to \psi) \to \varphi \models \varphi \to (\psi \to \varphi) \qquad \mathbf{Α}$$
$$\neg(\varphi \to (\psi \to \varphi)) \models \varphi \to (\psi \to \varphi) \qquad \mathbf{Α}$$
$$\neg(\varphi \to (\psi \to \varphi)) \models (\varphi \to \psi) \to \varphi \qquad \mathbf{Α}$$
$$(\varphi \to \psi) \to \varphi \models \neg(\varphi \to (\psi \to \varphi)) \qquad \mathbf{Ψ}$$
$$\varphi \to (\psi \to \varphi) \models \neg(\varphi \to (\psi \to \varphi)) \qquad \mathbf{Ψ}$$
$$\neg(\varphi \to (\psi \to \varphi)) \models \varphi \land \neg\varphi \qquad \mathbf{Α}$$

- Παρατηρήσεις για ταυτολογικές συνεπαγωγές:
  - μη ικανοποιήσιμο |= οτιδήποτε
  - οτιδήποτε |= ταυτολογία
  - ταυτολογία |= **μόνο** ταυτολογία
  - **μόνο** μη ικανοποιήσιμο |= αντίφαση

Ιδιότητες Λογικών Συνδέσμων (Ι)

Αντιμεταθετική	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$
Προσεταιριστική	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
Επιμεριστική	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Διπλή άρνηση	$\neg \neg p \equiv p$
Αντικατάσταση συνεπαγωγής	$p \to q \equiv \neg p \vee q$

Ιδιότητες Λογικών Συνδέσμων (ΙΙ)

Αποκλεισμός τρίτου	$p \vee \neg p \equiv \mathrm{A}$
Αντιθετοαναστροφή	$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
Εξαγωγή	$p \wedge q \to r \equiv p \to (q \to r)$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
Άρνηση συνεπαγωγής	$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$

Παράδειγμα

- Απλοποίηση προτασιακού τύπου:
  $((\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

$$
\begin{aligned}
\ldots &\equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee ((\neg\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)) \\
&\equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee ((\neg\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi)) \\
&\equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee \neg\varphi \\
&\equiv (\varphi \vee \neg\varphi) \wedge (\neg\psi \vee \neg\varphi) \\
&\equiv \neg\psi \vee \neg\varphi \\
&\equiv \neg(\psi \wedge \varphi)
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

- Ύποπτος δηλώνει: «Λέω την αλήθεια ανν είμαι ένοχος».
  - Γνωρίζουμε ότι είτε λέει πάντα αλήθεια είτε πάντα ψέματα.
  - Μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι ένοχος;
- $p \equiv$ «λέει αλήθεια»
  $q \equiv$ «είναι ένοχος»
  - Δήλωση: $p \leftrightarrow q$.
  - Πρέπει να αληθεύει ότι:
    $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ

Παράδειγμα

- Ο κόσμος χωρίζεται σε ευγενείς και απατεώνες.
  - Ευγενείς: πάντα αλήθεια. Απατεώνες: πάντα ψέματα.
- Κάποιος δηλώνει:
  «Αν είμαι ευγενής, τότε η σύζυγός μου είναι ευγενής».
  - Είναι ευγενής; Η σύζυγός του;
- $p \equiv$ «άνδρας ευγενής»
  $\equiv$ «άνδρας λέει αλήθεια»
  $q \equiv$ «σύζυγος ευγενής»
  - Δήλωση: $p \to q$.
  - Πρέπει να αληθεύει ότι:
    $p \leftrightarrow (p \to q)$

p	q	$p \to q$	$p \leftrightarrow (p \to q)$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ

Παραδείγματα

- Συναντάμε 3 ανθρώπους, Α, Β, Γ, και ρωτάμε τον Α αν είναι ευγενής:
  - Ο Α λέει κάτι, αλλά δεν τον ακούμε.
  - Ο Β πετάγεται και λέει: «Ο Α είπε ότι είναι απατεώνας».
  - Ο Γ λέει: «Μην τον πιστεύεις, ο Β είναι ψεύτης!».
- Είναι οι δηλώσεις: «το καλό φαγητό δεν είναι φθηνό» και «το φθηνό φαγητό δεν είναι καλό» ισοδύναμες;
  - Ισοδυναμία $\kappa \to \neg\varphi$ και $\varphi \to \neg\kappa$;
- Είναι το «αυτή η πρόταση είναι ψευδής» **μαθ.** πρόταση;
  - Μπορεί να είναι αληθής; Ψευδής;

Μαθηματική Λογική

- Αντικείμενο: θεμελίωση των μαθηματικών.
  - Πότε μια πρόταση ισχύει / μια απόδειξη είναι σωστή;
  - Σημασιολογικά: συμπέρασμα έπεται αναγκαία από υποθέσεις.
    - Ενδιαφέρει αλλά δεν ελέγχεται (αποδοτικά).
  - Συντακτικά: όταν στην αποδεικτική διαδικασία εφαρμόζουμε σωστά συγκεκριμένους κανόνες (συντακτικής φύσης).
    - Διατύπωση με νοημοσύνη – «μηχανιστικός» έλεγχος.
  - Ζητούμενο ισοδυναμία: σωστές «συντακτικά» αποδείξεις θεμελιώνουν (όλες και μόνο τις) «σημασιολογικά» σωστές προτάσεις.
    - Εγκυρότητα – Πληρότητα.

Συντακτική Προσέγγιση – Προτασιακός Λογισμός

- Αξιωματικό Σύστημα (όχι μοναδικό):
  - ΑΣ1: $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
  - ΑΣ2: $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
  - ΑΣ3: $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$
- Αποδεικτικός κανόνας Modus Ponens: $\dfrac{\varphi\,,\ \varphi \to \psi}{\psi}$
- Ξεκινώντας από αξιώματα (ή υποθέσεις, ή τυπικά θεωρήματα), και **μόνο** με συντακτική αντικατάσταση και MP, αποδεικνύουμε τυπικά θεωρήματα.
  - $\vdash \varphi$: φ είναι τυπικό θεώρημα.
  - $T \vdash \varphi$: φ αποδεικνύεται τυπικά από υποθέσεις T.

$\varphi \to (\psi \to \varphi)$

$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$

Τυπικές Αποδείξεις

- Τυπική απόδειξη για $\vdash \varphi \to \varphi$

1. $(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$
   ΑΣ2 με (φ, φ), $(\psi, \varphi \to \varphi)$, και (χ, φ)
2. $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ — ΑΣ1 με (φ, φ), $(\psi, \varphi \to \varphi)$
3. $(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$ — 1, 2, MP
4. $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ — ΑΣ1 με (φ, φ), (ψ, φ)
5. $\varphi \to \varphi$ — 3, 4, MP

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$
$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$
$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$$

Τυπικές Αποδείξεις

- Τυπική απόδειξη για $\neg\varphi \vdash (\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$
  1. $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$ ΑΣ3 με (φ, ψ) και (ψ, φ)
  2. $\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ ΑΣ1 με $(\varphi, \neg\varphi)$ και $(\psi, \neg\psi)$
  3. $\neg\varphi$ Υπόθεση
  4. $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ 2, 3, MP
  5. $(\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$ 1, 4, MP
- Ποια από τα παρακάτω προκύπτουν **άμεσα** από αξιώματα;
  - $\varphi \rightarrow \varphi$
  - $\chi \rightarrow (\chi \rightarrow \chi)$
  - $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$
  - $(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\varphi)$

$\varphi \to (\psi \to \varphi)$

$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$

Τυπικές Αποδείξεις

- Είναι σωστή τυπική απόδειξη για $\psi \vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi$
  1. ψ — Υπόθεση
  2. $\psi \to (\neg\varphi \to \quad \psi)$ — ΑΣ1 με (φ, ψ) και $(\psi, \neg\varphi)$
  3. $\neg\varphi \to \quad \psi$ — 2, 1, MP
  4. $(\neg\varphi \to \quad \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi)$ — ΑΣ3 με (φ, φ) και $(\psi, \neg\psi)$
  5. $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi$ — 4, 3, MP
- Το βήμα 4 είναι **λάθος**!!!

$\varphi \to (\psi \to \varphi)$

$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$

Τυπικές Αποδείξεις

- Σωστή τυπική απόδειξη για $\neg\neg\psi \vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi$
  1. $\neg\neg\psi$ — Υπόθεση
  2. $\neg\neg\psi \to (\neg\varphi \to \neg\neg\psi)$ — ΑΣ1 με $(\varphi, \neg\neg\psi)$ και $(\psi, \neg\varphi)$
  3. $\neg\varphi \to \neg\neg\psi$ — 2, 1, MP
  4. $(\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi)$ — ΑΣ3 με (φ, φ) και $(\psi, \neg\psi)$
  5. $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi$ — 4, 3, MP
- Με χρήση του $\vdash \psi \to \neg\neg\psi$ μπορούμε να αποδείξουμε και ότι $\psi \vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi$

Τυπικές Αποδείξεις

- Θεώρημα Απαγωγής: $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Leftrightarrow T \vdash \varphi \to \psi$
- Θ. Αντιθετοαναστροφής: $T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi \Leftrightarrow T \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$
  - Τυπική απόδειξη για $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

$$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi \overset{\text{Θ.Απαγ.}}{\Leftrightarrow} \varphi \vdash \neg\neg\varphi \overset{\text{Θ.Αν/φης}}{\Leftrightarrow} \neg\varphi \vdash \neg\varphi$$

- Για νδο $\vdash (\varphi \to \chi) \to ((\varphi \to (\chi \to \psi)) \to (\varphi \to \psi))$ ...
  - ... αρκεί νδο $\{ \varphi \to \chi, \varphi \to (\chi \to \psi), \varphi \} \vdash \psi$.

1. φ Υπόθεση
2. $\varphi \to (\chi \to \psi)$ Υπόθεση
3. $\chi \to \psi$ 2, 1, MP
4. $\varphi \to \chi$ Υπόθεση
5. χ 4, 1 MP
6. ψ 3, 5, MP

Συντακτική vs Σημασιολογική Προσέγγιση

Σημασιολογική Προσέγγιση

- ταυτολογία: $\models \varphi$
- ταυτολ. συνεπαγωγή $T \models \varphi$
- ικανοποιήσιμο T
- μη ικανοποιήσιμο T
- αν T μη ικανοποιήσιμο, τότε $T \models \varphi$, για κάθε φ.

Συντακτική Προσέγγιση

- τυπικό θεώρημα: $\vdash \varphi$
- απόδειξη με υποθέσεις $T \vdash \varphi$
- συνεπές T: $\nexists \varphi (T \vdash \varphi \text{ και } T \vdash \neg\varphi)$
- αντιφατικό T: $\exists \varphi (T \vdash \varphi \text{ και } T \vdash \neg\varphi)$
  $\forall \varphi \; T \vdash \varphi$
- αν T αντιφατικό, τότε $T \vdash \varphi$, για κάθε φ.

- Εγκυρότητα: $\forall T,\ \forall \varphi,\quad T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$
- Πληρότητα: $\forall T,\ \forall \varphi,\quad T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$