

# Στοιχεία Προτασιακής Λογικής

---

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Μαθηματικές Προτάσεις

---

- (Μαθηματική) **πρόταση**: δήλωση που μπορεί να είναι **αληθής** ή **ψευδής** (όχι και τα δύο).
  - Το όνομά μου είναι Δημήτρης.
  - Χθες χιόνισε στην Καστοριά.
  - Ο Σεφέρης τιμήθηκε με το Νόμπελ Λογοτεχνίας.
  - Σήμερα είναι η πρώτη μέρα της άνοιξης.
- Άλλα όχι:
  - Τι ώρα είναι;
  - Κάνετε ησυχία παρακαλώ.
  - Σχεδόν κάθε μέρα βρέχει (χωρίς το σχεδόν;)

# Προτασιακή Λογική

---

- Προτάσεις συνδυάζονται **λογικά**: σύνθετες προτάσεις.
  - Αν χιονίσει, θα πάω για σκι ή θα παίξω χιονοπόλεμο.
  - Ο Δ είναι καλός ή ο Δ δεν είναι καλός.
  - Θα κάνω μάθημα στις 9 και θα παίξω μπάσκετ στις 10.
- Στοιχειώδεις προτάσεις: **προτασιακές μεταβλητές**  $p, q, r$ .
  - Βασικά δομικά στοιχεία. Διακριτές τιμές  $A$  ή  $\Psi$  (1 ή 0).
- Συνδυασμοί προτάσεων με **(λογικούς) συνδέσμους**:  
 $\neg, \wedge, \vee, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow$ .
- **Προτασιακός τύπος**:
  - Είτε προτασιακή μεταβλητή  $p, q, r, \dots$
  - Είτε  $(\neg\phi), (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \oplus \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$ , όπου  $\phi, \psi$  ήδη σχηματισμένοι προτασιακοί τύποι.
- Δομή π.τ. αποτυπώνεται σε **δενδροδιάγραμμα**.

# Σημασιολογική Προσέγγιση

- Λογικοί σύνδεσμοι ορίζονται με **πίνακες αλήθειας**.
- **Αποτίμηση**: ανάθεση τιμών αλήθειας στις μεταβλητές ενός π.τ.
  - Από τιμές αλήθειας μεταβλητών, δενδροδιάγραμμα, και **πίνακες αλήθειας** λογικών συνδέσμων, **υπολογίζουμε τιμή αλήθειας π.τ.**

$p$	$q$	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \oplus q$
A	A	Ψ	A	A	A	A	Ψ
A	Ψ	Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	A
Ψ	A	A	Ψ	A	A	Ψ	A
Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	A	A	Ψ

# Λογική Συνεπαγωγή

- Αν αληθεύει το  $p$ , τότε αληθεύει το  $q$  :  
 $p \rightarrow q$ .
  - Αν μελετήσεις τουλάχιστον 30 ώρες, τότε θα επιτύχεις στις εξετάσεις.
  - Αν είμαι ο Πρόεδρος των ΗΠΑ, τότε όλοι βαθμολογείστε με 10.
  - Αν γίνω πρωθυπουργός, θα λύσω όλα τα προβλήματα.
  - Όλοι οι φοιτητές εκτός ΣΗΜΜΥ φορούν μαγιό.

$p$	$q$	$p \rightarrow q$ ( $\equiv \neg p \vee q$ )
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	A

# Σημασιολογική Προσέγγιση

---

- Ταυτολογική ισοδυναμία  $\varphi \equiv \psi$ 
  - Για κάθε αποτίμηση,  $\varphi$  και  $\psi$  έχουν ίδια τιμή αλήθειας.
  - Π.χ.  $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- Ταυτολογία  $\varphi$ :  $\varphi$  πάντα Α (για κάθε αποτίμηση).
  - Αντίφαση  $\varphi$ :  $\varphi$  πάντα Ψ (για κάθε αποτίμηση).
  - Αντίφαση  $\varphi$  ανν  $\neg\varphi$  ταυτολογία.
- Ικανοποιήσιμος  $\varphi$ :  $\varphi$  δεν είναι αντίφαση.
  - $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$  ικανοποιήσιμο:  $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$  ικανοποιήσιμος.
    - Υπάρχει αποτίμηση που ικανοποιεί (ταυτόχρονα) όλους τους τύπους του  $T$ .

# Παραδείγματα

---

- Νδο  $\varphi \equiv ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$   
ούτε αντίφαση (άρα ικανοποιήσιμος) ούτε ταυτολογία.
  - **Ικανοποιήσιμος  $\varphi$ :**  $p = q = r = A$  ή  $p = q = A$  και  $r = \Psi$ .
  - **Όχι ταυτολογία  $\varphi$ :**  $r = \Psi$  και είτε  $p = A, q = \Psi$  είτε  $p = \Psi, q = A$ .

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$(p \vee q) \rightarrow r$	$\varphi$
A	A	A	A	A	A	A	A
A	A	$\Psi$	A	A	$\Psi$	$\Psi$	A
A	$\Psi$	A	$\Psi$	A	A	A	A
A	$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	A	A	$\Psi$	$\Psi$
$\Psi$	A	A	$\Psi$	A	A	A	A
$\Psi$	A	$\Psi$	$\Psi$	A	A	$\Psi$	$\Psi$
$\Psi$	$\Psi$	A	$\Psi$	$\Psi$	A	A	A
$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	A	A	A

# Παραδείγματα

□ Νδο  $\psi \equiv ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$  ταυτολογία.

■ Αν  $p = \mathbf{A}$ , τότε  $\mathbf{A}$   
(αληθές συμπέρασμα).

■ Αν  $p = \Psi$ , τότε  $\mathbf{A}$   
(ψευδής υπόθεση).

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow p$	$((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$
$\mathbf{A}$	$\Psi$	$\Psi$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$
$\Psi$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\Psi$	$\mathbf{A}$
$\Psi$	$\Psi$	$\mathbf{A}$	$\Psi$	$\mathbf{A}$

□ Νδο  $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$  ταυτολογία.

■ Κάθε π.τ. με ίδια συντακτική μορφή  $\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$   
(για κάθε  $\varphi, \psi$ ) είναι ταυτολογία!



# Ταυτολογική Συνεπαγωγή

---

- Σύνολο π.τ.  $T$  **συνεπάγεται ταυτολογικά** π.τ.  $\varphi$ ,  $T \models \varphi$  :
  - Κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το  $T$  ικανοποιεί και τον  $\varphi$ . ( $\varphi$  έπεται αναγκαία από υποθέσεις στο  $T$ ).
  - $T \models \varphi$  ανν  $T \cup \{\neg\varphi\}$  **μη** ικανοποιήσιμο.
  - $\emptyset \models \varphi$  (ή απλά  $\models \varphi$ ) δηλώνει ότι  $\varphi$  ταυτολογία.
  - Αν  $T$  μη ικανοποιήσιμο, τότε  $T \models \varphi$  για **κάθε** π.τ.  $\varphi$ !

# Παραδείγματα

---

- Έστω σύνολο π.τ.  $T = \{p_1 \vee \neg p_2, p_1 \wedge p_2, p_1 \vee p_3\}$   
Ποιές από τις παρακάτω αληθεύουν;

$$T \models \neg p_1 \rightarrow (p_1 \wedge p_2)$$

$$T \models (p_2 \vee p_3) \rightarrow (p_1 \wedge p_3)$$

$$T \models (p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3$$

$$T \models (p_1 \vee p_2) \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow \neg p_3)$$

# Παραδείγματα

- Ποιές ταυτολογικές συνεπαγωγές αληθεύουν:

$$\begin{array}{l} \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \quad \Psi \\ (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \models \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \quad \text{A} \\ \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \models \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \quad \text{A} \\ \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \quad \text{A} \\ (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \models \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \quad \Psi \\ \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \models \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \quad \Psi \\ \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \models \varphi \wedge \neg\varphi \quad \text{A} \end{array}$$

- Παρατηρήσεις για ταυτολογικές συνεπαγωγές:

- μη ικανοποιήσιμο  $\models$  οτιδήποτε
- οτιδήποτε  $\models$  ταυτολογία
- ταυτολογία  $\models$  **μόνο** ταυτολογία
- **μόνο** μη ικανοποιήσιμο  $\models$  αντίφαση

# Ιδιότητες Λογικών Συνδέσμων (I)

Αντιμεταθετική	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$
Προσεταιριστική	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
Επιμεριστική	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Διπλή άρνηση	$\neg \neg p \equiv p$
Αντικατάσταση συνεπαγωγής	$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

# Ιδιότητες Λογικών Συνδέσμων (II)

Αποκλεισμός τρίτου	$p \vee \neg p \equiv A$
Αντιθετοαναστροφή	$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
Εξαγωγή	$p \wedge q \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
Άρνηση συνεπαγωγής	$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

# Παράδειγμα

---

- Απλοποίηση προτασιακού τύπου:

$$((\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

$$\dots \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee ((\neg\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi))$$

$$\equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee ((\neg\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi)))$$

$$\equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee \neg\varphi$$

$$\equiv (\varphi \vee \neg\varphi) \wedge (\neg\psi \vee \neg\varphi)$$

$$\equiv \neg\psi \vee \neg\varphi$$

$$\equiv \neg(\psi \wedge \varphi)$$

# Παράδειγμα

- Υποπτος δηλώνει: «Λέω την αλήθεια ανν είμαι ένοχος».
  - Γνωρίζουμε ότι είτε λέει πάντα αλήθεια είτε πάντα ψέματα.
  - Μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι ένοχος;
- $p \equiv$  «λέει αλήθεια»  
 $q \equiv$  «είναι ένοχος»
  - Δήλωση:  $p \leftrightarrow q$ .
  - Πρέπει να αληθεύει ότι:  
 $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$	$p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ	A
Ψ	Ψ	A	Ψ

# Παράδειγμα

- Ο κόσμος χωρίζεται σε ευγενείς και απατεώνες.
  - Ευγενείς: πάντα αλήθεια. Απατεώνες: πάντα ψέματα.
- Κάποιος δηλώνει:  
«Αν είμαι ευγενής, τότε η σύζυγός μου είναι ευγενής».
  - Είναι ευγενής; Η σύζυγός του;
- $p \equiv$  «άνδρας ευγενής»  
 $\equiv$  «άνδρας λέει αλήθεια»  
 $q \equiv$  «σύζυγος ευγενής»
  - Δήλωση:  $p \rightarrow q$ .
  - Πρέπει να αληθεύει ότι:  
 $p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	A	A	Ψ
Ψ	Ψ	A	Ψ



# Παραδείγματα

---

- Συναντάμε 3 ανθρώπους, Α, Β, Γ, και ρωτάμε τον Α αν είναι ευγενής:
  - Ο Α λέει κάτι, αλλά δεν τον ακούμε.
  - Ο Β πετάγεται και λέει: «Ο Α είπε ότι είναι απατεώνας».
  - Ο Γ λέει: «Μην τον πιστεύεις, ο Β είναι ψεύτης!».
- Είναι οι δηλώσεις: «το καλό φαγητό δεν είναι φθηνό» και «το φθηνό φαγητό δεν είναι καλό» ισοδύναμες;
  - Ισοδυναμία  $k \rightarrow \neg\varphi$  και  $\varphi \rightarrow \neg k$  ;
- Είναι το «αυτή η πρόταση είναι ψευδής» **μαθ.** πρόταση;
  - Μπορεί να είναι αληθής; Ψευδής;

# Μαθηματική Λογική

---

- Αντικείμενο: θεμελίωση των μαθηματικών.
  - Πότε μια πρόταση ισχύει / μια απόδειξη είναι σωστή;
  - **Σημασιολογικά**: συμπέρασμα έπεται αναγκαία από υποθέσεις.
    - Ενδιαφέρει αλλά δεν ελέγχεται (αποδοτικά).
  - **Συντακτικά**: όταν στην **αποδεικτική διαδικασία εφαρμόζουμε** σωστά συγκεκριμένους **κανόνες** (συντακτικής φύσης).
    - Διατύπωση με νοημοσύνη – «μηχανιστικός» έλεγχος.
  - Ζητούμενο **ισοδυναμία**: σωστές «συντακτικά» **αποδείξεις** θεμελιώνουν (**όλες και μόνο τις**) «σημασιολογικά» σωστές **προτάσεις**.
    - Εγκυρότητα – Πληρότητα.

# Συντακτική Προσέγγιση – Προτασιακός Λογισμός

---

- Αξιοματικό Σύστημα (όχι μοναδικό):
  - ΑΣ1:  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
  - ΑΣ2:  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
  - ΑΣ3:  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$
- Αποδεικτικός κανόνας Modus Ponens: 
$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$
- Ξεκινώντας από **αξιώματα** (ή υποθέσεις, ή τυπικά θεωρήματα), και **μόνο** με **συντακτική αντικατάσταση** και **MP**, αποδεικνύουμε **τυπικά θεωρήματα**.
  - $\vdash \varphi$  :  $\varphi$  είναι τυπικό θεώρημα.
  - $T \vdash \varphi$  :  $\varphi$  αποδεικνύεται τυπικά από υποθέσεις  $T$ .

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$$

# Τυπικές Αποδείξεις

---

□ Τυπική απόδειξη για  $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$

1.  $(\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$

ΑΣ2 με  $(\varphi, \varphi)$ ,  $(\psi, \varphi \rightarrow \varphi)$ , και  $(\chi, \varphi)$

2.  $\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$

ΑΣ1 με  $(\varphi, \varphi)$ ,  $(\psi, \varphi \rightarrow \varphi)$

3.  $(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$

1, 2, MP

4.  $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$

ΑΣ1 με  $(\varphi, \varphi)$ ,  $(\psi, \varphi)$

5.  $\varphi \rightarrow \varphi$

3, 4, MP

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$$

# Τυπικές Αποδείξεις

□ Τυπική απόδειξη για  $\neg\varphi \vdash (\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$

1.  $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$  ΑΣ3 με  $(\varphi, \psi)$  και  $(\psi, \varphi)$

2.  $\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$  ΑΣ1 με  $(\varphi, \neg\varphi)$  και  $(\psi, \neg\psi)$

3.  $\neg\varphi$  Υπόθεση

4.  $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$  2, 3, MP

5.  $(\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$  1, 4, MP

■ Ποια από τα παρακάτω προκύπτουν **άμεσα** από αξιώματα;

■  $\varphi \rightarrow \varphi$

■  $\chi \rightarrow (\chi \rightarrow \chi)$

■  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$

■  $(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\varphi)$

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$$

# Τυπικές Απόδειξεις

□ Είναι σωστή τυπική απόδειξη για  $\psi \mid - (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

1.  $\psi$

Υπόθεση

2.  $\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$

ΑΣ1 με  $(\varphi, \psi)$  και  $(\psi, \neg\varphi)$

3.  $\neg\varphi \rightarrow \psi$

2, 1, MP

4.  $(\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi)$

ΑΣ3 με  $(\varphi, \varphi)$  και  $(\psi, \neg\psi)$

5.  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

4, 3, MP

■ Το βήμα 4 είναι **λάθος!!!**

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$$

# Τυπικές Αποδείξεις

□ Σωστή τυπική απόδειξη για  $\neg\neg\psi \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

1.  $\neg\neg\psi$

Υπόθεση

2.  $\neg\neg\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$

ΑΣ1 με  $(\varphi, \neg\neg\psi)$  και  $(\psi, \neg\varphi)$

3.  $\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$

2, 1, MP

4.  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi)$

ΑΣ3 με  $(\varphi, \varphi)$  και  $(\psi, \neg\psi)$

5.  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

4, 3, MP

■ Με χρήση του  $\vdash \psi \rightarrow \neg\neg\psi$  μπορούμε να αποδείξουμε και ότι  $\psi \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

# Τυπικές Αποδείξεις

- Θεώρημα Απαγωγής:  $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Leftrightarrow T \vdash \varphi \rightarrow \psi$
- Θ. Αντιθετοαναστροφής:  $T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi \Leftrightarrow T \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$ 
  - Τυπική απόδειξη για  $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ 
$$\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi \stackrel{\Theta.Απαγ.}{\Leftrightarrow} \varphi \vdash \neg\neg\varphi \stackrel{\Theta.Αν/φης}{\Leftrightarrow} \neg\varphi \vdash \neg\varphi$$
- Για νδο  $\vdash (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) \dots$ 
  - ... αρκεί νδο  $\{\varphi \rightarrow \chi, \varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi), \varphi\} \vdash \psi$ .
    1.  $\varphi$  Υπόθεση
    2.  $\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)$  Υπόθεση
    3.  $\chi \rightarrow \psi$  2, 1, MP
    4.  $\varphi \rightarrow \chi$  Υπόθεση
    5.  $\chi$  4, 1 MP
    6.  $\psi$  3, 5, MP



# Συντακτική vs Σημασιολογική Προσέγγιση

## Σημασιολογική Προσέγγιση

- ταυτολογία:  $\models \varphi$
- ταυτολ. συνεπαγωγή  $T \models \varphi$
- **ικανοποιήσιμο**  $T$
- μη ικανοποιήσιμο  $T$
- αν  $T$  μη ικανοποιήσιμο,  
τότε  $T \models \varphi$ , για κάθε  $\varphi$ .

□ Εγκυρότητα:  $\forall T, \forall \varphi, T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

□ Πληρότητα:  $\forall T, \forall \varphi, T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$

## Συντακτική Προσέγγιση

- τυπικό θεώρημα:  $\vdash \varphi$
- απόδειξη με υποθέσεις  $T \vdash \varphi$
- **συνεπές**  $T$ :  $\nexists \varphi (T \vdash \varphi \text{ και } T \vdash \neg \varphi)$
- **αντιφατικό**  $T$ :  $\exists \varphi (T \vdash \varphi \text{ και } T \vdash \neg \varphi)$   
 $\forall \varphi T \vdash \varphi$
- αν  $T$  αντιφατικό,  
τότε  $T \vdash \varphi$ , για κάθε  $\varphi$ .