Επίλυση Αναδρομικών Σχέσεων

Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων
Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 83200 Καρλόβασι, Σάμος
Email: fotakis@aegean.gr

1 Εισαγωγή

Σε αυτό το φυλλάδιο, θα παρουσιάσουμε τρεις βασικές μεθόδους για την εκτίμηση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς αναδρομικών σχέσεων που προκύπτουν κατά την ανάλυση αναδρομικών αλγορίθμων. Συγκεκριμένα, θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο της επανάληψης, τη μέθοδο της αντικατάστασης, και το Θεώρημα του Κυρίαρχου Όρου (Master Theorem). Για όλες τις αναδρομικές σχέσεις αυτής της ενότητας, θεωρούμε ότι $T(1) = \Theta(1)$ όπου δεν αναφέρεται αρχική συνθήκη.

2 Μέθοδος της Επανάληψης

Η βασική ιδέα της μεθόδου της επανάληψης είναι να αναπτύξουμε την αναδρομική σχέση σε άθροισμα και να υπολογίσουμε τον κλειστό τύπο του. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την παρακάτω αναδρομική σχέση:

$$T(n) = \begin{cases} 2\,T(n/2) + n & \text{αν } n = 2^k \text{ για κάποιο } k \geq 2 \\ 2 & \text{αν } n = 2 \end{cases} \tag{1}$$

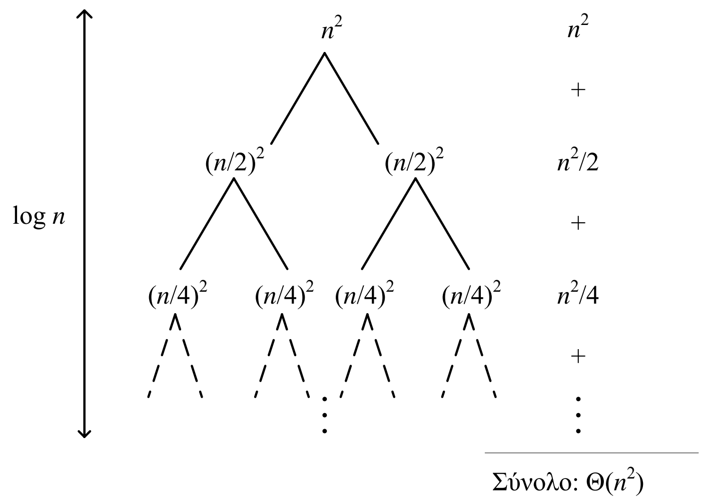
Η υπόθεση ότι το n πρέπει να είναι δύναμη 2 γίνεται για να αποφύγουμε την περίπτωση που το $n/2$ δεν είναι ακέραιος.

Αναπτύσσοντας την αναδρομική σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 2\,T(n/2) \\ &= n + 2\,n/2 + 2^2\,T(n/4) \\ &= n + 2\,n/2 + 2^2 n/2^2 + 2^4\,T(n/2^3) \\ &\vdots \\ &= n + 2\,n/2 + 2^2\,n/2^2 + \cdots + 2^{i-1}\,n/2^{i-1} + 2^i\,T(n/2^i) \\ &= n\,i + 2^i\,T(n/2^i) \end{aligned}$$

Αν θέτουμε $i = \log n - 1$ στην παραπάνω ισότητα, η ανάπτυξη της αναδρομής τερματίζεται αφού $n/2^{\log n - 1} = 2$. Επομένως, $T(n) = n \log n$.

Η ιδέα της μεθόδου της επανάληψης είναι απλή, αλλά η εφαρμογή της συχνά οδηγεί σε πολύπλοκους αλγεβρικούς υπολογισμούς. Δύο είναι οι σημαντικότερες παράμετροι κατά την εφαρμογή της μεθόδου: ο αριθμός των επαναλήψεων για την πλήρη ανάπτυξη της αναδρομής (δηλ. μέχρι το σημείο που εφαμρόζεται η αρχική συνθήκη), και ο υπολογισμός του αθροίσματος των όρων που



Σχήμα 1. Το δέντρο της αναδρομής για την σχέση $T(n) = 2\,T(n/2) + n^2$.

προκύπτουν από κάθε επίπεδο ανάπτυξης της αναδρομής. Η εφαρμογή της μεθόδου της επανάληψης όταν η αναδρομική σχέση ορίζεται με πάνω ή κάτω ακέραια μέρη μπορεί να οδηγήσει σε πολύπλοκες αλγεβρικές εκφράσεις. Για την εκτίμηση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς μιας αναδρομικής σχέσης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κλάσμα να δίνει πάντα ακέραιο αποτέλεσμα (π.χ. στην σχέση (1) υποθέσαμε ότι το n είναι δύναμη του 2).

Μία απλή και χρήσιμη μέθοδος για την αναπαράσταση της ανάπτυξης μιας αναδρομικής σχέσης είναι το *δέντρο της αναδρομής* (recursion tree). Το δέντρο της αναδρομής επιτρέπει την καλύτερη οργάνωση των αλγεβρικών υπολογισμών κατά την ανάπτυξη της αναδρομικής σχέσης. Έστω η αναδρομική σχέση $T(n) = 2\,T(n/2) + n^2$. Το δέντρο της αναδρομής για αυτή την σχέση φαίνεται στο Σχήμα 1. Παρατηρούμε ότι η συνεισφορά κάθε γραμμής του δέντρου σε ύψος i (η ρίζα θεωρείται ότι βρίσκεται σε ύψος 0) είναι $n^2/2^i$. Αφού σε κάθε επίπεδο το n υποδιπλασιάζεται, το ύψος του δέντρου είναι $\log n$ (δηλαδή το δέντρο έχει $\log n + 1$ επίπεδα). Είναι λοιπόν

$$\sum_{i=0}^{\log n} n^2/2^i = n^2 \sum_{i=0}^{\log n} 2^{-i} \; < 2n^2 = \Theta(n^2)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι το άθροισμα των $k+1$ πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο 1 και λόγο $1/2$ είναι $2 - 2^{-k}$.

Άσκηση 1. Να υπολογίσετε μια ακριβή ασυμπτωτική εκτίμηση για τη λύση της αναδρομικής σχέσης $T(n) = 4\,T(n/2) + n$ με αρχική συνθήκη $T(1) = 1$.

Λύση. Το δέντρο της αναδρομής έχει $\log n + 1$ επίπεδα επειδή το n υποδιπλασιάζεται σε κάθε επίπεδο. Για κάθε i, $i = 0, \ldots, \log n + 1$, η συνεισφορά του επιπέδου i είναι $2^i\,n$. Επομένως,

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log n} 2^i\,n = n \sum_{i=0}^{\log n} 2^i = n(2n-1) = \Theta(n^2)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι το άθροισμα των $k+1$ πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο 1 και λόγο 2 είναι $2^{k+1}-1$. $\square$

Άσκηση 2. Να λύσετε την παρακάτω αναδρομική σχέση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της επανάληψης:

$$T(n) = \begin{cases} 2\,T(n/2)+1 & \text{αν } n = 2^k \text{ για κάποιο } k \geq 1 \\ 1 & \text{αν } n = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Λύση. Αναπτύσσοντας την αναδρομική σχέση σε i επίπεδα, παίρνουμε $T(n) = i + T(n/2^i)$. Θέτοντας $i = \log n$, η ανάπτυξη της αναδρομής τερματίζεται αφού $n/2^{\log n} = 1$. Επομένως, $T(n) = \log n + 1$. $\square$

3 Μέθοδος της Αντικατάστασης

Η βασική ιδέα της μεθόδου της αντικατάστασης είναι να μαντέψουμε τη μορφή της λύσης και να χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή για να αποδείξουμε ότι η λύση είναι σωστή. Η μέθοδος είναι απλή και ισχυρή, αλλά μπορεί να εφαρμοστεί μόνο όταν μπορούμε να μαντέψουμε τη μορφή της λύσης.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την αναδρομική σχέση $T(n) = 2\,T(n/2) + \Theta(n)$ με αρχική συνθήκη $T(1) = \Theta(1)$. Στην προηγούμενη ενότητα αποδείξαμε με τη μέθοδο της επανάληψης ότι η σχέση (1), που είναι απλούστερη αλλά παρόμοια, έχει λύση $\Theta(n \log n)$. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αντικατάστασης για να αποδείξουμε ότι $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Μπορούμε να αγνοήσουμε τις μικρές τιμές του n επειδή θέλουμε να αποδείξουμε μια ασυμπτωτική εκτίμηση για το $T(n)$. Έστω $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ οι σταθερές που "κρύβονται" στον προσθετικό όρο $\Theta(n)$ της αναδρομικής σχέσης[1]. Επαγωγικά υποθέτουμε ότι

$$c_1\,(n/2)\log(n/2) \leq T(n/2) \leq c_2\,(n/2)\log(n/2)$$

Πρέπει αποδείξουμε ότι

$$c_1\,n\log n \leq T(n) \leq c_2\,n \log n$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση, παίρνουμε:

$$T(n) \geq 2\,c_1\,(n/2)\log(n/2) + c_1\,n = c_1\,n\,(\log n - 1) + c_1\,n = c_1\,n\log n$$

και

$$T(n) \leq 2\,c_2\,(n/2)\log(n/2) + c_2\,n = c_2\,n\,(\log n - 1) + c_2\,n = c_2\,n\log n$$

όπως απαιτείται. Αποδείξαμε λοιπόν ότι $T(n) = \Theta(n \log n)$.

[1] Τυπικά, θεωρούμε ότι η αναδρομική σχέση είναι $T(n) = 2\,T(n/2) + f(n)$, όπου $f(n) = \Theta(n)$. Από τον ορισμό του ασυμπτωτικού συμβολισμού Θ, υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ τέτοιες ώστε $c_1\,n \leq f(n) \leq c_2\,n$.

3.1 Αλλαγή Μεταβλητών

Σε κάποιες περιπτώσεις, μια αναδρομική σχέση μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά με αλλαγή μεταβλητών. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την σχέση $T(n) = 2\,T(\sqrt{n}) + \log n$ με αρχική συνθήκη $T(1) = \Theta(1)$. Θέτοντας $m = \log n$, παίρνουμε την σχέση $T(2^m) = 2\,T(2^{m/2}) + m$. Μπορούμε να μετονομάσουμε το $T(2^m)$ σε $S(m)$ και να οδηγηθούμε στην σχέση $S(m) = 2\,S(m/2) + m$ με αρχική συνθήκη $S(1) = \Theta(1)$. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η λύση αυτής της σχέσης είναι $S(m) = \Theta(m \log m)$. Πραγματοποιώντας την αντίστροφη αντικατάσταση, παίρνουμε $T(n) = \Theta(\log n \log\log n)$.

Άσκηση 3. Να λύσετε τις παρακάτω αναδρομικές σχέσεις θεωρώντας σαν αρχική συνθήκη $T(1) = 1$.

1. $T(n) = T(n-1) + 3$.
2. $T(n) = T(n-1) + 2n$.
3. $T(n) = 2\,T(n/2) + n$.
4. $T(n) = T(n/3) + 1$.
5. $T(n) = T(n/2) + n$.
6. $T(n) = 2\,T(n-1) + 1$.

Λύση.

1. $T(n) = 3(n-1) + 1$.
2. $T(n) = 2n(n-1) + 1$.
3. $T(n) = n \log n$.
4. $T(n) = \log_3 n$.
5. $T(n) = 2n - 1$.
6. $T(n) = 2^n - 1$.

4 Το Θεώρημα του Κυρίαρχου Όρου

Το Θεώρημα του Κυρίαρχου Όρου (Master Theorem) αποτελεί μια εύκολη συνταγή για την επίλυση αναδρομικών σχέσεων της μορφής $T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$, όπου a και b είναι σταθερές και $f(n)$ είναι μία θετική συνάρτηση.

Το Θεώρημα του Κυρίαρχου Όρου διακρίνει τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

1. Αν $f(n) = \mathrm{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$ για κάποια σταθερά $\epsilon > 0$, τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
2. Αν $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.
3. Αν $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ για κάποια σταθερά $\epsilon > 0$, και υπάρχει σταθερά $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $a\,f(n/b) < f(n)$, τότε $T(n) = \Theta(f(n))$.

Κατά της εφαρμογή του Θεωρήματος του Κυρίαρχου Όρου, η μεγαλύτερη από τις συναρτήσεις $f(n)$ και $n^{\log_b a}$ (δηλ. ο κυρίαρχος όρος) καθορίζει τη λύση της σχέσης. Στην πρώτη περίπτωση, η $f(n)$ πρέπει να είναι πολυωνυμικά μικρότερη (δηλ. να υπολείπεται κατά έναν παράγοντα n^{ϵ}) από την $n^{\log_b a}$. Στη δεύτερη περίπτωση, οι συναρτήσεις $f(n)$ και $n^{\log_b a}$ πρέπει να έχουν την ίδια τάξη μεγέθους. Στην τρίτη περίπτωση, η $f(n)$ πρέπει να είναι πολυωνυμικά μεγαλύτερη από την $n^{\log_b a}$ και να ικανοποιεί τη συνθήκη $a\,f(n/b) < f(n)$ για μεγάλες τιμές του n. Υπάρχει ακόμη το ενδεχόμενο η $f(n)$ να μην εντάσσεται σε κάποια από τις παραπάνω περιπτώσεις και το θεώρημα να μην εφαρμόζεται.

Σαν πρώτο παράδειγμα, θεωρούμε την σχέση $T(n) = 9\,T(n/3) + n$. Είναι $a = 9$, $b = 3$, και $n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2$. Αφού $f(n) = n$, εφαρμόζουμε την πρώτη περίπτωση του θεωρήματος και παίρνουμε $T(n) = \Theta(n^2)$.

Σαν δεύτερο παράδειγμα, θεωρούμε την σχέση $T(n) = T(2n/3) + 1$. Είναι $a = 1$, $b = 3/2$, και $n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1 = f(n)$. Επομένως εφαρμόζουμε τη δεύτερη περίπτωση του θεωρήματος και παίρνουμε $T(n) = \Theta(\log n)$.

Για την αναδρομική σχέση $T(n) = 3\,T(n/4) + n \log n$ είναι $a = 3$, $b = 4$, και $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} \approx n^{0.793}$. Αφού $f(n) = n \log n$ και $3\,f(n/4) < f(n)$ εφαρμόζουμε την τρίτη περίπτωση του θεωρήματος και παίρνουμε $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Σαν ένα τελευταίο παράδειγμα, θεωρούμε την σχέση $T(n) = 2\,T(n/2) + n \log n$. Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα γιατί η ποσότητα $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$ δεν είναι *πολυωνυμικά μικρότερη* από τη συνάρτηση $f(n) = n \log n$. Χρησιμοποιώντας το δέντρο της αναδρομής, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $T(n) = \Theta(n \log^2 n)$. Οι λεπτομέρειες αφήνονται σαν άσκηση για τον αναγνώστη.

Άσκηση 4. Να υπολογίσετε ακριβείς ασυμπτωτικές εκτιμήσεις για τις αναδρομικές σχέσεις:

1. $T(n) = 6\,T(n/5) + n \log^6 n$.
2. $T(n) = 5\,T(n/6) + n$.
3. $T(n) = 3\,T(n/9) + \sqrt{n}$.
4. $T(n) = T(n-1) + n^2$.
5. $T(n) = T(n/5) + T(7n/10) + 3n$.
6. $T(n) = T(5n/9) + T(4n/9) + n$.

Λύση.

1. $T(n) = \Theta(n^{\log_5 6})$.
2. $T(n) = \Theta(n)$.
3. $T(n) = \Theta(\sqrt{n} \log n)$.
4. $T(n) = \Theta(n^3)$.
5. $T(n) = \Theta(n)$.
6. $T(n) = \Theta(n \log n)$.