

Κόκκινα-Μαύρα Δέντρα

Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Κόκκινα-Μαύρα Δέντρα

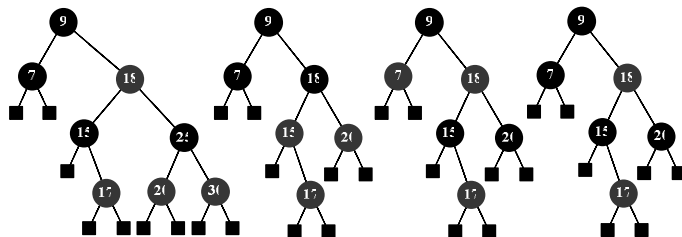
- ΔΔΑ με τις εξής ιδιότητες:
 - ΚΜ: κάθε κόμβος είναι κόκκινος ή μαύρος.
 - Ρίζα: η ρίζα είναι μαύρη.
 - Εξωτερικοί: οι εξωτερικοί κόμβοι (NULL-φύλλα) είναι μαύροι.
 - Εσωτερικοί: τα παιδιά κάθε κόκκινου κόμβου είναι μαύρα.
 - Όχι διαδοχικοί κόκκινοι κόμβοι.
 - Μαύρο βάθος: ίδιος αριθμός μαύρων κόμβων σε μονοπάτια από ρίζα σε NULL-φύλλα.
 - Πλήρης ζύγιση αν υπολογίσουμε μόνο μαύρους κόμβους.
 - Όλα τα NULL-φύλλα έχουν ίδιο μαύρο βάθος.
- Μπορούμε ισοδύναμα να χρωματίσουμε τις ακμές.
- Αναπαράσταση : επιπλέον 1 bit για χρώμα.

Δομές Δεδομένων

Κόκκινα-Μαύρα Δέντρα 2

Κόκκινα-Μαύρα Δέντρα

- Προτάθηκαν από Bayer, 1972.
- Τελική μορφή από Guibas και Sedgwick.



Δομές Δεδομένων

Κόκκινα-Μαύρα Δέντρα 3

Κόκκινα-Μαύρα Δέντρα

- Συνθήκη ζύγισης υπονοείται από ιδιότητες:
 - Εσωτερικοί: όχι διαδοχικοί κόκκινοι κόμβοι.
 - Μαύρο βάθος: ίδιος #μαύρων κόμβων από ρίζα σε NULL-φύλλα.
 - Ισχύουν για κάθε υποδέντρο.
- $bh(x)$ μαύρο ύψος εσωτερικού κόμβου x :
 - #μαύρων κόμβων σε μονοπάτι από x προς NULL-φύλλο - 1.
 - $bh(x) \leq h(x) < 2bh(x)$
 - Κάθε κόκκινος παρεμβάλλεται σε μαύρους.
 - Για κάθε εσωτερικό κόμβο, ύψος «ψηλού» υποδέντρου $\leq 2 \times$ ύψος «κοντού» υποδέντρου.

Δομές Δεδομένων

Κόκκινα-Μαύρα Δέντρα 4

Ύψος ΚΜ-Δέντρου

- Ελάχιστο ύψος ΔΔΑ με n στοιχεία:
 $n \leq 1 + 2 + \dots + 2^{h-1} = 2^h - 1 \Rightarrow h \geq \log(n + 1)$
- Μέγιστο ύψος ΚΜ-δέντρου με n στοιχεία:
 - h και bh ύψος και μαύρο ύψος ρίζας: $h \leq 2bh$
 - Κάθε μονοπάτι ρίζα - NULL-φύλλο έχει bh εσωτερικούς κόμβους (+1 NULL-φύλλο).
 - Τουλάχιστον $2^{bh} - 1$ μαύροι εσωτερικοί κόμβοι.
 $n \geq 2^{bh} - 1 \Rightarrow bh \leq \log(n + 1) \Rightarrow h \leq 2 \log(n + 1)$
 - $\log(n+1) \leq$ ύψος ΚΜΔ με n στοιχεία $\leq 2 \log(n+1)$

Δομές Δεδομένων

Κόκκινα-Μαύρα Δέντρα 5

Ύψος ΚΜ και AVL Δέντρων

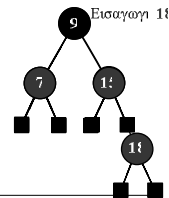
- ΚΜ δέντρα έχουν ασθενέστερη συνθήκη ζύγισης από AVL δέντρα.
 - ΚΜ έχουν μεγαλύτερο ύψος από AVL ($ΚΜ \leq 2 \log(n+1)$ vs $AVL \leq 1.441 \log(n+1)$).
 - ΚΜ (λίγο) πιο αργή αναζήτηση λόγω ύψους.
 - ΚΜ (λίγο) ευκολότερη και ταχύτερη εισαγωγή / διαγραφή λόγω ασθενέστερης συνθήκης ζύγισης.

Δομές Δεδομένων

Κόκκινα-Μαύρα Δέντρα 6

Εισαγωγή

- Εισαγωγή όπως ΔΔΑ όπου καταλήγει αναζήτηση.
 - Νέος κόμβος πάντα **κόκκινος** με παιδιά (μαύρα) NULL-φύλλα.
 - Πιθανή δημιουργία διαδοχικών κόκκινων.
 - Αν δέντρο κενό, κόκκινη ρίζα γίνεται μαύρη.
 - Δεν επηρεάζεται (ζύγιση ως προς) μαύρο ύψος.
 - Αν νέος κόμβος μαύρος, παραβίαση ιδιότητας μαύρου ύψους.
- Επαναζυγιστικές πράξεις:
 - Μη-δομικές: αλλαγές χρώματος.
 - Δομικές: περιστροφές.

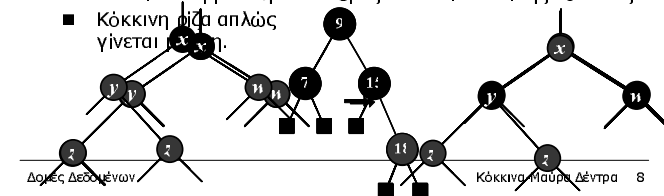


Δομές Δεδομένων

Κόκκινα-Μαύρα Δέντρα 7

Αντιστροφή Χρώματος

- Έστω y (ψηλότερος) και z (χαμηλότερος) διαδοχικοί κόκκινοι κόμβοι.
- Έστω x πατέρας (μαύρος) και w αδελφός του y .
- Αν w κόκκινος : **αντιστροφή χρώματος** για x, y, w .
 - Διορθώνει διαδοχικούς κόκκινους τοπικά και δεν αλλάζει μαύρο ύψος.
 - Δεν είναι τερματική αν πατέρας του x είναι επίσης κόκκινος.
 - Κόκκινη ρίζα απλώς γίνεται μαύρη.

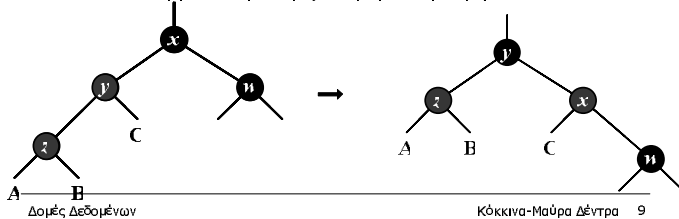


Δομές Δεδομένων

Κόκκινα-Μαύρα Δέντρα 8

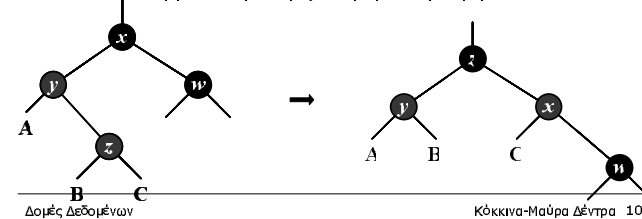
Απλή Περιστροφή

- Αν w μαύρος : **περιστροφή**.
 - Αν ακμές (x, y) και (y, z) ακολουθούν ίδια κατεύθυνση:
 - **Απλή περιστροφή**.
 - Διορθώνει διαδοχικούς κόκκινους και δεν αλλάζει μαύρο ύψος.
 - Είναι τερματική γιατί ρίζα παραμένει μαύρη.



Διπλή Περιστροφή

- Αν w μαύρος : **περιστροφή**.
 - Αν ακμές (x, y) και (y, z) είναι διαφορετικής κατεύθυνσης:
 - **Διπλή περιστροφή**.
 - Διορθώνει διαδοχικούς κόκκινους και δεν αλλάζει μαύρο ύψος.
 - Είναι τερματική γιατί ρίζα παραμένει μαύρη.



Εισαγωγή

- Χρόνος εκτέλεσης: $O(\log n)$
 - Αναζήτηση : $O(\log n)$
 - Εισαγωγή : $O(1)$
 - Μη-δομικές επαναζυγιστικές πράξεις : $O(\log n)$
 - Αντιστροφή χρώματος.
 - ≤ 1 δομική επαναζυγιστική πράξη (περιστροφή): $O(1)$
 - Περιστροφή είναι τερματική.
- Παράδειγμα εισαγωγής:
 - 9, 15, 7, 18, 20, 17, 25, 30.

Δομές Δεδομένων

Κόκκινα-Μαύρα Δέντρα 11

Διαγραφή

- Αναζήτηση και διαγραφή στοιχείου όπως ΔΔΑ.
- Διαγραφή μαύρου κόμβου :
 - Επηρεάζεται μαύρο ύψος.
 - Διαδοχικοί κόκκινοι κόμβοι.
- Επαναζύγιση με αλλαγές χρωμάτων και περιστροφές.
 - Περιστροφή είναι (ουσιαστικά) τερματική και για διαγραφή.
- Χρόνος εκτέλεσης : $O(\log n)$
- Δομικές επαναζυγιστικές πράξεις : $O(1)$
- ΚΜ δέντρα ζυγίζονται σε ένα πέρασμα.
AVL χρειάζονται δύο πέρασματα.

Δομές Δεδομένων

Κόκκινα-Μαύρα Δέντρα 12

Ασκήσεις

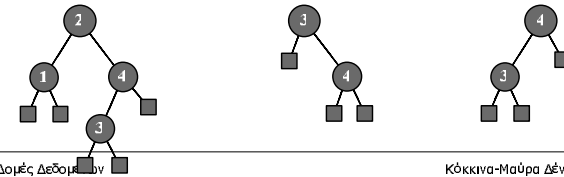
- ΔΔΑ περιέχει κάποιους αριθμούς από 1 έως 1000. Αναζητούμε το 363. Ποια δεν μπορεί να προκύψουν;
 - 2, 252, 401, 398, 330, 344, 397, 363
 - 924, 220, 911, 244, 898, 258, 362, 363
 - 925, 202, 911, 240, 912, 245, 363
 - 2, 399, 387, 219, 266, 282, 381, 278, 363
 - 935, 278, 347, 621, 299, 392, 358, 363
- Έστω κόμβος p με δύο παιδιά που δεν είναι NULL-φύλλα. $\text{succ}(p)$ / $\text{pred}(p)$ έχει αριστερό / δεξί παιδί NULL-φύλλο.
- Επιλογή (k -οστό μικρότερο στοιχείο) σε ΔΔΑ;
 - Πλήθος στοιχείων στο αριστερό υποδέντρο + 1 (για τρέχον στοιχείο - ρίζα υποδέντρου). Πεδίο LeftSize.

Δομές Δεδομένων

Κόκκινα-Μαύρα Δέντρα 13

Ασκήσεις

- Ταξινόμηση με εισαγωγή σε ΔΔΑ. Χρόνος εκτέλεσης;
- Εισαγωγή δεν είναι αντιμεταθετική.
 - Εισαγωγή 1, 2, 3.
 - Εισαγωγή 2, 1, 3.
- Διαγραφή δεν είναι αντιμεταθετική.
 - Σβήνω 2 και μετά 1.
 - Σβήνω 1 και μετά 2.



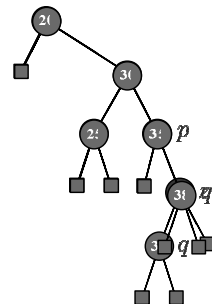
Δομές Δεδομένων

Κόκκινα-Μαύρα Δέντρα 14

Ασκήσεις

- Διαγραφή μέγιστου (ελάχιστου).
 - Δεξιότατος κόμβος έχει δεξί παιδί NULL-φύλλο.
 - Είτε ρίζα είτε δεξί παιδί.

```
void deleteMax() {
    tnode *p, *q, *z = rightmost();
    q = z->left;
    p = z->par;
    if (q) q->par = p;
    if (z == root) root = q;
    else p->right = q;
    free(z);
}
```



Δομές Δεδομένων

Κόκκινα-Μαύρα Δέντρα 15

Ασκήσεις

- KM δέντρο με όλες τις ιδιότητες εκτός από κόκκινη ρίζα.
 - Διορθώνεται αν η ρίζα γίνει μαύρη.
- KM δέντρο με εισαγωγή $n > 1$ στοιχείων.
 - Τουλάχιστον ένα κόκκινο κόμβο.
- Λόγος #κόκκινων στοιχείων / #μαύρων στοιχείων.
 - Ελάχιστη τιμή λόγου : 0 (όλα μαύρα).
 - Μέγιστη τιμή λόγου : 2
 - Κάθε μαύρος έχει δύο κόκκινα παιδιά (το πολύ).
 - Δεν συμπεριλαμβανουμε NULL-φύλλα.

Δομές Δεδομένων

Κόκκινα-Μαύρα Δέντρα 16