Πανεπιστημιο Πατρων
Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Ηλεκτρονικων Υπολογιστων
και Πληροφορικης

Προσεγγιστική Επίλυση Υπολογιστικά Δύσκολων Προβλημάτων: Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδακτορική Διατριβή

Δημητριος Α. Φωτακης

Επιβλέπων Καθηγητής: Παυλος Γ. Σπυρακης

Πάτρα, Μάιος 1999

Αφιερώνεται στους καλύτερους
και πιο αγαπημένους δασκάλους μου,
τους γονείς μου

Ανδρέα *και* Ολυμπία.

Προσεγγιστική Επίλυση Υπολογιστικά Δύσκολων Προβλημάτων: Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδακτορική Διατριβή

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ Α. ΦΩΤΑΚΗΣ

Επιβλέπων Καθηγητής: ΠΑΥΛΟΣ Γ. ΣΠΥΡΑΚΗΣ

Σχολή: Πολυτεχνική Σχολή, Πανεπιστήμιο Πατρών

Τμήμα: Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής

Τομέας: Εφαρμογών και Θεμελιώσεων της Επιστήμης των Υπολογιστών

Προσεγγιστική Επίλυση Υπολογιστικά Δύσκολων Προβλημάτων: Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Δημητριος Α. Φωτακης

Περίληψη

Σε αυτή τη διατριβή παρουσιάζονται αλγόριθμοι προσέγγισης πολυωνυμικού χρόνου και μελετώνται ζητήματα υπολογιστικής πολυπλοκότητας για κάποια υπολογιστικά δύσκολα προβλήματα βελτιστοποίησης. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται αλγόριθμοι προσέγγισης για ειδικές περιπτώσεις του Προβλήματος του Περιοδεύοντος Πωλητή (Travelling Salesman Problem, TSP), για τη Μέγιστη Αξιόπιστη Διαμέριση, και για την Ελάχιστη Αξιόπιστη Συμφόρηση. Επίσης, διατυπώνονται επαρκείς συνθήκες για τη μείωση της τυχαιότητας σε πιθανοτικά συστήματα, και αποδεικνύεται μια σχέση μεταξύ της αποτελεσματικότητας αυτών των τεχνικών και της πολυπλοκότητας ντετερμινιστικού χρόνου της κλάσης $\mathcal{NP}$.

Αρχικά μελετώνται δύο ειδικές περιπτώσεις του TSP σε στιγμιότυπα που ισχύει η τριγωνική ανισότητα, το TSP σε Γραφήματα (G-TSP) και το TSP με αποστάσεις 1 και 2, TSP(1,2). Ξεκινάμε αποδεικνύοντας ότι η προσέγγιση των G-TSP και TSP(1,2) σε πυκνά στιγμιότυπα είναι το ίδιο δύσκολη με την προσέγγιση του TSP(1,2) στη γενική περίπτωση. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε έναν $\mathcal{NC}$ αλγόριθμο για το TSP(1,2), που για κάθε γράφημα $G(V,E)$, παράγει περιοδείες μήκους το πολύ $|V|$ συν τον πληθικό αριθμό του Μέγιστου Συνόλου Ανεξαρτησίας του G. Αυτός είναι ο πρώτος 3/2-προσεγγιστικός $\mathcal{NC}$ αλγόριθμος για το TSP(1,2). Αποδεικνύουμε ακόμη ότι, δεδομένης μιας διαμέρισης ενός γραφήματος σε σταθερό αριθμό από κλίκες, τα G-TSP και TSP(1,2) μπορούν να επιλυθούν με βέλτιστο τρόπο σε πολυωνυμικό χρόνο. Επίσης, παρουσιάζουμε ένα $\frac{22}{15}$-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το TSP σε γραφήματα με διάμετρο 3.

Οι αλγόριθμοι για το TSP(1,2) έχουν πολλές ενδιαφέρουσες εφαρμογές στο πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης, το οποίο εμφανίζεται στην περιοχή της Ανάθεσης Συχνοτήτων και είναι ισοδύναμο με το TSP(1,2) στο συμπληρωματικό γράφημα. Αποδεικνύουμε ότι η ραδιο-αρίθμηση ανήκει στην κλάση $\mathcal{P}$ για επίπεδα γραφήματα, και ότι προσεγγίζεται σε λόγο 3/2 στο $\mathcal{NC}$. Επίσης, παρουσιάζουμε αλγορίθμους και κάτω φράγματα για το πρόβλημα της on-line ραδιο-αρίθμησης.

Το πρόβλημα της Μέγιστης Αξιόπιστης Διαμέρισης είναι, δεδομένων ενός συνόλου καναλιών, που καθένα έχει μια χωρητικότητα και τίθεται εκτός λειτουργίας τυχαία και ανεξάρτητα, και ενός περιορισμού αξιοπιστίας $(1-\epsilon)$, να υπολογιστεί μια συλλογή από ξένα μεταξύ τους υποσύνολα καναλιών, ώστε, με πιθανότητα τουλάχιστον $(1-\epsilon)$, ένα ή περισσότερα κανάλια να είναι λειτουργικά σε κάθε υποσύνολο. Ο

στόχος είναι η μεγιστοποίηση του αθροίσματος της ελάχιστης χωρητικότητας κάθε υποσυνόλου. Παρουσιάζουμε έναν 2-προσεγγιστικό αλγόριθμο για την περίπτωση που όλα τα κανάλια έχουν την ίδια χωρητικότητα, και έναν $(8+o(1))$-προσεγγιστικό αλγόριθμο για την περίπτωση που τα κανάλια έχουν διαφορετικές χωρητικότητες.

Στο πρόβλημα της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης, η είσοδος αποτελείται από ένα σύνολο καναλιών M, που τίθενται εκτός λειτουργίας τυχαία και ανεξάρτητα, ένα σύνολο μηνυμάτων J που πρέπει να μεταδοθούν μέσω του M, και έναν περιορισμό αξιοπιστίας $(1-\epsilon)$. Το ζητούμενο είναι η πλεονάζουσα ανάθεση $\phi : J \mapsto 2^M$, που ελαχιστοποιεί τη συμφόρηση, δηλαδή το μέγιστο φορτίο των καναλιών, ικανοποιώντας τον περιορισμό ότι, με πιθανότητα τουλάχιστον $(1-\epsilon)$, όλα τα μηνύματα έχουν αντίγραφα σε ένα ή περισσότερα λειτουργικά κανάλια. Βασιζόμενοι στα αποτελέσματα για την Αξιόπιστη Διαμέριση, παρουσιάζουμε έναν 4-προσεγγιστικό αλγόριθμο για κανάλια ίδιας χωρητικότητας, και έναν $2\left\lceil \frac{\ln(|M|/\epsilon)}{\ln(1/f_{\max})} \right\rceil$-προσεγγιστικό αλγόριθμο για κανάλια διαφορετικών χωρητικοτήτων και μηνύματα μοναδιαίου μεγέθους.

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι οι τυχαίοι περίπατοι σε γραφήματα-επεκτατές (expander graphs) με υπο-εκθετικό (στην πολυπλοκότητα τυχαίων δυαδικών ψηφίων) μέγεθος αποφεύγουν συγκεκριμένα υποσύνολα από “παραπλανητικές” συμβολοσειρές, χρησιμοποιώντας λιγότερα τυχαία δυαδικά ψηφία από τον αλγόριθμο. Στη συνέχεια, εισάγουμε την έννοια των συνόλων επιτυχίας υπό συνθήκη για την αποφυγή των υπολοίπων “παραπλανητικών” συμβολοσειρών. Βασιζόμενοι στην ιδέα των συνόλων επιτυχίας υπό συνθήκη, διατυπώνουμε γενικές επαρκείς συνθήκες για τη μείωση της τυχαιότητας σε πιθανοτικά συστήματα απλής κατεύθυνσης λάθους. Μια εφαρμογή σε σύστημα Πιθανοτικά Ελέγξιμων Αποδείξεων για την κλάση $\mathcal{NP}$ δείχνει ότι, εφόσον αυτές οι τεχνικές μπορούν να μειώσουν την πολυπλοκότητα τυχαίων δυαδικών ψηφίων για οποιοδήποτε πιθανοτικό σύστημα, κάθε γλώσσα στο $\mathcal{NP}$ μπορεί να αποφασισθεί σε υπο-εκθετικό ντετερμινιστικό χρόνο.

Επιβλέπων: Καθηγητης Παυλος Γ. Σπυρακης

Περιοχή: Αλγόριθμοι Προσέγγισης, Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

Τομείς: Πρόβλημα Περιοδεύοντος Πωλητή, Προβλήματα Βελτιστοποίησης με Περιορισμούς Ανοχής σε Σφάλματα, Επαναχρησιμοποίηση Τυχαίων Δυαδικών Ψηφίων

Approximate Solution of Computationally Hard Problems: Algorithms and Complexity

Dimitris A. Fotakis

Abstract

Polynomial time approximation algorithms and complexity results for some hard optimization problems are presented in this thesis. In particular, we present approximation algorithms for special cases of the Travelling Salesman Problem (TSP), for Maximum Fault-Tolerant Partition, and Minimum Fault-Tolerant Congestion. We also obtain sufficient conditions for reducing randomness in probabilistic systems, and we prove a connection between the efficiency of these techniques and the deterministic time complexity of $\mathcal{NP}$.

We start with studying two special cases of metric TSP, Graph TSP and TSP(1,2). Initially, we show that dense instances of TSP(1,2) and Graph TSP are as hard to approximate as general instances of TSP(1,2). Then, we present an $\mathcal{NC}$ algorithm for TSP(1,2) that, for all graphs $G(V,E)$, produces a tour of length at most $|V|$ plus the cardinality of the Maximum Independent Set of G. This is the first 3/2-approximation $\mathcal{NC}$ algorithm for TSP(1,2). Next, we prove that, given a partition of a graph into constant number of cliques, optimal Graph TSP and TSP(1,2) tours can be found in polynomial time. We also obtain a $\frac{22}{15}$-approximation algorithm for TSP in graphs of diameter 3.

The algorithms for TSP(1,2) have many interesting applications to the graph radio labelling problem, that arises in the context of Frequency Assignment and is equivalent to TSP(1,2) in the complementary graph. We prove that radio labelling is in $\mathcal{P}$ for planar graphs, and approximable within 3/2 in $\mathcal{NC}$. We also provide algorithms and lower bounds for on-line radio labelling.

The Maximum Fault-Tolerant Partition problem is, given a set of channels, each having a capacity and failing randomly and independently, and a fault-tolerance constraint $(1-\epsilon)$, to compute a collection of disjoint channel subsets such that, with probability no less than $(1-\epsilon)$, at least one channel is active in each subset. The objective is to maximize the sum of the minimum subset capacities. We present a 2-approximation algorithm for identical capacities, and a $(8+o(1))$-approximation algorithm for arbitrary capacities.

In the Minimum Fault-Tolerant Congestion problem, we are given a set M of parallel channels failing randomly and independently, a set J of messages to be transmitted over M, and a fault-tolerance constraint $(1-\epsilon)$. We seek to compute a redundant assignment $\phi : J \mapsto 2^M$, that minimizes congestion, i.e. the maximum channel load, subject to the constraint that, with probability no less than $(1-\epsilon)$, all the messages have a copy on at least one active channel. Based on the results for Fault-Tolerant Partition, we present a polynomial-time 4-approximation algorithm for identical capacity channels and arbitrary message sizes, and a $2\left\lceil \frac{\ln(|M|/\epsilon)}{\ln(1/f_{\max})} \right\rceil$-approximation algorithm for related capacity channels and unit size messages.

Finally, we show that random walks on expander graphs of subexponential (in the random bit complexity) size avoid particular sets of "misleading" strings, while reducing the random bit complexity of the algorithm. Then, we introduce the idea of conditional hitting sets in order to avoid the remaining "misleading" strings. Based on the notion of conditional hitting sets, we obtain general sufficient conditions for reducing the random bit complexity of any one-side error probabilistic system. An application to $\mathcal{PCP}$ systems for $\mathcal{NP}$ suggests that, if these techniques can substantially reduce the random bit complexity of arbitrary probabilistic systems, then $\mathcal{NP}$ has subexponential deterministic simulations.

Supervisor: Professor Paul G. Spirakis

Classification: Approximation Algorithms, Computational Complexity

Keywords: Travelling Salesman Problem, Optimization under Fault-Tolerance Constraints, Random Bit Recycling

Πρόλογος

Πριν την παρουσίαση των αποτελεσμάτων αυτής της διατριβής, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω όλους αυτούς που βοήθησαν, ο καθένας με το δικό του τρόπο, στην απόδειξή τους.

Υπάρχουν πάρα πολλοί λόγοι να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα αυτής της διατριβής, τον Καθηγητή του ΤΜΗΥΠ Παύλο Σπυράκη. Ο κ. Σπυράκης μου αποκάλυψε τη συναρπαστική περιοχή της Θεωρητικής Επιστήμης Υπολογιστών, με καθοδήγησε με συνέπεια και σταθερότητα προς τη βαθιά γνώση του τομέα των Αλγορίθμων Προσέγγισης, στάθηκε δίπλα μου σε όλες τις δύσκολες στιγμές χωρίς ποτέ να αμφιβάλει για την ποιότητα της δουλειάς μας, και συνέβαλε τα μέγιστα στην ολοκλήρωση αυτής της διατριβής. Ακόμα θέλω να ευχαριστήσω τον κ. Σπυράκη γιατί μου πρόσφερε εργασία όλα αυτά τα χρόνια, και γιατί με τη στάση του και το παράδειγμά του, μου δίδαξε πολλά μαθήματα ζωής.

Οφείλω επίσης να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, τον Καθηγητή του ΤΜΗΥΠ Αθανάσιο Τσακαλίδη, και τον Επίκουρο Καθηγητή του ΤΜΗΥΠ Σπύρο Λυκοθανάση. Ο κ. Τσακαλίδης παραχώρησε το γραφείο στο οποίο εργάστηκα τα τελευταία δύο χρόνια, ενώ οι συμβουλές του υπήρξαν πηγή καθοδήγησης και έμπνευσης. Ο κ. Λυκοθανάσης μου πρόσφερε σημαντική ηθική στήριξη, και με βοήθησε οικονομικά με προσφορά εργασίας. Η συνεργασία με τον κ. Λυκοθανάση υπήρξε εμπειρία πολύ ευχάριστη και εξαιρετικά ενδιαφέρουσα.

Θέλω ακόμα να ευχαριστήσω τα μέλη της επταμελούς επιτροπής,

Δημήτριο Χριστοδουλάκη, Καθηγητή ΤΜΗΥΠ
Χρήστο Κακλαμάνη, Αναπληρωτή Καθηγητή ΤΜΗΥΠ
Χρήστο Μπούρα, Επίκουρο Καθηγητή ΤΜΗΥΠ
Γιάννη Γαροφαλάκη, Λέκτορα ΤΜΗΥΠ

για την ουσιαστική συνδρομή τους στην ολοκλήρωση αυτής της διατριβής.

Πολύ σημαντική υπήρξε για μένα η συνεργασία και η αλληλεπίδραση με πολλούς συναδέλφους μεταπτυχιακούς φοιτητές και εργαζόμενους στο Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών. Διακινδυνεύοντας να ξεχάσω κάποιους, θα προσπαθήσω μια αναφορά. Πρώτα θέλω να ευχαριστήσω το φίλο και "συγκάτοικο" Σπύρο Κοντογιάννη, ο οποίος με βοήθησε να αντιμετωπίσω πλήθος δύσκολες καταστάσεις,

και ήταν πάντα εκεί να ακούει οτιδήποτε είχα ανάγκη να εκφράσω. Θέλω επίσης να ευχαριστήσω τους Ντίνο Αντωνή, Παύλο Εφραιμίδη, Βαγγέλη Καπούλα, Πέτρο Λάμψα, Βασίλη Μάμαλη, Γιώργο Πεντάρη, Αντώνη Τατάκη, Γιούλα Φατούρου, και Κώστα Χατζή για τη συνεργασία τους, τη βοήθειά τους, και όλες τις ευχάριστες στιγμές. Για τις καταπληκτικές συζητήσεις και τη βοήθεια στη βιβλιογραφία, θέλω να ευχαριστήσω τους Δημήτρη Θηλυκό και Γιάννη Σταματίου. Θέλω ακόμη να ευχαριστήσω τις φίλες και προσωρινές "οικοδέσποινες" Κατερίνα Κροτοπούλου και Δήμητρα Τέρπου, οι οποίες με φιλοξένησαν στο γραφείο τους για περισσότερο από ένα χρόνο, ενώ οι επισκέψεις και οι συζητήσεις μας υπήρξαν πάντα το καλύτερο αγχολυτικό (δυστυχώς μόνο για μένα).

Άφησα για το τέλος τους γονείς μου Ανδρέα και Ολυμπία, την αδερφή μου Χρύσα, και την Ανδριάνα, γιατί έχουν κάνει τόσα πολλά που δεν ξέρω πως να τους ευχαριστήσω. Σίγουρα αξίζουν ένα μεγάλο ευχαριστώ γιατί ήταν πάντα δίπλα μου, και γιατί συνεχίζουν και με ανέχονται.

Πάτρα, Μάιος 1999 — Δημήτρης Φωτάκης

Περιεχόμενα

Σχήματα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Οι αλγόριθμοι προσέγγισης αναπτύχθηκαν σαν απάντηση στο γεγονός ότι τα περισσότερα και πιο σημαντικά προβλήματα βελτιστοποίησης είναι δύσκολα για την κλάση $\mathcal{NP}$, και επομένως η επίλυσή τους σε πολυωνυμικό χρόνο με βέλτιστο τρόπο θεωρείται αδύνατη. Όπως παρατηρούν οι Garey και Johnson [62], η απάντηση ενός θεωρητικού στην ανάθεση του σχεδιασμού ενός ακριβούς αποδοτικού αλγορίθμου για ένα $\mathcal{NP}$-δύσκολο πρόβλημα είναι: "Δεν μπορώ να βρω έναν αποδοτικό αλγόριθμο, όπως ούτε όλοι αυτοί οι διάσημοι επιστήμονες μπορούν". Στην πράξη όμως, η απόδειξη της $\mathcal{NP}$-δυσκολίας για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης συνήθως αποτελεί το πρώτο μόνο βήμα προς την επίλυσή του.

Προφανώς, το γεγονός ότι μερικά πολύ σημαντικά προβλήματα είναι $\mathcal{NP}$-δύσκολα δεν εξαλείφει την ανάγκη επίλυσής τους. Επιπλέον, η απόδειξη $\mathcal{NP}$-δυσκολίας για ένα πρόβλημα απλώς δηλώνει ότι, αν οι κλάσεις $\mathcal{P}$ και $\mathcal{NP}$ διαφέρουν, τότε δεν υπάρχει αλγόριθμος, ο οποίος να υπολογίζει τη *βέλτιστη λύση* για *όλα τα στιγμιότυπα* του προβλήματος σε χρόνο *πολυωνυμικό* στο μέγεθος της εισόδου. Είναι φανερό ότι η άρση κάποιων από τις παραπάνω πολύ αυστηρές απαιτήσεις δημιουργεί διεξόδους για την επίλυση του προβλήματος. Συγκεκριμένα, διαφαίνονται τρεις κατευθύνσεις για άρση των απαιτήσεων.

Μια πρώτη προσέγγιση είναι να άρουμε την απαίτηση για πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης. Για μερικά προβλήματα, υπάρχουν αλγόριθμοι που στην πράξη εκτελούνται σχεδόν σε πολυωνυμικό χρόνο. Για παράδειγμα οι τεχνικές της διακλάδωσης-και-φράγματος (branch-and-bound) και του δυναμικού προγραμματισμού (dynamic programming) αποδεικνύονται πολύ χρήσιμες σε περιπτώσεις όπως το πρόβλημα του Σακιδίου (Knapsack). Το βασικό μειονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι πρακτικά γρήγοροι υπερ-πολυωνυμικοί αλγόριθμοι υπάρχουν για λίγα $\mathcal{NP}$-δύσκολα προβλήματα, ενώ για τα υπόλοιπα οι γρηγορότεροι αλγόριθμοι απαιτούν και στην πράξη εκθετικό χρόνο εκτέλεσης.

Μια εναλλακτική προσέγγιση είναι η άρση της απαίτησης για πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης σε όλα τα στιγμιότυπα εισόδου. Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές μερικές κατηγορίες στιγμιοτύπων εισόδου εμφανίζονται πολύ σπάνια, ενώ άλλες είναι πολύ συνηθισμένες. Για παράδειγμα, για το πρόβλημα της εύρεσης ενός κύκλου Hamilton το οποίο είναι $\mathcal{NP}$-δύσκολο, υπάρχει ένας πολύ γρήγορος αλγόριθμος που βρίσκει έναν κύκλο Hamilton "σχεδόν σε κάθε" Hamiltonian γράφημα [5]. Τυπικά, αυτή η προσέγγιση συνίσταται στον ορισμό μιας κατανομής πιθανότητας στα στιγμιότυπα εισόδου, και στην απόδειξη ότι συγκεκριμένοι αλγόριθμοι επιλύουν το πρόβλημα με μεγάλη πιθανότητα. Τα βασικά μειονεκτήματα είναι η δυσκολία τεκμηρίωσης της επιλογής για την κατανομή, και η τεχνική δυσκολία της πιθανοτικής ανάλυσης.

Μια τρίτη προσέγγιση είναι η άρση της απαίτησης για τον υπολογισμό μιας βέλτιστης λύσης. Σε πολλά πρακτικά προβλήματα οι διαφορές μεταξύ μιας βέλτιστης και μιας σχεδόν βέλτιστης λύσης είναι δυσδιάκριτες. Συνεπώς, μοιάζει εύλογος ο σχεδιασμός αλγορίθμων οι οποίοι υπολογίζουν μια *εγγυημένα σχεδόν βέλτιστη λύση* για όλα τα στιγμιότυπα εισόδου σε πολυωνυμικό χρόνο. Στις περισσότερες των περιπτώσεων αυτή η προσέγγιση, δηλαδή η απάρνηση της βέλτιστης λύσης για μία σχεδόν βέλτιστη λύση αποδοτικά υπολογίσιμη, είναι η πλέον κατάλληλη. Αυτή είναι η οπτική γωνία των αλγορίθμων προσέγγισης για υπολογιστικά δύσκολα προβλήματα.

Ύστερα από είκοσι πέντε χρόνια ερευνητικής δραστηριότητας, η περιοχή των αλγορίθμων προσέγγισης αποτελεί μια πολύ σημαντική ερευνητική περιοχή με πολύ σημαντικές, βαθιές τεχνικές [8]. Αυτές οι τεχνικές αξιοποιήθηκαν στο σχεδιασμό αποδοτικών αλγορίθμων για πολλά και σημαντικά προβλήματα βελτιστοποίησης. Από την άλλη πλευρά, κατά το σχεδιασμό ενός αλγορίθμου προσέγγισης για κάποιο πρόβλημα, επιθυμούμε να πλησιάσουμε όσο το δυνατόν περισσότερο στη βέλτιστη λύση, δεδομένου του περιορισμού για πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης. Αυτή η οπτική γωνία, και το γεγονός ότι για χρόνια δεν στάθηκε δυνατή η αποδοτική προσέγγιση μερικών προβλημάτων, όπως η Μέγιστη Κλίκα (Maximum Clique) και ο Ελάχιστος Χρωματισμός Γραφήματος (Minimum Graph Coloring), ώθησε στην απόδειξη κάτω φραγμάτων στην προσεγγισιμότητα (διαφορετικά, αποτελεσμάτων μη-προσεγγισιμότητας – inapproximability results) για πολλά προβλήματα. Αναπτύχθηκε έτσι μια περιοχή της θεωρίας πολυπλοκότητας (complexity theory), που ασχολείται με την ένταξη των προβλημάτων βελτιστοποίησης σε κλάσεις με κριτήριο την προσεγγισιμότητά τους σε πολυωνυμικό χρόνο. Στις μέρες μας, ο στόχος είναι ο ακριβής προσδιορισμός του λόγου προσέγγισης πολυωνυμικού χρόνου, τουλάχιστον για τα πιο σημαντικά προβλήματα. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει μια εξαιρετική επισκόπηση των τεχνικών και των επιτευγμάτων της ερευνητικής περιοχής των αλγορίθμων προσέγγισης στο [82].

Αυτή η διατριβή κυρίως ασχολείται με το σχεδιασμό αλγορίθμων προσέγγισης πολυωνυμικού χρόνου για μερικά θεμελιώδη προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Παράλληλα θίγονται ζητήματα πολυπλοκότητας τόσο για τη βέλτιστη όσο και για την προσεγγιστική επίλυση αυτών των προβλημάτων. Αρχικά μελετάμε την προσεγγισιμότητα συγκεκριμένων ειδικών περιπτώσεων του Προβλήματος του

Περιοδεύοντος Πωλητή (Travelling Salesman Problem, TSP). Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι οι αλγόριθμοι που παρουσιάζονται για το TSP έχουν σημαντικές θεωρητικές και πρακτικές εφαρμογές σε γραφοθεωρητικά προβλήματα βελτιστοποίησης που εμφανίζονται στην περιοχή της Ανάθεσης Συχνοτήτων σε Ραδιοφωνικά Δίκτυα (Frequency Assignment in Radio Networks).

Κατόπιν, παρουσιάζονται προσεγγιστικοί αλγόριθμοι για το πρόβλημα της Αξιόπιστης Διαμέρισης (Fault-Tolerant Partition) ελαττωματικών, παράλληλων καναλιών σε ξένα υποσύνολα. Τα κανάλια τίθενται εκτός λειτουργίας τυχαία και ανεξάρτητα, και μπορεί να έχουν την ίδια ή διαφορετικές χωρητικότητες. Μια διαμέριση είναι αποδεκτή (feasible), όταν ένα τουλάχιστον κανάλι είναι λειτουργικό σε κάθε υποσύνολο με πιθανότητα μεγαλύτερη από ένα δεδομένο κατώφλι. Οι αλγόριθμοι για το πρόβλημα της Αξιόπιστη Διαμέρισης χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης (Minimum Fault-Tolerant Congestion) που προκαλείται από μια πλεονάζουσα ανάθεση ενός συνόλου μηνυμάτων στα κανάλια. Μια ανάθεση είναι αποδεκτή όταν ένα τουλάχιστον αντίγραφο κάθε μηνύματος έχει ανατεθεί σε λειτουργικό κανάλι με πιθανότητα μεγαλύτερη από ένα δεδομένο κατώφλι.

Το τελευταίο μέρος της διατριβής ασχολείται με τη μείωση της τυχαιότητας σε πιθανοτικά συστήμάτα και την πολυπλοκότητα της ακριβούς επίλυσης όλων των προβλημάτων που εντάσσονται στο $\mathcal{NP}$. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε επαρκείς συνθήκες για τη μείωση της πολυπλοκότητας τυχαίων δυαδικών ψηφίων (random bit complexity) σε πιθανοτικά συστήματα απλής κατεύθυνσης λάθους (one-side error probabilistic systems). Με εφαρμογή σε συστήματα Πιθανοτικά Ελέγξιμων Αποδείξεων (Probabilistically Checkable Proofs, PCPs) σχετίζουμε την πολυπλοκότητα ντετερμινιστικού χρόνου ολόκληρης της κλάσης $\mathcal{NP}$ με την αποδοτικότητα και την πολυπλοκότητα των τεχνικών για μείωση τυχαιότητας.

1.1 Ορισμοί και Ιστορική Αναδρομή

Σε αυτή την ενότητα δίνουμε τους ορισμούς ορισμένων βασικών εννοιών, και κάνουμε μια σύντομη αναδρομή στην ερευνητική περιοχή των αλγορίθμων προσέγγισης μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1980. Οι ορισμοί και τα βασικά αποτελέσματα που αφορούν στη θεωρία γραφημάτων μπορούν να βρεθούν στα [76, 23], στη θεωρία πιθανοτήτων στο [48], στη θεωρία υπολογιστικής πολυπλοκότητας στο [114], και στους πιθανοτικούς αλγορίθμους στο [113]. Για μια λεπτομερή επισκόπηση των αποτελεσμάτων και των τεχνικών της περιοχής των αλγορίθμων προσέγγισης παραπέμπουμε στο [82], ενώ τυπικοί ορισμοί και αναφορές για την πλειοψηφία των υπολογιστικά δύσκολων προβλημάτων βελτιστοποίησης μπορούν να βρεθούν στο [35]. Μια πιο πρόσφατη επισκόπηση των σημαντικότερων εξελίξεων στην περιοχή αποτελεί η [8].

Ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης της κλάσης $\mathcal{NP}$ ορίζεται από μια συνάρτηση κόστους c με δύο μεταβλητές, η οποία είναι υπολογίσιμη σε πολυωνυμικό χρόνο, και μία σταθερά κ. Για κάθε είσοδο x, ο στόχος είναι ο υπολογισμός μιας λύσης y, $|y| \leq \kappa |x|^{\kappa}$, της οποίας το το κόστος $c(x, y)$ να είναι το ελάχιστο δυνατό. Για παράδειγμα, στο Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή, η είσοδος x αποτελείται από το σύνολο των σημείων και τις αποστάσεις μεταξύ τους, η λύση y αντιστοιχεί σε μια περιοδεία, και το κόστος $c(x, y)$ είναι το μήκος της περιοδείας. Τα προβλήματα μεγιστοποίησης της κλάσης $\mathcal{NP}$ ορίζονται ανάλογα.

Ένας αλγόριθμος λέγεται ότι επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης (approximation ratio) $\alpha \geq 1$ για κάποιο πρόβλημα ελαχιστοποίησης, όταν για κάθε είσοδο x με κόστος βέλτιστης λύσης $\mathrm{OPT}(x)$, ο αλγόριθμος υπολογίζει μία λύση y με κόστος $c(x, y) \leq \alpha \cdot \mathrm{OPT}(x)$. Αν αναφερόμαστε σε προβλήματα μεγιστοποίησης, για κάθε είσοδο x με κέρδος βέλτιστης λύσης $\mathrm{OPT}(x)$, ο αλγόριθμος πρέπει να υπολογίζει μια λύση y με κέρδος $c(x, y) \geq \mathrm{OPT}(x)/\alpha$. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο λόγος προσέγγισης ορίζεται ώστε να είναι πάντα μεγαλύτερος της μονάδας, και ότι μπορεί να εξαρτάται από το μέγεθος ή κάποιες παραμέτρους της εισόδου, π.χ. $\alpha = \log |x|$. Όταν υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης α για κάποιο πρόβλημα, λέμε ότι αυτό το πρόβλημα προσεγγίζεται σε λόγο α. Αν, υποθέτοντας ότι το $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ ή μια σχετική εικασία, μπορεί να δεχθεί ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που να επιτυγχάνει λόγο α για κάποιο πρόβλημα, λέμε ότι αυτό το πρόβλημα δεν προσεγγίζεται σε λόγο α.

Ένα Σχήμα Προσέγγισης Πολυωνυμικού Χρόνου (ΣΠΠΧ – Polynomial Time Approximation Scheme, PTAS) είναι ένας αλγόριθμος ο οποίος, για κάθε είσοδο x και περιθώριο προσέγγισης $\epsilon > 0$, υπολογίζει μια λύση y με κόστος $c(x, y) \leq (1 + \epsilon)\mathrm{OPT}(x)$ σε χρόνο που, για κάθε σταθερό ϵ, είναι πολυωνυμικός στο $|x|$. Ο χρόνος εκτέλεσης ενός ΣΠΠΧ συνήθως αυξάνεται εκθετικά (ή και γρηγορότερα) στο $1/\epsilon$, π.χ. $|x|^{1/\epsilon}$. Ένα ΣΠΠΧ μπορεί να θεωρηθεί σαν μια άπειρη οικογένεια αλγορίθμων $\mathcal{A} = \{A_\epsilon : \epsilon > 0\}$ που όμως έχει πεπερασμένη και ομοιόμορφη περιγραφή.

Ένα Σχήμα Προσέγγισης Πλήρως Πολυωνυμικού Χρόνου (ΣΠΠΠΧ – Fully Polynomial Time Approximation Scheme, FPTAS) είναι ένα ΣΠΠΧ με χρόνο εκτέλεσης πολυωνυμικό τόσο στο μέγεθος της εισόδου $|x|$ όσο και στο $1/\epsilon$. Υπάρχει επίσης η έννοια του Πιθανοτικού Σχήματος Προσέγγισης Πλήρως Πολυωνυμικού Χρόνου (ΠΣΠΠΠΧ – Fully Polynomial Time Randomized Approximation Scheme, FPRAS), όπου ο επιθυμητός λόγος προσέγγισης $(1 + \epsilon)$ επιτυγχάνεται με κάποια σημαντική πιθανότητα, π.χ. τουλάχιστον 3/4.

Ο πρώτος αλγόριθμος προσέγγισης σχεδιάστηκε πριν θεμελιωθεί η θεωρία της $\mathcal{NP}$-πληρότητας και ήταν ο αλγόριθμος δρομολόγησης λίστας (list scheduling) του Graham [71] για το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του μέγιστου φόρτου (minimum makespan) για τη δρομολόγηση εργασιών σε όμοιες μηχανές (scheduling on identical machines). Μετά τη θεωρητική θεμελίωση της $\mathcal{NP}$-πληρότητας οι Garey, Graham, και Ullman [61] και ο Johnson [89] όρισαν τυπικά την έννοια του αλγορίθμου προσέγγισης. Μάλιστα, στην [89] περιγράφονται απλοί αλγόριθμοι προσέγγισης για τα προβλήματα της Μέγιστης Τομής (Maximum Cut), Μέγιστης Ικανοποιησιμότητας (Maximum SAT), και Ελάχιστης Κάλυψης Συνόλων (Minimum Set Cover).

Λίγο αργότερα, οι Sahni και Gonzalez [121] έδειξαν ότι είναι $\mathcal{NP}$-δύσκολη η προσέγγιση του Προβλήματος του Περιοδεύοντος Πωλητή σε κάθε σταθερό λόγο.

Αξιοσημείωτα είναι επίσης το ΣΠΠΠΧ για το πρόβλημα του Σακιδίου (Knapsack) [84], ο 3/2-προσεγγιστικός αλγόριθμος του Christofides για τα στιγμιότυπα του Προβλήματος του Περιοδεύοντος Πωλητή που ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα (Δ-TSP) [30], το Ασυμπτωτικό ΣΠΠΠΧ για το Γέμισμα Κουτιών (Bin Packing) των Karmakar και Karp [95], και το ΣΠΠΧ των Hochbaum και Shmoys για την ελαχιστοποίηση του μέγιστου φόρτου [83].

1.1.1 On-line Αλγόριθμοι Προσέγγισης

Οι on-line αλγόριθμοι είναι μια κατηγορία αλγόριθμων προσέγγισης που, αντί για τον περιορισμό εκτέλεσης σε πολυωνυμικό χρόνο, υπόκεινται σε κάποιου είδους περιορισμούς στην γνώση των δεδομένων εισόδου. Σε ένα on-line πρόβλημα τα δεδομένα εισόδου παρέχονται τμηματικά ανά μονάδα χρόνου. Ο αλγόριθμος πρέπει να πάρει αποφάσεις βασισμένος στα δεδομένα που έχει συλλέξει μέχρι στιγμής. Την τελευταία δεκαετία πολλά σημαντικά αποτελέσματα εμφανίστηκαν στην περιοχή των on-line αλγορίθμων προσέγγισης.

Συνήθως οι on-line αλγόριθμοι αναλύονται και αξιολογούνται με την ανταγωνιστική ανάλυση (competitive analysis) [124] συγκρινόμενοι με το βέλτιστο off-line αλγόριθμο, ο οποίος λειτουργεί έχοντας πλήρη γνώση των δεδομένων εισόδου. Για μια εκτενή αναφορά στις τεχνικές και τα αποτελέσματα της περιοχής των on-line αλγορίθμων παραπέμπουμε στα [27, 50].

Ένας αλγόριθμος για κάποιο on-line πρόβλημα βελτιστοποίησης καλείται α-ανταγωνιστικός (α-competitive), αν, για κάθε πεπερασμένη ακολουθία εισόδου x, ο αλγόριθμος παράγει μια λύση y με κόστος $c(x, y) \leq \alpha \cdot \mathrm{OPT}(x) + \beta$, όπου β μια σταθερά. Όταν η αθροιστική σταθερά β είναι 0, ο αλγόριθμος ονομάζεται αυστηρά α-ανταγωνιστικός (strictly α-competitive). Μερικές φορές, ένας α-ανταγωνιστικός αλγόριθμος λέγεται ότι επιτυγχάνει λόγο ανταγωνιστικότητας α.

Μια προσέγγιση για το σχεδιασμό και την ανάλυση on-line αλγορίθμων, είναι να θεωρούμε ένα παιχνίδι μεταξύ ενός on-line παίκτη/αλγορίθμου και ενός αντιπάλου (adversary). Ο on-line αλγόριθμος ανταποκρίνεται στην ακολουθία εισόδου που κατασκευάζεται από τον αντίπαλο. Ο αντίπαλος, γνωρίζοντας επακριβώς τις κινήσεις του αλγορίθμου, κατασκευάζει την ακολουθία εισόδου που μεγιστοποιεί τον λόγο ανταγωνιστικότητας, δηλαδή προκαλεί το μέγιστο κόστος στον συγκεκριμένο on-line αλγόριθμο και το ελάχιστο κόστος στον βέλτιστο off-line αλγόριθμο (βλ. [22] για διαφορετικά είδη αντιπάλων). Για τα περισσότερα on-line προβλήματα βελτιστοποίησης, αυτή η προσέγγιση οδηγεί στην απόδειξη κάτω φραγμάτων στο λόγο ανταγωνιστικότητας που μπορεί να επιτευχθεί από οποιονδήποτε αλγόριθμο. Αξίζει να σημειωθεί ότι, σε αντίθεση με τα κάτω φράγματα για την προσέγγιση των off-line προβλημάτων σε πολυωνυμικό χρόνο, τα κάτω φράγματα για τα on-line προβλήματα βασίζονται στην έλλειψη πληροφορίας τη χρονική στιγμή της απόφασης και όχι σε κάποιες υποθέσεις πολυπλοκότητας.

1.2 Αλγόριθμοι και Τεχνικές Προσέγγισης

Την τελευταία πενταετία σημειώθηκε εξαιρετικά μεγάλη πρόοδος στην περιοχή των αλγορίθμων προσέγγισης. Σε αυτή την ενότητα, γίνεται μια σύντομη επισκόπηση των σημαντικότερων αποτελεσμάτων που αφορούν στο σχεδιασμό και την ανάλυση αλγορίθμων προσέγγισης.

Μια πολύ σημαντική εξέλιξη ήταν η εισαγωγή Ημιοριστικών Προγραμμάτων (Semidefinite Programs, SDPs) για την προσέγγιση $\mathcal{NP}$-δύσκολων προβλημάτων βελτιστοποίησης. Για πολλά προβλήματα τα Ημιοριστικά Προγράμματα δίνουν πολύ καλύτερες εκτιμήσεις για το κόστος της βέλτιστης λύσης από τις κλασσικές περιγραφές με Γραμμικά Προγράμματα (Linear Programs, LPs). Ημιοριστικά Προγράμματα χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά στην [67] για την προσέγγιση των προβλημάτων Μέγιστης Τομής (Maximum Cut) και Μέγιστης 2-Ικανοποιησιμότητας (MAX-2-SAT) σε λόγο 1.13. Στην [67], τα διανύσματα που περιγράφουν τη βέλτιστη κλασματική λύση του Ημιοριστικού Προγράμματος μετατρέπονται σε ακέραιες $\{0,1\}$-λύσεις με χρήση ενός τυχαίου υπερ-επιπέδου (hyperplane), το οποίο χωρίζει τα διανύσματα σε δύο σύνολα. Πιο πρόσφατα, κατάλληλα Ημιοριστικά Προγράμματα χρησιμοποιήθηκαν για την προσέγγιση πολλών προβλημάτων βελτιστοποίησης, όπως ο κ-χρωματισμός [93], το Ελάχιστο Ζωνοπλάτος (Minimum Bandwidth) [24], και η Μέγιστη 3-Ικανοποιησιμότητα (MAX 3-SAT) [94].

Αξιοσημείωτη ήταν η χρήση της βασικής-δυϊκής (primal-dual) μεθόδου σαν ενοποιημένο πλαίσιο σχεδιασμού και ανάλυσης αλγορίθμων προσέγγισης για προβλήματα βελτιστοποίησης σε δίκτυα επικοινωνίας, όπως τα προβλήματα του Ελάχιστου Δικτύου που μπορεί να επιζήσει (Minimum Survivable Network), του TSP με κίνητρα (Prize Collecting TSP), του Ελάχιστου Δέντρου Steiner με κίνητρα (Prize Collecting Steiner tree), του Ελάχιστου Υπογραφήματος με Συνεκτικότητα Κορυφών κ (Minimum Vertex κ-Connected Subgraph), κλπ. (βλ. το Κεφάλαιο 4 του [82] για μια επισκόπηση).

Αξιόλογες είναι οι τεχνικές των πρόσφατων αλγορίθμων προσέγγισης για το πρόβλημα της Ελάχιστης Πολλαπλής Τομής (Minimum Multicut) και άλλα σχετικά προβλήματα (βλ. Κεφάλαιο 5 του [82] για μια επισκόπηση). Στην [63], παρουσιάστηκε ένας $\mathcal{O}(\log\kappa)$-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το πρόβλημα της Ελάχιστης κ-Απλής Τομής (Minimum κ-Cut). Ο αλγόριθμος επιλύει ένα Γραμμικό Πρόγραμμα που περιγράφει την Ελάχιστη κ-Απλή Τομή, και χρησιμοποιεί μια νέα τεχνική, η οποία βασίζεται στο παράδειγμα μιας σφαίρας που μεγαλώνει, για τη μετατροπή της κλασματικής βέλτιστης λύσης σε μία ακέραιη προσεγγιστική λύση. Στις [107] και [16], χρησιμοποιήθηκαν ενσωματώσεις γραφημάτων με λογαριθμική παραμόρφωση (logarithmic distortion graph embeddings) για την προσέγγιση του προβλήματος της Αραιότερης Τομής (Sparsest Cut) σε λόγο $\mathcal{O}(\log\kappa)$. Στην [41], χρησιμοποιούνται μετρικές εξάπλωσης (spreading metrics), που υπολογίζονται από ένα Γραμμικό Πρόγραμμα, σε συνδυασμό με την ιδέα της σφαίρας που μεγαλώνει για την προσέγγιση του προβλήματος της Ελάχιστης Ισορροπημένης Τομής (Minimum Balanced Cut). Η προσεγγιστική επίλυση αυτού του προβλήματος χρησιμοποιείται στην εφαρμογή της μεθόδου διαίρει-και-βασίλευε (divide-and-conquer), με αποτέλεσμα $\mathcal{O}(\log n \operatorname{loglog} n)$-προσεγγιστικούς αλγορίθμους για προβλήματα, όπως η Ελάχιστη Τοποθέτηση στο Γραμμικό Γράφημα και σε Πλέγματα Διάστασης d (Minimum Linear και d-Dimensional Mesh Arrangement), και το Ελάχιστο Γινόμενο Αποθήκευσης-Χρόνου (Minimum Storage-Time Product). Επίσης, με χρήση παρόμοιων τεχνικών το πρόβλημα του Ελάχιστου Συνόλου Ανάδρασης (Minimum Feedback Set) σε κατευθυνόμενα γραφήματα προσεγγίζεται σε λόγο $\mathcal{O}(\log n \operatorname{loglog} n)$ στην [42].

Πρόσφατα, ο Feige [44] παρουσίασε έναν πολυλογαριθμικό αλγόριθμο προσέγγισης για το πρόβλημα του Ελάχιστου Ζωνοπλάτους. Ο αλγόριθμος αυτός βασίζεται στην έννοια των ενσωματώσεων που διατηρούν τον όγκο (volume respecting embeddings), οι οποίες αποτελούν φυσιολογική επέκταση των ενσωματώσεων μικρής παραμόρφωσης [107].

Πολύ σημαντική εξέλιξη αποτέλεσαν επίσης τα Σχήματα Προσέγγισης Πολυωνυμικού Χρόνου για το TSP σε επίπεδα γραφήματα (Planar TSP) [73], το TSP σε επίπεδα βεβαρημένα γραφήματα (Weighted Planar TSP) [10], το TSP σε Ευκλείδειους χώρους (Euclidean TSP), το ελάχιστο δέντρο Steiner σε Ευκλείδειους χώρους (Euclidean Steiner tree), και άλλα παρόμοια γεωμετρικά προβλήματα [7]. Ακόμη, παρουσιάστηκαν Σχήματα Προσέγγισης Πολυωνυμικού Χρόνου για πυκνά στιγμιότυπα (δηλ. στιγμιότυπα με ελάχιστο βαθμό $\Theta(n)$) πολλών προβλημάτων, όπως η Μέγιστη Τομή, η Μέγιστη κ-Ικανοποιησιμότητα (MAX-κ-SAT), η Ελάχιστη Τοποθέτηση στο Γραμμικό Γράφημα, και το Ελάχιστο Πλάτος Τομής (Minimum Cutwidth) (βλ. [11, 9, 59, 68]).

Το πρόβλημα της Ακέραιης Πολλαπλής Ροής (Unsplittable Multicommodity Flow), το οποίο αποτελεί γενίκευση του προβλήματος των Ξένων Μονοπατιών (Disjoint Paths), έγινε αντικείμενο σημαντικής ερευνητικής δραστηριότητας τα τελευταία χρόνια. Το πρόβλημα της Ακέραιης Πολλαπλής Ροής έχει πολλές εφαρμογές στη ανάθεση εύρους ζώνης (bandwidth allocation) και στη δρομολόγηση Ιδεατών Κυκλωμάτων (Virtual Circuits) σε δίκτυα επικοινωνίας. Στις [14, 17], παρουσιάστηκαν $\mathcal{O}(\log n)$-ανταγωνιστικοί on-line αλγόριθμοι για τις παραλλαγές της Ελάχιστης Συμφόρησης (Minimum Congestion) και της Μέγιστης Ρυθμο-απόδοσης (Maximum Throughput). Ο σχεδιασμός και η ανάλυση αυτών των αλγορίθμων βασίζονται στην χρήση της εκθετικής συνάρτησης δυναμικού (exponential potential function) για την επιλογή των μονοπατιών δρομολόγησης των νέων αιτήσεων δρομολόγησης. Πιο πρόσφατα, παρουσιάστηκε ένα αλγόριθμος προσέγγισης σταθερού λόγου για το πρόβλημα της Ακέραιης Πολλαπλής Ροής με Κοινή Πηγή (Single-Source Unsplittable Flow) [100]. Ο λόγος προσέγγισης για την παραλλαγή Ελάχιστης Συμφόρησης αυτού του προβλήματος βελτιώθηκε σε 3.23 στην [102].

Στην περιοχή των on-line αλγορίθμων, αξίζει να αναφερθεί η πολύ σημαντική συνεισφορά των Koutsoupias και Papadimitriou [103], που απέδειξαν ότι ο αλγόριθμος της Συνάρτησης Εργασίας (Work-Function Algorithm) είναι $2\kappa - 1$ ανταγωνιστικός για το πρόβλημα των κ-εξυπηρετητών (κ-server problem).

1.3 Κλάσεις Προσεγγισιμότητας

Πολύ γρήγορα μετά τη θεμελίωση της $\mathcal{NP}$-πληρότητας έγινε αντιληπτό ότι τα προβλήματα βελτιστοποίησης του $\mathcal{NP}$ δεν είναι πολυωνυμικά ισοδύναμα μεταξύ τους όσον αφορά στην προσεγγισιμότητα. Για παράδειγμα, το πρόβλημα του Σακιδίου έχει ΣΠΠΠΧ, ενώ το TSP στη γενική περίπτωση δεν προσεγγίζεται σε κανένα σταθερό παράγοντα. Αυτό αποτέλεσε αφετηρία μιας ερευνητικής προσπάθειας για την κατάταξη των προβλημάτων βελτιστοποίησης του $\mathcal{NP}$ σε κλάσεις πολυπλοκότητας ανάλογα με την προσεγγισιμότητά τους σε πολυωνυμικό χρόνο.

Ένα απαραίτητο συστατικό για μια τέτοια κατάταξη είναι μια μέθοδος αναγωγής που διατηρεί την προσεγγισιμότητα (approximation preserving reduction), δηλαδή επιτρέπει την αναγωγή μεταξύ προβλημάτων με την ίδια προσεγγισιμότητα (approximability). Με βάση μια τέτοια μέθοδο αναγωγής, τα προβλήματα βελτιστοποίησης του $\mathcal{NP}$ πρέπει να χωριστούν σε ένα μικρό αριθμό από κλάσεις προσεγγισιμότητας, και να δειχθούν μερικά αντιπροσωπευτικά πλήρη προβλήματα για κάθε κλάση.

Για σημαντικό χρονικό διάστημα δεν υπήρχε συμφωνία στον ορισμό μιας μεθόδου αναγωγής με διατήρηση της προσεγγισιμότητας. Σήμερα διαφαίνονται δύο υποψήφιες μέθοδοι, η A-αναγωγή [36] και η AP-αναγωγή [37]. Ο ορισμός της A-αναγωγής είναι τέτοιος ώστε, αν ένα πρόβλημα Π_1 είναι A-αναγώγιμο (A-reducible) σε ένα πρόβλημα Π_2 και το Π_2 προσεγγίζεται σε λόγο α, να συνάγεται ότι το Π_1 προσεγγίζεται σε λόγο $\mathcal{O}(\alpha)$. Συνεπώς αυτή η μέθοδος αναγωγής είναι χρήσιμη για τη μελέτη κλάσεων προβλημάτων στις οποίες ο λόγος προσεγγισιμότητας διαφέρει κατά κάποια σταθερά. Η AP-αναγωγή ορίζεται έτσι ώστε, αν ένα πρόβλημα Π_1 είναι AP-αναγώγιμο (AP-reducible) σε ένα πρόβλημα Π_2 και το Π_2 προσεγγίζεται σε λόγο $1+\alpha$, να συνάγεται ότι το Π_1 προσεγγίζεται σε λόγο $1+\mathcal{O}(\alpha)$. Επομένως η AP-αναγωγή είναι χρήσιμη για τη μελέτη κλάσεων στις οποίες ο λόγος προσέγγισης είναι κοντά στη μονάδα.

Ανεξάρτητα από τον ορισμό της μεθόδου, η διατύπωση μιας αναγωγής που διατηρεί την προσεγγισιμότητα από ένα πρόβλημα σε ένα άλλο δεν είναι εύκολη. Για παράδειγμα, δεν υπάρχει αναγωγή για τα προβλήματα της Μέγιστης Κλίκας και του Ελάχιστου Χρωματισμού, τα οποία είναι γνωστό ότι έχουν τον ίδιο λόγο προσέγγισης $n^{1-\epsilon}$. Επιπλέον μετά την αναγνώριση και την περιγραφή μιας κλάσης προσεγγισιμότητας, πρέπει να αποδειχθεί ο λόγος προσέγγισης που χαρακτηρίζει την κλάση, δηλαδή μια συνάρτηση $\alpha(n)$, ώστε όλα τα προβλήματα να προσεγγίζονται σε λόγο $\mathcal{O}(\alpha(n))$ σε πολυωνυμικό χρόνο, και η προσέγγιση σε λόγο $o(\alpha(n))$ να είναι αδύνατη, εφόσον $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

1.3.1 Η Κλάση MAX-SNP

Η πρώτη επιτυχημένη προσπάθεια ορισμού μιας τέτοιας κλάσης ήταν το MAX-SNP, που ορίστηκε από τους Papadimitriou και Yannakakis [116] στην προσπάθεια να καθορίσουν ποια προβλήματα έχουν ΣΠΠΧ και ποια δεν έχουν. Η κλάση MAX-SNP περιέχει προβλήματα ικανοποίησης λογικών περιορισμών, όπου οι περιορισμοί είναι *τοπικοί* και στόχος είναι η ικανοποίηση του μέγιστου αριθμού περιορισμών. Ένα τέτοιο πρόβλημα είναι η Μέγιστη 3-Ικανοποιησιμότητα (MAX 3-SAT). Πιο συγκεκριμένα, ένα σύνολο λογικών περιορισμών είναι τοπικοί ανν αποτελούν μία λογική πρόταση χωρίς ποσοδείκτες. Ο ορισμός του MAX-SNP σχετίζεται με το χαρακτηρισμό του $\mathcal{NP}$ κατά Fagin (π.χ. βλ. [114]) με χρήση λογικής δεύτερης τάξης (second order logic).

Η κλάση MAX-SNP περιλαμβάνει μόνο προβλήματα μεγιστοποίησης. Ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης ανήκει στην κλάση MAX-SNP, αν υπάρχουν σύμβολα σχέσεων $R_1, \ldots, R_m$ και S, και μια λογική πρόταση χωρίς ποσοδείκτες $\phi(R_1, \ldots, R_m, S, \vec{x})$, όπου το $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_\kappa)$ είναι ένα διάνυσμα κ μεταβλητών, ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Υπάρχει ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου, ο οποίος για κάθε στιγμιότυπο I, δημιουργεί ένα σύνολο U και σχέσεις $R_1(U), \ldots, R_m(U)$ στο U, ώστε κάθε $R_i(U)$ να έχει τον ίδιο αριθμό εντέλων (arity) με το R_i.

2. Το κέρδος της βέλτιστης λύσης είναι
$$\mathrm{OPT}(I) = \max_{S(U)} |\{\vec{x} \in U^\kappa : \phi(R_1(U), \ldots, R_m(U), S(U), \vec{x}) = \textsc{True}\}| \ ,$$
όπου το $S(U)$ είναι μια σχέση στο U με τον ίδιο αριθμό εντέλων με το S, και το U^k συμβολίζει το σύνολο των διατεταγμένων κ-άδων από στοιχεία του U.

Στον παραπάνω ορισμό, τα σύμβολα σχέσεων $R_1, \ldots, R_m, S$ και ο αριθμός εντέλων του καθενός εξαρτώνται μόνο από το πρόβλημα. Επομένως, αν το σύνολο U που ορίζεται από το στιγμιότυπο I έχει μέγεθος n, οι σχέσεις $R_1(U), \ldots, R_m(U)$ ορίζουν ένα πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών μεγέθους $\mathcal{O}(n^c)$, όπου c ο μέγιστος αριθμός εντέλων για τα R_i. Το πρόβλημα μεγιστοποίησης ανάγεται λοιπόν στον υπολογισμό μιας αποδεκτής (feasible) λύσης για το πρόβλημα περιορισμών $S(U) \subseteq U^\kappa$ που μεγιστοποιεί τον αριθμό των $\vec{x}$ που ικανοποιούν τη ϕ.

Ένα παράδειγμα είναι η διατύπωση του προβλήματος της Μέγιστης Τομής (Maximum Cut) σε αυτό το πλαίσιο. Το πρόβλημα της Μέγιστης Τομής είναι, δεδομένου ενός γραφήματος $G(V, E)$, να χωριστεί το V σε δύο μέρη $V_1, V - V_1$ ώστε να μεγιστοποιηθεί ο αριθμός των ακμών $\mathsf{Cut}(V_1, V - V_1)$ που διασχίζει την τομή. Το U αποτελείται από τις κορυφές του γραφήματος, τα R_i αναπαριστούν τις ακμές, το S αναπαριστά το ένα από τα μέρη της τομής, και η διάσταση του διανύσματος μεταβλητών είναι $\kappa = 2$. Η λογική πρόταση ϕ που πρέπει να ικανοποιηθεί είναι
$$\phi(E, V_1, (v, u)) = (v < u) \wedge E(v, u) \wedge (S(v) \neq S(u)) \ .$$

Με βάση αυτό το συμβολισμό είναι φανερό ότι η βέλτιστη λύση του προβλήματος της Μέγιστης Τομής σε ένα γράφημα $G(V, E)$ είναι:

$$\mathsf{Cut}^{\star}(V_1, V - V_1) = \max_{V_1 \subseteq V} \left|\{(v, u) \in V \times V : \phi(E, V_1, (v, u)) = \textsc{True}\}\right| \ .$$

Στην [116] ορίζεται η L-αναγωγή (Linear reduction – γραμμική αναγωγή), το οποίο είναι ένα είδος αναγωγής που διατηρεί την προσεγγισιμότητα. Επίσης αποδεικνύεται ότι τα προβλήματα της Μέγιστης Τομής και της Μέγιστης 3-Ικανοποιησιμότητας (MAX 3-SAT) είναι πλήρη για την κλάση MAX-SNP ως προς την L-αναγωγή. Αποδεικνύεται ακόμη ότι κάθε πρόβλημα στα MAX-SNP είναι L-αναγώγιμο σε μερικά άλλα σημαντικά προβλήματα ελαχιστοποίησης, όπως το Δ-TSP και η Ελάχιστη Κάλυψη Κορυφών (Minimum Vertex Cover). Από τον ορισμό της L-αναγωγής και του MAX-SNP προκύπτει ότι κάθε πρόβλημα που είναι L-αναγώγιμο (ή AP-αναγώγιμο) σε κάποιο πρόβλημα του MAX-SNP προσεγγίζεται σε σταθερό λόγο.

Αργότερα, αποδείχθηκε με χρήση συστημάτων Πιθανοτικά Ελέγξιμων Αποδείξεων (Probabilistically Checkable Proofs) ότι όλα τα MAX-SNP-δύσκολα προβλήματα δεν έχουν ΣΠΠΧ, εφόσον $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ [12]. Επίσης, αποδείχθηκε [97] ότι κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης του $\mathcal{NP}$ που μπορεί να προσεγγισθεί σε σταθερό λόγο είναι AP-αναγώγιμο σε κάποιο πλήρες πρόβλημα για το MAX-SNP.

1.3.2 Αποτελέσματα Μη-Προσεγγισιμότητας

Στο Κεφάλαιο 10 του [82], οι Arora και Lund παρουσιάζουν λίγες δεκάδες προβλημάτων για τα οποία έχουν αποδεχθεί κάτω φράγματα στην προσεγγισιμότητα με χρήση συστημάτων Πιθανοτικά Ελέγξιμων Αποδείξεων. Είναι αξιοσημείωτη η εμπειρική παρατήρηση ότι αυτά τα προβλήματα μπορούν να χωρισθούν σε τέσσερις μεγάλες κατηγορίες, ανάλογα με το κάτω φράγμα στην προσεγγισιμότητα που έχει αποδειχθεί για καθένα από αυτά.

Η κατηγορία I περιλαμβάνει τα προβλήματα για τα οποία είναι $\mathcal{NP}$-δύσκολο να υπάρχει ΣΠΠΧ και αντιστοιχεί στην κλάση MAX-SNP. Οι υπόλοιπες τρεις κατηγορίες II, III, και IV περιλαμβάνουν τα προβλήματα που δεν μπορούν να προσεγγισθούν σε πολυωνυμικό χρόνο σε λόγο $\Theta(\log n)$, $2^{\log^{1-\epsilon} n}$, για κάθε σταθερά $\epsilon > 0$, και n^{ϵ}, για κάποιο $\epsilon > 0$, αντίστοιχα. Οι αποδείξεις για τη μη-προσεγγισιμότητα των προβλημάτων σε κάθε κατηγορία χρησιμοποιούν παρόμοιες τεχνικές. Επίσης, για κάθε κατηγορία, οι Arora και Lund δίνουν κάποια αντιπροσωπευτικά προβλήματα (canonical problems) που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απόδειξη της μη-προσεγγισιμότητας του συνόλου των προβλημάτων στην ίδια κατηγορία.

1.3.3 Προβλήματα Ικανοποίησης Περιορισμών

Ένα πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών (constraint satisfaction problem) αποτελείται από μια οικογένεια $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_c\}$ από c διαφορετικές λογικές συναρτήσεις/περιορισμούς, καθεμία με αριθμό εντέλων το πολύ κ, όπου τα c και κ είναι σταθερές. Ένα στιγμιότυπο του προβλήματος αποτελείται από n λογικές μεταβλητές και m περιορισμούς οι οποίοι διαλέγονται από το $\mathcal{F}$. Για κάθε περιορισμό, έχουν επιλέγει κ μεταβλητές στις οποίες θα εφαρμοστεί ο περιορισμός. Επομένως, κάθε ανάθεση αλήθειας στις μεταβλητές αποτιμά κάθε περιορισμό. Ο στόχος είναι ο υπολογισμός μιας ανάθεσης αλήθειας για τις μεταβλητές που αποτιμά όλους τους περιορισμούς σε True. Για παράδειγμα το πρόβλημα της 3-Ικανοποιησιμότητας (3-SAT) είναι ένα πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών για $\kappa = 3$, $c = 16$, και το $\mathcal{F}$ να αποτελείται από όλες τις 16 διαφορετικές συναρτήσεις που προκύπτουν από τη διάζευξη το πολύ 3 μεταβλητών ($f_1 = x, f_2 = \overline{x}, f_3 = x \vee y, f_4 = \overline{x} \vee y$, κοκ.). Η κλάση προβλημάτων βελτιστοποίησης MAX-CSP ορίζεται ομοίως, με τη διαφορά ότι στόχος είναι η ικανοποίηση, όχι πια του συνόλου, αλλά του μέγιστου αριθμού περιορισμών.

Ο Schaefer [122] έδειξε ότι κάθε πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών ανήκει είτε στο $\mathcal{P}$ είτε στο $\mathcal{NP}$, και διατύπωσε συνθήκες για τη μορφή των περιορισμών που καθορίζουν την ένταξη κάθε προβλήματος.

Όσον αφορά στην προσεγγισιμότητα, όλα τα προβλήματα του MAX-CSP προσεγγίζονται σε σταθερό λόγο. Μάλιστα στις [34, 99] αποδεικνύεται ότι κάθε πρόβλημα στο MAX-CSP ανήκει είτε στο $\mathcal{P}$ είτε στο MAX-SNP. Επίσης, στην [98] μελετήθηκαν προβλήματα ελαχιστοποίησης που συνδέονται με προβλήματα ικανοποίησης περιορισμών. Στην κατηγορία αυτή περιλαμβάνονται προβλήματα όπως η Ελάχιστη (s,t)-Τομή (Minimum (s,t)-Cut), η Ελάχιστη Κάλυψη Κορυφών (Minimum Vertex Cover), η διαγραφή ενός ελάχιστου αριθμού ακμών από ένα γράφημα ώστε να γίνει διμερές (Minimum Bipartite Edge Deletion). Και αυτή η κατηγορία προβλημάτων αποδεικνύεται ότι μπορεί να χωρισθεί σε ένα μικρό αριθμό από κλάσεις με τα ίδια χαρακτηριστικά προσεγγισιμότητας.

1.4 Πιθανοτικά Ελέγξιμες Αποδείξεις

Η ιδέα των Πιθανοτικά Ελέγξιμων Αποδείξεων (Probabilistically Checkable Proofs, PCPs) αποτελεί εξέλιξη των Αλληλεπιδραστικών Αποδείξεων (Interactive Proofs, IPs), οι οποίες εισήχθησαν στα μέσα της δεκαετίας του 1980 από τους Goldwasser, Micali και Rackoff [69] και Babai [18] σαν πιθανοτικές επεκτάσεις της ιδέας του μη-ντετερμινισμού. Οι Αλληλεπιδραστικές Αποδείξεις βρήκαν πολλές εφαρμογές στην κρυπτογραφία και στη θεωρία πολυπλοκότητας. Ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα ήταν ότι η κλάση των γλωσσών που αναγνωρίζονται από τα συστήματα Αλληλεπιδραστικών Αποδείξεων ταυτίζεται με το $\mathcal{PSPACE}$ ($\mathcal{IP} = \mathcal{PSPACE}$) [110, 123]. Σε αυτή την απόδειξη χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά η ιδέα της αριθμητικής απεικόνισης και επεξεργασίας των λογικών προτάσεων (arithmetization), η οποία μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας τρόπος εύρωστης αναπαράστασης του υπολογισμού μιας μηχανής Turing. Η ιδέα της χρήσης πολυωνύμων προήλθε από την περιοχή του ελέγχου προγραμμάτων [25].

Στις [19, 45] παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά παραλλαγές των συστημάτων Αλληλεπιδραστικών Αποδείξεων για την κλάση $\mathcal{NP}$ (στην [19] ονομαζόταν ολογραφικές αποδείξεις – holographic proofs). Επιπλέον, στην [45] παρουσιάστηκε η πρώτη αναγωγή από τη διαδικασία πιθανοτικής επαλήθευσης μιας απόδειξης σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, αυτό της Μέγιστης Κλίκας (Maximum Clique), και αποδείχθηκε έτσι το πρώτο αποτέλεσμα μη-προσεγγισιμότητας. Συγκεκριμένα αποδείχθηκε ότι, αν το πρόβλημα της Μέγιστης Κλίκας προσεγγίζεται σε κάποιο σταθερό λόγο από έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου, τότε κάθε πρόβλημα στο $\mathcal{NP}$ αποφασίζεται σε ντετερμινιστικό χρόνο $n^{\mathcal{O}(\log\log n)}$.

Λίγο αργότερα, οι Arora και Safra [13] έδωσαν τον τυπικό ορισμό των Πιθανοτικά Ελέγξιμων Αποδείξεων και ένα νέο πιθανοτικό ορισμό του $\mathcal{NP}$, και οι Arora, Lund, Motwani, Sudan, και Szegedy [12] απέδειξαν το επονομαζόμενο Θεώρημα των $\mathcal{PCP}$, μια συνέπεια του οποίου είναι ότι, αν $\mathcal{P} \neq NP$, δεν υπάρχει ΣΠΠΧ για τα MAX-SNP-δύσκολα προβλήματα. Το Θεώρημα των $\mathcal{PCP}$ δηλώνει ότι η κλάση $\mathcal{NP}$ περιέχει αυτές ακριβώς τις γλώσσες, των οποίων οι αποδείξεις μπορούν να ελεγχθούν σε πολυωνυμικό χρόνο από έναν πιθανοτικό επαληθευτή (verifier), που χρησιμοποιεί λογαριθμικό αριθμό τυχαίων δυαδικών ψηφίων και διαβάζει μόνο σταθερό αριθμό δυαδικών ψηφίων από την απόδειξη.

Ένας *επαληθευτής* (verifier) V για μια γλώσσα L είναι μια πιθανοτική μηχανή Turing πολυωνυμικού χρόνου με πρόσβαση στην είσοδο x, σε μια συμβολοσειρά τυχαίων δυαδικών ψηφίων r, και σε μια απόδειξη π για το $x \in L$. Το αποτέλεσμα του υπολογισμού $V(x, r, \pi)$ ενός επαληθευτή είναι είτε ΑΠΟΔΟΧΗ είτε ΑΠΟΡΡΙΨΗ. Ένας επαληθευτής είναι $(r(n), q(n))$ περιορισμένος αν, για κάθε είσοδο x μήκους n, χρησιμοποιεί το πολύ $\hat{r}(n) = \mathcal{O}(r(n))$ τυχαία δυαδικά ψηφία, και διαβάζει το πολύ $\hat{q}(n) = \mathcal{O}(q(n))$ δυαδικά ψηφία από την απόδειξη.

Ορισμός 1.1 [13]. Μια γλώσσα L ανήκει στην κλάση $\mathcal{PCP}(r(n), q(n))$ ανν υπάρχει ένας $(r(n), q(n))$ περιορισμένος επαληθευτής V τέτοιος ώστε:

(a) Για κάθε $x \in L$, υπάρχει μια απόδειξη π_x για την οποία

$$\Pr_r[V(x, r, \pi_x) = \text{ΑΠΟΔΟΧΗ}] = 1 \ ,$$

(b) ενώ για κάθε $x \notin L$, κάθε απόδειξη π έχει

$$\Pr_r[V(x, r, \pi) = \text{ΑΠΟΔΟΧΗ}] \leq \frac{1}{4} \ .$$

Το Θεώρημα των $\mathcal{PCP}$ δηλώνει ότι $\mathcal{NP} = \mathcal{PCP}(\log n, 1)$. Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος κατασκευάζει έναν $(\log n, 1)$ περιορισμένο επαληθευτή για την 3-Ικανοποιησιμότητα (3-SAT). Αρχικά, η λογική πρόταση γράφεται σαν ένα πολυώνυμο πολλών μεταβλητών έτσι ώστε, η πρόταση να είναι ικανοποιήσιμη ανν το πολυώνυμο έχει συγκεκριμένες ιδιότητες. Για να ελεγχθούν οι συγκεκριμένες ιδιότητες, ο επαληθευτής θεωρεί ότι το πολυώνυμο αναπαρίσταται στην απόδειξη με τις τιμές του, δηλαδή η απόδειξη περιέχει τις τιμές του πολυωνύμου πρακτικά για κάθε διαφορετική τιμή των μεταβλητών εισόδου. Ο επαληθευτής χρησιμοποιεί πιθανοτικούς αλγορίθμους, οι οποίοι ελέγχουν αν ένα πολυώνυμο που αναπαρίσταται με τις τιμές του έχει συγκεκριμένες ιδιότητες. Οι σημαντικότεροι τέτοιοι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται είναι ο Έλεγχος Αθροίσματος (Sum Test) και ο Έλεγχος Μικρού Βαθμού (Low Degree Test). Μια άλλη σημαντική τεχνική είναι η σύνθεση επαληθευτών (verifier composition), κατά την οποία ένας αποδοτικότερος επαληθευτής προκύπτει από τον συνδυασμό δύο άλλων, οι οποίοι έχουν κατάλληλα επιλεγμένες παραμέτρους. Η σύνθεση επαληθευτών βασίζεται στις πιθανοτικά ελέγξιμες κωδικοποιήσεις και χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στις Πιθανοτικά Ελέγξιμες Αποδείξεις στην [13].

1.4.1 Συστήματα $\mathcal{PCP}$ και Μη-Προσεγγισιμότητα

Η σχέση των Πιθανοτικά Ελέγξιμων Αποδείξεων με τη μη-προσεγγισιμότητα προβλημάτων βελτιστοποίησης παρατηρήθηκε για πρώτη φορά στην [45]. Όπως αναφέρεται στην [8], αρχικά αυτή η σχέση θεωρήθηκε συμπτωματική, άποψη η οποία αναθεωρήθηκε μετά τα αποτελέσματα των [12, 111, 112], όπου αποδείχθηκε η μη-προσεγγισιμότητα των MAX-SNP-δύσκολων προβλημάτων, της Μέγιστης Κλίκας, της Ελάχιστης Κάλυψης Συνόλων, του Ελάχιστου Χρωματισμού, και του Μέγιστου Υπογραφήματος που ικανοποιεί μια κληρονομική (hereditary) γραφοθεωρητική ιδιότητα.

Στο Κεφάλαιο 10 του [82] παρατηρείται ότι, όπως η 3-Ικανοποιησιμότητα αποτέλεσε το βασικό πρόβλημα εκκίνησης (canonical problem) για την απόδειξη αποτελεσμάτων $\mathcal{NP}$-πληρότητας, με τον ίδιο τρόπο η Μέγιστη 3-Ικανοποιησιμότητα αποτελεί το βασικό πρόβλημα εκκίνησης για την απόδειξη αποτελεσμάτων μη-προσεγγισιμότητας. Η μη-προσεγγισιμότητα της Μέγιστης 3-Ικανοποιησιμότητας είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με το Θεώρημα των $\mathcal{PCP}$. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{PCP}(\log n, 1)$ ανν υπάρχει μια αναγωγή A από την Ικανοποιησιμότητα (SAT) στη Μέγιστη 3-Ικανοποιησιμότητα (MAX 3-SAT) τέτοια ώστε, για κάποια σταθερά $\epsilon > 0$ και για κάθε στιγμιότυπο I:

$$I \in \text{SAT} \Rightarrow \text{MAX 3-SAT}(A(I)) = 1 \ , \text{ και}$$

$$I \notin \text{SAT} \Rightarrow \text{MAX 3-SAT}(A(I)) = \frac{1}{1+\epsilon} \ ,$$

όπου MAX 3-SAT$(A(I))$ είναι το μέγιστο κλάσμα των όρων της λογικής πρότασης $A(I)$ που μπορούν να ικανοποιηθούν ταυτόχρονα.

Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι μια τέτοια αναγωγή A υπάρχει. Τότε κάθε γλώσσα $L \in \mathcal{NP}$ έχει έναν επαληθευτή που αρχικά ανάγει κάθε είσοδο x σε ένα στιγμιότυπο I του προβλήματος της Ικανοποιησιμότητας, και εν συνεχεία σε ένα στιγμιότυπο $A(I)$ του προβλήματος της Μέγιστης 3-Ικανοποιησιμότητας. Ο επαληθευτής θεωρεί ότι η απόδειξη π περιέχει την βέλτιστη ανάθεση αλήθειας για το στιγμιότυπο $A(I)$. Στη συνέχεια, ο επαληθευτής διαλέγει έναν όρο του $A(I)$ με ομοιόμορφα τυχαίο τρόπο (δηλ. χρησιμοποιεί μόνο $\mathcal{O}(\log|x|)$ τυχαία δυαδικά ψηφία), διαβάζει τις τιμές των μεταβλητών αυτού του όρου από την απόδειξη (δηλ. διαβάζει μόνο 3 δυαδικά ψηφία από την απόδειξη), και αποδέχεται ότι το $x \in L$ ανν αυτές οι τιμές επαληθεύουν τον συγκεκριμένο όρο. Προφανώς, αν $x \in L$, τότε υπάρχει μια ανάθεση αλήθειας που ικανοποιεί όλους τους όρους του $A(I)$, και επομένως ο επαληθευτής αποδέχεται ότι $x \in L$ με πιθανότητα 1. Διαφορετικά, αν $x \notin L$, καμία ανάθεση αλήθειας δεν μπορεί να κάνει τον επαληθευτεί να αποδεκτεί το x με πιθανότητα μεγαλύτερη του $\frac{1}{1+\epsilon}$. Συνεπώς, $L \in \mathcal{PCP}(\log n, 1)$. Μια διαίσθηση για την απόδειξη του αντιστρόφου δίνει η απόδειξη του Λήμματος 6.4, όπου ο υπολογισμός που εκτελείται από τον επαληθευτή κωδικοποιείται σε μία λογική πρόταση. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς ότι, ανάλογα με το αν η είσοδος x ανήκει στη γλώσσα L, είτε όλοι οι όροι αυτής της πρότασης μπορούν να ικανοποιηθούν ταυτόχρονα, είτε ένα πολύ μικρό ποσοστό από αυτούς μπορούν να ικανοποιηθούν ταυτόχρονα.

Χρησιμοποιώντας αυτή τη βασική ιδέα και κατασκευάζοντας όλο και πιο αποδοτικά συστήματα Πιθανοτικά Ελέγξιμων Αποδείξεων, έχουν αποδειχθεί πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα μη-προσεγγισιμότητας. Για παράδειγμα ο Hastad κατασκεύασε βέλτιστα συστήματα Πιθανοτικά Ελέγξιμων Αποδείξεων για το $\mathcal{NP}$ αποδεικνύοντας ότι είναι $\mathcal{NP}$-δύσκολη η προσέγγιση της Μέγιστης 3-Ικανοποιησιμότητας σε λόγο $7/8-\epsilon$, για κάθε σταθερά $\epsilon > 0$ [80], και της Μέγιστης Κλίκας σε λόγο $n^{1-\epsilon}$, για κάθε σταθερά $\epsilon > 0$ [79]. Επίσης, έχει αποδειχθεί ότι είναι $\mathcal{NP}$-δύσκολη η προσέγγιση του Ελάχιστου Χρωματικού Αριθμού σε λόγο $n^{1-\epsilon}$, για κάθε σταθερά $\epsilon > 0$ [47], και της Ελάχιστης Κάλυψης Συνόλων σε λόγο $(1-\epsilon)\ln n$, για κάθε σταθερά $\epsilon > 0$ [43]. Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα μη-προσεγγισιμότητας είναι ακριβή (tight), με την έννοια ότι υπάρχουν αλγόριθμοι πολυωνυμικού χρόνου που επιτυγχάνουν τους παραπάνω λόγους προσέγγισης για $\epsilon = 0$.

1.4.2 Άλλες Εφαρμογές του Θεωρήματος των $\mathcal{PCP}$

Μία πολύ ενδιαφέρουσα εφαρμογή του Θεωρήματος των $\mathcal{PCP}$ παρατηρήθηκε για πρώτη φορά στην [19], και οφείλεται στο γεγονός ότι, για τις περισσότερες γνωστές μαθηματικές θεωρίες που βασίζονται σε συστήματα αξιωμάτων, η παρακάτω γλώσσα ανήκει στην κλάση $\mathcal{NP}$, και επομένως έχει έναν $(\log n, 1)$ περιορισμένο επαληθευτή.

$$\{< T, 1^n >: \text{Το } T \text{ είναι ένα θεώρημα με απόδειξη μήκους } \leq n\}$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η απόδειξη κάθε θεωρήματος T μπορεί να ξαναγραφεί, μεγαλώνοντας κατά έναν πολυωνυμικό παράγοντα, ώστε η ορθότητά της να μπορεί να ελεγχθεί με την ανάγνωση μόνο ενός σταθερού αριθμού από δυαδικά ψηφία. Το αξιοσημείωτο είναι ότι ο αριθμός των δυαδικών ψηφίων που χρειάζεται να ελεγχθούν δεν εξαρτάται από το μήκος της απόδειξης.

Ολοκληρώνοντας τη σύντομη εισαγωγή στην περιοχή των αλγορίθμων προσέγγισης υπολογιστικά δύσκολων προβλημάτων, αξίζει να σημειωθεί ότι πρόκειται για μια περιοχή που εντάσσεται στο ευρύτερο πλαίσιο της θεμελιώδους, θεωρητικής έρευνας, της οποίας τα αποτελέσματα αναμένεται να έχουν μακροπρόθεσμες επιπτώσεις. Όπως παρατηρείται στο [32], συχνά τα αποτελέσματα της θεμελιώδους έρευνας βρίσκονται στη βάση εξελίξεων που μεταμορφώνουν την Επιστήμη των Υπολογιστών. Αποτελέσματα από την περιοχή των αλγορίθμων προσέγγισης υπήρξαν αφορμή τέτοιων εξελίξεων αρκετές φορές στα τελευταία χρόνια. Πολλές φορές αυτά τα αποτελέσματα προκύπτουν με απρόβλεπτο τρόπο από φαινομενικά μη συσχετιζόμενη ερευνητική δραστηριότητα σε διαφορετικά θεμελιώδη προβλήματα (π.χ. Θεώρημα των $\mathcal{PCP}$ [12]). Επιπλέον, οι πρόσφατες επιτυχίες σαφώς υποδηλώνουν ότι πολλά σημαντικά αποτελέσματα αναμένεται να προκύψουν στην περιοχή των αλγορίθμων προσέγγισης στο άμεσο μέλλον.

1.5 Επισκόπηση και Αποτελέσματα

Η οπτική γωνία και οι βασικές τεχνικές αυτής της διατριβής εντάσσονται στην περιοχή των αλγορίθμων προσέγγισης υπολογιστικά δύσκολων προβλημάτων. Τα αποτελέσματα αυτής της διατριβής αφορούν στο σχεδιασμό και την ανάλυση τέτοιων αλγορίθμων, στην πολυπλοκότητα προσέγγισης κάποιων προβλημάτων, ακόμα και στην πολυπλοκότητα ολόκληρης της κλάσης $\mathcal{NP}$.

Η θεματολογία και οι επιμέρους τεχνικές χωρίζουν αυτή τη διατριβή σε τρία μέρη. Το πρώτο μέρος (Κεφάλαια 2 και 3) αφορά στη μελέτη της προσεγγισιμότητας γραφοθεωρητικών προβλημάτων. Συγκεκριμένα, το Κεφάλαιο 2 εστιάζει στην προσεγγισιμότητα κάποιων ειδικών περιπτώσεων του Προβλήματος του Περιοδεύοντος Πωλητή (TSP). Στο Κεφάλαιο 3 μελετώνται τα γραφοθεωρητικά προβλήματα του ραδιο-χρωματισμού και της ραδιο-αρίθμησης, που ανακύπτουν στην περιοχή της Ανάθεσης Συχνοτήτων. Μερικά ενδιαφέροντα αποτελέσματα αποδεικνύονται με την εφαρμογή των αλγορίθμων για το TSP στο πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης.

Στο δεύτερο μέρος (Κεφάλαια 4 και 5), ορίζονται και μελετώνται δύο νέα προβλήματα βελτιστοποίησης, στα οποία οι περιορισμοί αφορούν στην ελάχιστη πιθανότητα ανοχής των αποδεκτών λύσεων σε τυχαία σφάλματα. Στο Κεφάλαιο 4, ορίζονται δύο παραλλαγές του προβλήματος της Μέγιστης Αξιόπιστης Διαμέρισης και παρουσιάζονται πολυωνυμικοί αλγόριθμοι προσέγγισης για αυτό. Ο ορισμός αυτού του προβλήματος προέκυψε από τη μελέτη της προσεγγισιμότητας του προβλήματος της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης. Στο Κεφάλαιο 5, δίνονται πολυωνυμικοί αλγόριθμοι προσέγγισης για την Αξιόπιστη Συμφόρηση, οι οποίοι βασίζονται στους αλγορίθμους για την Αξιόπιστη Διαμέριση.

Το τρίτο μέρος (Κεφάλαιο 6) αφορά στη χρήση τυχαίων περιπάτων σε γραφήματα-επεκτατές για επαναχρησιμοποίηση τυχαίων δυαδικών ψηφίων σε πιθανοτικούς αλγορίθμους. Συγκεκριμένα, διατυπώνονται γενικές επαρκείς συνθήκες για τη μείωση της τυχαιότητας σε πιθανοτικά συστήματα απλής κατεύθυνσης λάθους. Αυτές οι συνθήκες βασίζονται στην καινούργια ιδέα των συνόλων επιτυχίας υπό συνθήκη, ενώ αποδεικνύεται μια ενδιαφέρουσα σχέση της αποτελεσματικότητας αυτών των τεχνικών με την πολυπλοκότητα της κλάσης $\mathcal{NP}$.

1.5.1 Γραφοθεωρητικά Προβλήματα

Αποτελέσματα για το Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή

Το Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή (Travelling Salesman Problem, TSP) είναι, δεδομένου ενός συνόλου κόμβων και των αποστάσεων μεταξύ τους, να βρεθεί μια περιοδεία ελαχίστου μήκους. Στο Κεφάλαιο 2 επικεντρώνουμε στη μελέτη του TSP σε Γραφήματα (Graph TSP, G-TSP) και του TSP(1,2). Και στις δύο περιπτώσεις οι κόμβοι αντιστοιχούν στις κορυφές ενός γραφήματος. Στο G-TSP, η απόσταση μεταξύ δύο σημείων δίνεται από το μήκος του συντομότερου μονοπατιού, ενώ στο TSP(1,2), τα γειτονικά σημεία βρίσκονται σε απόσταση 1 μεταξύ τους, ενώ τα μη γειτονικά σημεία βρίσκονται σε απόσταση 2.

Τα σημαντικότερα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 2 (επίσης βλ. [54]) αφορούν στην επίδραση διαφόρων γραφοθεωρητικών παραμέτρων, όπως ο μεγάλος ελάχιστος βαθμός, η μικρή διάμετρος, το μικρό Μέγιστο Σύνολο Ανεξαρτησίας, στην προσεγγισιμότητα των G-TSP και TSP(1,2). Αρχικά αποδεικνύουμε ότι η προσέγγιση των πυκνών στιγμιοτύπων (δηλ. στιγμιοτύπων με γραμμικό ελάχιστο βαθμό) των G-TSP και TSP(1,2) είναι ουσιαστικά τόσο δύσκολη όσο η προσέγγιση του TSP(1,2) στη γενική περίπτωση.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τον πρώτο $\mathcal{NC}$ αλγόριθμο που επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης 3/2 για το TSP(1,2). Ο αλγόριθμος του Christofides [30] επίσης επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης 3/2 για το TSP(1,2) σε παράλληλο πολυλογαριθμικό χρόνο, αλλά ανήκει στην κλάση $\mathcal{RNC}$, χωρίς να είναι γνωστό αν ανήκει στην κλάση $\mathcal{NC}$. Η ανάλυση αυτού του αλγορίθμου βασίζεται στη σχέση που έχουν οι τοπικά βέλτιστες TSP(1,2) περιοδείες με το μέγεθος του Μέγιστου Συνόλου Ανεξαρτησίας $\alpha(G)$ του γραφήματος εισόδου $G(V,E)$, και στο γεγονός ότι Μεγαλύτερα Ταιριάσματα (Maximal Matchings) μπορούν να υπολογιστούν στο $\mathcal{NC}$. Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε ότι, για κάθε γράφημα εισόδου $G(V,E)$, μπορούμε να υπολογίσουμε στο $\mathcal{NC}$ μια TSP(1,2) περιοδεία με μήκος όχι μεγαλύτερο από $|V| + \alpha(G)$.

Κατόπιν, αποδεικνύουμε ότι, δεδομένης μιας διαμέρισης ενός γραφήματος σε κ κλίκες (πλήρη υπογραφήματα), τα TSP(1,2) και G-TSP μπορούν να επιλυθούν με βέλτιστο τρόπο σε χρόνο $n^{\mathcal{O}(\kappa^2)}$. Η ανάλυση του αλγορίθμου βασίζεται σε ένα τεχνικό λήμμα ιδιαίτερου ενδιαφέροντος που δηλώνει ότι, για κάθε Hamiltonian γράφημα και διαμέριση σε κ κλίκες, υπάρχει ένας κύκλος Hamilton που χρησιμοποιεί το πολύ $\kappa(\kappa-1)$ ακμές μεταξύ των κλικών. Επιπλέον, δείχνουμε ότι αυτό το φράγμα μπορεί να βελτιωθεί σε $2(\kappa - 1)$ για μια συγκεκριμένη κλάση γραφημάτων, με αποτέλεσμα η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου να βελτιώνεται σε $n^{\mathcal{O}(\kappa)}$ για την κλάση αυτή.

Τέλος, επεκτείνουμε την ανάλυση του 7/6-προσεγγιστικού αλγορίθμου των Papadimitriou και Yannakakis [117] για το TSP(1,2), και αποδεικνύουμε ότι το G-TSP μπορεί να προσεγγισθεί σε λόγο 22/15 για γραφήματα με διάμετρο 3.

Αποτελέσματα για Προβλήματα Ανάθεσης Συχνοτήτων

Το πρόβλημα του ραδιο-χρωματισμού (radio coloring) είναι, δεδομένου ενός γραφήματος $G(V,E)$, να υπολογιστεί μια ανάθεση καναλιών (ακεραίων αριθμών) στις κορυφές, ώστε όλες οι γειτονικές κορυφές να έχουν κανάλια σε απόσταση τουλάχιστον 2, και όλες οι κορυφές σε (γραφοθεωρητική) απόσταση 2 να έχουν διαφορετικά κανάλια. Το ζητούμενο είναι η ελαχιστοποίηση του μέγιστου αριθμού καναλιού που έχει ανατεθεί σε κάποια κορυφή. Το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης (radio labelling) είναι, δεδομένου ενός γραφήματος $G(V,E)$, να υπολογιστεί μια ανάθεση καναλιών στις κορυφές, ώστε όλες οι κορυφές να έχουν διαφορετικά κανάλια, και οι γειτονικές κορυφές να έχουν κανάλια σε απόσταση τουλάχιστον 2. Και σε αυτό το πρόβλημα, ο στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί το μέγιστο κανάλι που έχει ανατεθεί σε κάποια κορυφή του γραφήματος. Τα προβλήματα του ραδιο-χρωματισμού και της ραδιο-αρίθμησης, που ανακύπτουν στην περιοχή της Ανάθεσης Συχνοτήτων σε Ραδιοφωνικά Δίκτυα, μελετώνται στο Κεφάλαιο 3 (επίσης βλ. [51, 55, 56]).

Κατ' αρχήν αποδεικνύουμε ότι αυτά τα προβλήματα παραμένουν $\mathcal{NP}$-πλήρη ακόμη και για γραφήματα με διάμετρο 2. Επίσης δείχνουμε ότι κάθε α-προσεγγιστικός αλγόριθμος για τον Ελάχιστο Χρωματισμό τετραγώνων γραφημάτων (δηλ. G^2) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή ενός 2α-προσεγγιστικού αλγορίθμου για το πρόβλημα του ραδιο-χρωματισμού.

Για το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης αποδεικνύουμε ότι είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα του υπολογισμού ενός Ελάχιστου Μήκους Γενετικού Μονοπατιού (Hamiltonian Path, HP) σε ένα πλήρες γράφημα με ακμές μήκους 1 ή 2, HP(1,2). Είναι φανερό ότι το HP(1,2) είναι παρόμοιο με το TSP(1,2), και επομένως οι αλγόριθμοι του Κεφαλαίου 2 μπορούν να εφαρμοστούν στη ραδιο-αρίθμηση. Με αυτό τον τρόπο αποδεικνύουμε ότι η ραδιο-αρίθμηση μπορεί να επιλυθεί με βέλτιστο τρόπο σε πολυωνυμικό χρόνο για επίπεδα γραφήματα (planar graphs). Επίσης, παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας 3/2-προσεγγιστικός $\mathcal{NC}$ αλγόριθμος για τη ραδιο-αρίθμηση, και ότι, για κάθε γράφημα εισόδου $G(V,E)$, μπορεί να υπολογιστεί στο $\mathcal{NC}$ μια έγκυρη ραδιο-αρίθμηση με κόστος το πολύ $|V| + \omega(G) - 1 \leq |V| + \chi(G) - 1$, χωρίς καμία γνώση για το μέγεθος της Μέγιστης Κλίκας $\omega(G)$, ή το χρωματικό αριθμό $\chi(G)$.

Για το πρόβλημα της on-line ραδιο-αρίθμησης, αποδεικνύουμε ότι ο αλγόριθμος απληστίας (greedy) είναι 2-ανταγωνιστικός, και δείχνουμε ένα κάτω φράγμα 3/2 στον λόγο ανταγωνιστικότητας ενός on-line αλγορίθμου εναντίον του πλέον αδύναμου αντιπάλου (adversary).

1.5.2 Βελτιστοποίηση με Περιορισμούς Αξιοπιστίας

Αλγόριθμοι για τη Μέγιστη Αξιόπιστη Διαμέριση

Η είσοδος στο πρόβλημα της Μέγιστης Αξιόπιστης Διαμέρισης (Maximum Fault-Tolerant Partition) αποτελείται από ένα σύνολο παράλληλων, ελαττωματικών καναλιών επικοινωνίας $M = \{(f_1, v_1), \dots, (f_m, v_m)\}$, όπου κάθε κανάλι i έχει χωρητικότητα v_i, και τίθεται εκτός λειτουργίας ανεξάρτητα με πιθανότητα f_i, και έναν περιορισμό αξιοπιστίας $(1-\epsilon)$. Αποδεκτή λύση είναι κάθε συλλογή $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_\kappa\}$ από ξένα υποσύνολα του M, ώστε η πιθανότητα τουλάχιστον ένα κανάλι να είναι λειτουργικό σε κάθε M_j να μην είναι μικρότερη από $(1-\epsilon)$. Η ενεργός χωρητικότητα $V(M_j)$ κάθε υποσυνόλου M_j καθορίζεται από την χωρητικότητα του ασθενέστερου καναλιού του M_j, δηλαδή $V(M_j) = \min_{i \in M_j}\{v_i\}$. Το κριτήριο βελτιστοποίησης στην Αξιόπιστη Διαμέριση είναι η μεγιστοποίηση της συνολικής ενεργής χωρητικότητας του $\mathcal{M}$, $V(\mathcal{M}) = \sum_{j=1}^{\kappa} V(M_j)$.

Η επιλογή του κριτηρίου βελτιστοποίησης οδηγεί στη διάκριση δύο παραλλαγών του προβλήματος. Στην πρώτη παραλλαγή, όλα τα κανάλια του M έχουν την ίδια χωρητικότητα, και στόχος είναι η μεγιστοποίηση του αριθμού των υποσυνόλων κ από τα οποία αποτελείται η διαμέριση $\mathcal{M}$. Στη δεύτερη παραλλαγή, οι χωρητικότητες των καναλιών μπορούν να είναι οποιοιδήποτε ακέραιοι αριθμοί, και στόχος είναι η μεγιστοποίηση του αθροίσματος των ελαχίστων χωρητικοτήτων των υποσυνόλων. Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν έχουμε υπόψη μας καμία ερευνητική εργασία στην οποία αυτό το πρόβλημα ορίζεται και μελετάται από την οπτική γωνία των αλγορίθμων προσέγγισης.

Στο Κεφάλαιο 4 (επίσης βλ. [57, 58]) αποδεικνύουμε ότι το πρόβλημα της Μέγιστης Αξιόπιστης Διαμέρισης είναι $\mathcal{NP}$-πλήρες ακόμα και για ίδιες χωρητικότητες. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε έναν 2-προσεγγιστικό αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για την Αξιόπιστη Διαμέριση καναλιών ίδιων χωρητικοτήτων.

Για την παραλλαγή με κανάλια διαφορετικών χωρητικοτήτων παρουσιάζουμε έναν απλό $2\left\lceil \frac{\ln(|M|/\epsilon)}{\ln(1/f_{\max})} \right\rceil$-προσεγγιστικό αλγόριθμο, $f_{\max} = \max_{i \in M}\{f_i\}$, και, για κάθε σταθερά $\delta > 0$, έναν $(8+\delta)$-προσεγγιστικό αλγόριθμο, ο οποίος έχει χρόνο εκτέλεσης πολυωνυμικό τόσο στο μέγεθος της εισόδου όσο και στην παράμετρο $1/\delta$.

Αποτελέσματα για την Ελάχιστη Αξιόπιστη Συμφόρηση

Στο πρόβλημα της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης (Minimum Fault-Tolerant Congestion), η είσοδος αποτελείται από ένα σύνολο παράλληλων, ελαττωματικών καναλιών επικοινωνίας $M = \{(f_1, v_1), \dots, (f_m, v_m)\}$, ένα σύνολο από μηνύματα $J = \{s_1, \dots, s_n\}$ που πρέπει να μεταδοθούν μέσω του M, και έναν περιορισμό αξιοπιστίας $(1-\epsilon)$. Κάθε κανάλι $i \in M$ έχει χωρητικότητα v_i, και τίθεται εκτός λειτουργίας ανεξάρτητα με πιθανότητα f_i. Όταν ένα κανάλι τεθεί εκτός λειτουργίας δεν μεταδίδει κανένα μήνυμα στον κόμβο προορισμού. Κάθε μήνυμα $j \in J$ έχει μέγεθος s_j, και όταν ανατεθεί σε κάποιο κανάλι $i \in M$ χωρητικότητας v_i προκαλεί φόρτο s_j/v_i.

Το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός μίας πλεονάζουσας ανάθεσης $\phi : J \mapsto 2^M$, η οποία, με πιθανότητα τουλάχιστον $(1-\epsilon)$, αναθέτει κάθε μήνυμα σε τουλάχιστον ένα λειτουργικό κανάλι, και ελαχιστοποιεί την συμφόρηση των καναλιών $\mathsf{Cong}(\phi)$, δηλαδή το μέγιστο φόρτο που η ϕ αναθέτει σε κάποιο κανάλι. Όπως και στην περίπτωση της Αξιόπιστης Διαμέρισης, διακρίνουμε τις περιπτώσεις των καναλιών με ίδια χωρητικότητα, και των καναλιών με διαφορετικές χωρητικότητες.

Το πρόβλημα της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης μελετάται στο Κεφάλαιο 5 (επίσης βλ. [57, 58]). Όσο έχουμε υπόψη μας, παρόμοια προβλήματα δεν έχουν οριστεί και μελετηθεί από την οπτική γωνία των αλγορίθμων προσέγγισης.

Το πρόβλημα της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης είναι προφανώς $\mathcal{NP}$-δύσκολο, αφού το πρόβλημα της δρομολόγησης σε όμοιες παράλληλες μηχανές με στόχο την ελαχιστοποίηση του μέγιστου φόρτου (scheduling on identical machines to minimize makespan) είναι $\mathcal{NP}$-πλήρες. Όμως, ο έλεγχος αποδοχής μιας υποψήφιας λύσης ϕ, δηλαδή η επιβεβαίωση ότι η αξιοπιστία της ϕ είναι τουλάχιστον $(1-\epsilon)$, προϋποθέτει τον υπολογισμό μιας $\#\mathcal{P}$-πλήρους συνάρτησης. Επομένως, το πρόβλημα της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης δεν φαίνεται να ανήκει στην κλάση $\mathcal{NP}$. Προσπαθώντας να καθορίσουμε την πολυπλοκότητα της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης, ορίζουμε μια κλάση πολυπλοκότητας που περιέχει αυτό το πρόβλημα, και αποδεικνύουμε ότι αυτή η κλάση περιέχει ολόκληρη την Πολυωνυμική Ιεραρχία $\mathcal{PH}$.

Οι αλγόριθμοι για το πρόβλημα της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης βασίζονται στον υπολογισμό μιας προσεγγιστικής Αξιόπιστης Διαμέρισης $\mathcal{M}$ για το σύνολο των καναλιών M, και στη χρήση ενός κατάλληλου αλγορίθμου για τη δρομολόγηση των μηνυμάτων του J στα αξιόπιστα ενεργά κανάλια του $\mathcal{M}$.

Για την περίπτωση των καναλιών ίδιων χωρητικοτήτων, αποδεικνύουμε ότι σχεδόν βέλτιστες πλεονάζουσες αναθέσεις μπορούν να κατασκευαστούν από μια βέλτιστη Αξιόπιστη Διαμέριση του M. Η απόδειξη βασίζεται σε ένα τεχνικό λήμμα ιδιαίτερου ενδιαφέροντος, το οποίο φράσσει άνω την αξιοπιστία κάθε πλεονάζουσας ανάθεσης. Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνουμε την προσέγγιση της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης σε λόγο 4 για κανάλια ίδιων χωρητικοτήτων και μηνύματα οποιουδήποτε μεγέθους.

Για την περίπτωση των καναλιών διαφορετικών χωρητικοτήτων, εστιάζουμε σε μηνύματα μοναδιαίου μεγέθους, και παρουσιάζουμε έναν $2\left\lceil \frac{\ln(|M|/\epsilon)}{\ln(1/f_{\max})} \right\rceil$-προσεγγιστικό αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου.

1.5.3 Επαρκείς Συνθήκες για Μείωση Τυχαιότητας

Είναι γνωστό ότι κάθε τυχαίος περίπατος σε ένα γράφημα-επεκτατή $G(V,E)$ (expander graph) έχει την ιδιότητα να αποφεύγει κάθε συγκεκριμένο υποσύνολο κορυφών $C \subset V$, $|C| < |V|/2$, με μεγάλη πιθανότητα. Αυτή η ιδιότητα αποδείχθηκε για πρώτη φορά στην [1], όπου χρησιμοποιήθηκε για την εξάλειψη της τυχαιότητας σε αλγορίθμους της κλάσης $\mathcal{LOGSPACE}$. Από τότε αυτή η τεχνική χρησιμοποιήθηκε ευρέως (π.χ. [31, 87, 20, 113]) για τη μείωση της πιθανότητας λάθους πιθανοτικών συστημάτων, χωρίς μεγάλη αύξηση της πολυπλοκότητας τυχαίων δυαδικών ψηφίων.

Στο Κεφάλαιο 6 (επίσης βλ. [52, 53]) χρησιμοποιείται αυτή η ιδιότητα των τυχαίων περιπάτων σε γραφήματα-επεκτατές για τη διατύπωση γενικών επαρκών συνθηκών για μείωση της τυχαιότητας σε πιθανοτικά συστήματα απλής κατεύθυνσης λάθους (one-side error probabilistic systems). Η βασική ιδέα είναι να χρησιμοποιηθούν γραφήματα-επεκτατές μικρού σχετικά μεγέθους (υπο-εκθετικού στην πολυπλοκότητα τυχαίων δυαδικών ψηφίων), ώστε ταυτόχρονα να μειωθεί η πολυπλοκότητα τυχαίων δυαδικών ψηφίων του αλγορίθμου και να αποφευχθούν συγκεκριμένα υποσύνολα από "παραπλανητικές" συμβολοσειρές (misleading strings).

Αρχικά αποδεικνύουμε ότι για ένα σύνολο S συμβολοσειρών μήκους r (δηλ. $|S| = 2^r$), μπορούμε να αποφύγουμε κάθε υποσύνολο του S που μπορεί να εκφραστεί σαν συνδυαστικό ορθογώνιο διάστασης α, χρησιμοποιώντας μόνο $\frac{r}{\alpha} + \mathcal{O}(\alpha)$ τυχαία δυαδικά ψηφία. Επίσης, καταλήγουμε σε μια απλή δομική περιγραφή των αλγορίθμων, των οποίων η πολυπλοκότητα τυχαίων δυαδικών ψηφίων μπορεί να μειωθεί χρησιμοποιώντας αυτή την τεχνική.

Αν A είναι ένας πιθανοτικός αλγόριθμος απλής κατεύθυνσης λάθους, και C ένα σύνολο "παραπλανητικών" συμβολοσειρών για τον A, είναι φυσιολογικό να υπάρχει ένα υποσύνολο $C_1 \subseteq C$, το οποίο μπορεί να εκφραστεί σαν συνδυαστικό ορθογώνιο σε μια κατάλληλη διάσταση. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τεχνική των τυχαίων περιπάτων σε γραφήματα-επεκτατές με υπο-εκθετικό μέγεθος για να αποφύγουμε το C_1 χρησιμοποιώντας λιγότερα τυχαία δυαδικά ψηφία από τον A. Η ιδέα των συνόλων επιτυχίας υπό συνθήκη έχει να κάνει με το γεγονός ότι η δημιουργία ενός $s \notin C$, δεδομένου ενός $s_1 \notin C_1$, δεν μπορεί να είναι δυσκολότερη από τη δημιουργία ενός $s \notin C$, χωρίς καμία πληροφορία. Στη συνέχεια, η έννοια των συνόλων επιτυχίας υπο συνθήκη χρησιμοποιείται για την διατύπωση γενικών επαρκών συνθηκών για τη μείωση της τυχαιότητας σε πιθανοτικούς αλγορίθμους απλής κατεύθυνσης λάθους.

Οι τεχνική των τυχαίων περιπάτων σε γραφήματα-επεκτατές με υπο-εκθετικό μέγεθος εφαρμόστηκε για πρώτη φορά στην [52] για να αποδειχθεί ότι, υπό συγκεκριμένες συνθήκες, αν η κλάση $\mathcal{NP}$ περιέχεται στην $\mathcal{PCP}(\mathrm{poly}(\mathrm{loglog}\, n), \mathrm{poly}(\mathrm{loglog}\, n))$, τότε $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{DTIME}(n^{\mathrm{poly}(\mathrm{loglog}\, n)})$. Εδώ, δίνουμε μια απλούστερη απόδειξη για τη γενικότερη πρόταση ότι, αν η κλάση $\mathcal{NP}$ περιέχεται στην $\mathcal{PCP}(\mathrm{o}(\log n), \mathrm{o}(\log n))$, τότε $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. Επίσης, εφαρμόζουμε την ιδέα των συνόλων επιτυχίας υπό συνθήκη σε συστήματα Πιθανοτικά Ελέγξιμων Αποδείξεων συνδέοντας την πολυπλοκότητα ντετερμινιστικού χρόνου της κλάσης $\mathcal{NP}$ με τις παραμέτρους αποτελεσματικότητας των παραπάνω τεχνικών για μείωση τυχαιότητας.

Κεφάλαιο 2

Το Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή

Το Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή (Travelling Salesman Problem, TSP) είναι, δεδομένου ενός συνόλου κόμβων και των αποστάσεών τους, να βρεθεί μια περιοδεία (δηλ. ένας κύκλος που διέρχεται από κάθε κόμβο ακριβώς μία φορά) ελαχίστου μήκους. Το TSP είναι ένα θεμελιώδες πρόβλημα στην περιοχή της συνδυαστικής βελτιστοποίησης με πολλές πρακτικές εφαρμογές. Ακόμα και πολύ περιορισμένες ειδικές περιπτώσεις αυτού του προβλήματος παραμένουν $\mathcal{NP}$-πλήρεις και έχουν γίνει αντικείμενο σημαντικής ερευνητικής δραστηριότητας τα τελευταία τριάντα χρόνια.

Σε αυτό το κεφάλαιο, επικεντρώνουμε σε δύο ειδικές περιπτώσεις του TSP, το TSP σε Γραφήματα (Graph TSP, G-TSP), και το TSP όπου όλες οι αποστάσεις είναι 1 ή 2, TSP(1,2), οι οποίες παραμένουν $\mathcal{NP}$-πλήρεις. Βασικός στόχος είναι να μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο ορισμένες γραφοθεωρητικές ιδιότητες επηρεάζουν την προσεγγισιμότητα και γενικότερα την πολυπλοκότητα αυτών των ειδικών περιπτώσεων του TSP. Ο πρωταρχικός λόγος για τον οποίο υιοθετήσαμε αυτή την οπτική γωνία ήταν οι πρόσφατες επιτυχίες στην προσέγγιση ορισμένων πολύ δύσκολων γραφοθεωρητικών προβλημάτων βελτιστοποίησης σε πυκνά γραφήματα (βλ. [96] για μια επισκόπηση).

Αρχικά αποδεικνύουμε ότι ο περιορισμός σε πυκνά γραφήματα δεν βοηθάει ουσιαστικά στην προσέγγιση των G-TSP και TSP(1,2). Από την άλλη πλευρά, αποδεικνύουμε ότι το μέγεθος του Μέγιστου Συνόλου Ανεξαρτησίας παίζει σημαντικό ρόλο στην προσεγγισιμότητα του TSP(1,2), και περιγράφουμε έναν $\mathcal{NC}$ αλγόριθμο που εκμεταλλεύεται αυτή την παράμετρο. Επίσης δείχνουμε ότι, αν είναι γνωστή μια διαμέριση των κορυφών του γραφήματος εισόδου σε σταθερό αριθμό από κλίκες, τα G-TSP και TSP(1,2) μπορούν να επιλυθούν με βέλτιστο τρόπο σε πολυωνυμικό χρόνο. Τέλος, αποδεικνύουμε ότι, αν η διάμετρος του γραφήματος εισόδου είναι 3, τότε το G-TSP μπορεί να προσεγγισθεί σε λόγο 22/15 σε πολυωνυμικό χρόνο. Όλα τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά στην εργασία [54].

Ένα κριτήριο για την επιλογή των συγκεκριμένων γραφοθεωρητικών ιδιοτήτων ήταν οι εφαρμογές του TSP(1,2) σε προβλήματα Ανάθεσης Μη-Επαναχρησιμοποιήσιμων Συχνοτήτων σε Ραδιοφωνικά Δίκτυα (Non-Reusable Frequency Assignment in Radio Networks). Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, για μια συγκεκριμένη κατηγορία τέτοιων προβλημάτων, πολύ σημαντικές κατηγορίες στιγμιοτύπων αντιστοιχούν σε στιγμιότυπα του TSP(1,2) που έχουν μικρό Μέγιστο Σύνολο Ανεξαρτησίας ή/και μπορούν εύκολα να διαμεριστούν σε μικρό σταθερό αριθμό από κλίκες.

2.1 Εισαγωγή

Το Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή (Travelling Salesman Problem, TSP) είναι ένα θεμελιώδες πρόβλημα στην περιοχή της συνδυαστικής βελτιστοποίησης (combinatorial optimization) και όλες οι σημαντικές τεχνικές σχεδιασμού και ανάλυσης αλγορίθμων έχουν δοκιμαστεί σε αυτό τις τελευταίες δεκαετίες [105]. Ένα στιγμιότυπο του TSP αποτελείται από ένα σύνολο κόμβων και μια απόσταση d_{ij} για κάθε ζευγάρι κόμβων $\{i, j\}$. Ο αντικειμενικός στόχος (objective) είναι η εύρεση μιας περιοδείας (tour), δηλαδή ενός κύκλου που περνάει από κάθε κόμβο ακριβώς μία φορά, ελαχίστου μήκους.

Έχει αποδειχθεί ότι το TSP παραμένει $\mathcal{NP}$-πλήρες ακόμα και για πολύ ειδικές περιπτώσεις. Όσον αφορά στην προσεγγισιμότητα, είναι γνωστό ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που να επιτυγχάνει οποιοδήποτε σταθερό λόγο προσέγγισης για τη γενική περίπτωση του TSP, εκτός αν $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ [121]. Από την άλλη πλευρά, για την περίπτωση του Δ-TSP, όπου οι αποστάσεις ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα, ο αλγόριθμος του Christofides [30] επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης 3/2 σε πολυωνυμικό χρόνο.

Σε αυτό το κεφάλαιο επικεντρώνουμε στη μελέτη δύο ειδικών περιπτώσεων του Δ-TSP, του TSP σε Γραφήματα (Graph TSP, G-TSP) και του TSP(1,2). Και στις δύο περιπτώσεις οι κόμβοι αντιστοιχούν στις κορυφές ενός γραφήματος χωρίς βάρη στις ακμές. Στο G-TSP, η απόσταση μεταξύ δύο σημείων δίνεται από το μήκος του συντομότερου μονοπατιού, ενώ στο TSP(1,2), τα γειτονικά σημεία (δηλ. τα σημεία που ενώνονται με ακμή) βρίσκονται σε απόσταση 1 μεταξύ τους, ενώ τα μη γειτονικά σημεία βρίσκονται σε απόσταση 2. Προφανώς, το TSP(1,2) αποτελεί γενίκευση του προβλήματος ύπαρξης κύκλου Hamilton σε ένα γράφημα, και μπορεί να χαρακτηρισθεί σαν η απλούστερη περίπτωση του Δ-TSP [117].

Ο καλύτερος αλγόριθμος προσέγγισης για το G-TSP είναι ο αλγόριθμος του Christofides [30] που επιτυγχάνει λόγο 3/2, και παραμένει ανοικτό πρόβλημα για περισσότερα από είκοσι χρόνια αν αυτός ο λόγος μπορεί να βελτιωθεί. Πρόσφατα, ο Goemans [66] διατύπωσε την εικασία ότι το κάτω φράγμα των Held και Karp επιτυγχάνει λόγο 4/3 στη χειρότερη περίπτωση. Ο καλύτερος αλγόριθμος προσέγγισης πολυωνυμικού χρόνου για το TSP(1,2) οφείλεται στους Papadimitriou και Yannakakis [117] και επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης 7/6. Επιπλέον, στην [117] αποδεικνύεται ότι το TSP(1,2) είναι MAX-SNP-δύσκολο. Συνεπώς, εκτός αν $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, δεν υπάρχει Σχήμα Προσέγγισης Πολυωνυμικού Χρόνου για το TSP(1,2), και φυσικά για το $\triangle$-TSP.

Τα τελευταία χρόνια υπήρξε αξιοσημείωτη πρόοδος στο σχεδιασμό αλγορίθμων προσέγγισης για ορισμένες σημαντικές περιπτώσεις του TSP. Συγκεκριμένα, επιτεύχθηκαν ΣΠΠΧ για επίπεδα στιγμιότυπα του G-TSP [73], για το TSP σε Ευκλείδειους χώρους (Euclidean TSP), όπου οι κόμβοι βρίσκονται στο $\mathbb{R}^d$ και οι αποστάσεις ορίζονται από την Ευκλείδεια νόρμα [7], και για βεβαρημένα επίπεδα γραφήματα [10].

Σε αυτό το κεφάλαιο βασικός στόχος είναι να μελετήσουμε την επίδραση ορισμένων γραφοθεωρητικών ιδιοτήτων (π.χ. μεγάλος ελάχιστος βαθμός, μικρή διάμετρος, μικρό Μέγιστο Σύνολο Ανεξαρτησίας) στην προσεγγισιμότητα των G-TSP και TSP(1,2). Ο κύριος λόγος για τον οποίο υιοθετήσαμε αυτή την οπτική γωνία ήταν οι πρόσφατες επιτυχίες στην προσέγγιση των περιορισμών πολλών γραφοθεωρητικών προβλημάτων σε πυκνά στιγμιότυπα (π.χ. Μέγιστη Τομή, Ελάχιστη Τοποθέτηση στο Γραμμικό Γράφημα, Ελάχιστο Ζωνοπλάτος, Ελάχιστη Κάλυψη Κορυφών, Ελάχιστο Δέντρο Steiner, βλ. [96] για μια επισκόπηση). Πιο συγκεκριμένα ο Karpinski [96] έθεσε το ερώτημα για την ύπαρξη ενός ΣΠΠΧ σε πυκνά στιγμιότυπα του TSP(1,2).

Κατ' αρχήν αποδεικνύουμε ότι κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό, εκτός αν $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, χρησιμοποιώντας μια κατηγορία πυκνών γραφημάτων με μεγάλο Σύνολο Ανεξαρτησίας (Independent Set). Στη συνέχεια εστιάζουμε στον τρόπο με τον οποίο το μέγεθος του Μέγιστου Συνόλου Ανεξαρτησίας, η διάμετρος, και ο αριθμός από κλίκες για την κάλυψη του γραφήματος (clique covering) επηρεάζουν την προσεγγισιμότητα και γενικότερα την πολυπλοκότητα των G-TSP και TSP(1,2).

2.1.1 Ορισμοί

Το Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή με αποστάσεις 1 και 2 (TSP(1,2)) είναι ο περιορισμός του TSP σε πλήρη γραφήματα, όπου τα μήκη όλων των ακμών είναι είτε 1 είτε 2. Προφανώς, το TSP(1,2) είναι η απλούστερη ειδική περίπτωση του $\triangle$-TSP, αφού αυτά τα μήκη πάντα ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα. Επίσης, το TSP(1,2) αποτελεί γενίκευση του προβλήματος ύπαρξης κύκλου Hamilton (Hamiltonian Cycle), όπου κάθε παρουσία μιας ακμής στο γράφημα εισόδου αντιστοιχεί σε απόσταση 1, και κάθε απουσία αντιστοιχεί σε απόσταση 2. Σύμφωνα με αυτό το συμβολισμό, στο TSP(1,2) αναζητούμε μια περιοδεία (απλό γενετικό κύκλο – simple spanning cycle) με τον ελάχιστο αριθμό μη-ακμών (συνδέσεων μήκους 2).

Στο Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή σε Γραφήματα (Graph TSP, G-TSP), η είσοδος δίνεται από ένα μη-βεβαρημένο γράφημα, και η απόσταση μεταξύ ενός ζεύγους κορυφών ορίζεται σαν το μήκος του συντομότερου μονοπατιού μεταξύ τους.

Ένα γράφημα $G(V, E)$ καλείται *δ-πυκνό*, ή απλά *πυκνό*, όταν ο ελάχιστος βαθμός του G, $\delta(G)$, είναι τουλάχιστον $\delta|V|$, για κάποια σταθερά $\delta > 0$. Εξ' ορισμού, κάθε στιγμιότυπο των G-TSP και TSP(1,2) αντιστοιχεί σε κάποιο γράφημα. Συνεπώς τα στιγμιότυπα των G-TSP και TSP(1,2) καλούνται δ-πυκνά όταν τα αντίστοιχα γραφήματα είναι δ-πυκνά.

2.1.2 Αποτελέσματα

Κατ' αρχήν περιγράφουμε ένα μετασχηματισμό από οποιοδήποτε στιγμιότυπο του TSP(1,2) σε ένα πυκνό στιγμιότυπο του TSP(1,2) και του G-TSP, ο οποίος διατηρεί το λόγο προσέγγισης. Με αυτό τον τρόπο αποδεικνύουμε ότι η προσέγγιση πυκνών στιγμιοτύπων του G-TSP και του TSP(1,2) είναι ουσιαστικά τόσο δύσκολη όσο η προσέγγιση οποιουδήποτε στιγμιότυπου του TSP(1,2), και συνεπώς ότι δεν υπάρχει ΣΠΠΧ για τον περιορισμό των TSP(1,2) και G-TSP σε πυκνά στιγμιότυπα, εκτός αν $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Επίσης, οι Fernadez de la Vega και Karpinski [49] απέδειξαν ανεξάρτητα ότι τα πυκνά στιγμιότυπα του TSP(1,2) δεν επιδέχονται ΣΠΠΧ, εκτός αν $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. Πρόσφατα ο Engebretsen [40] απέδειξε ότι το TSP(1,2) δεν μπορεί να προσεγγιστεί σε λόγο $\frac{4709}{4708} - \epsilon$, για κάθε σταθερά $\epsilon > 0$, εκτός αν $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Στη συνέχεια περιγράφουμε τον πρώτο $\mathcal{NC}$ αλγόριθμο που επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης 3/2 για το TSP(1,2). Ο αλγόριθμος του Christofides [30] επίσης επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης 3/2 σε πολυλογαριθμικό παράλληλο χρόνο, αλλά η υλοποίησή του απαιτεί τη χρήση τυχαιότητας (μια $\mathcal{RNC}$ υλοποίηση περιγράφεται στην [39]). Επομένως, επειδή ο αλγόριθμος του Christofides απαιτεί τον υπολογισμό ενός μεγίστου ταιριάσματος (maximum matching), ανήκει στην κλάση $\mathcal{RNC}$, αλλά είναι ένα από τα μεγάλα ανοικτά ερωτήματα αν ανήκει στην κλάση $\mathcal{NC}$. Συνεπώς, ο αλγόριθμος που περιγράφεται εδώ είναι ο πρώτος 3/2-προσεγγιστικός $\mathcal{NC}$ αλγόριθμος για το TSP(1,2).

Όσον αφορά στην απόδοση, αποδεικνύουμε ότι δεδομένου ενός γραφήματος $G(V, E)$, ο $\mathcal{NC}$ αλγόριθμος παράγει μια TSP(1,2) περιοδεία με μήκος όχι περισσότερο από $|V| + \alpha(G)$, όπου $\alpha(G)$ είναι το μέγεθος του Μέγιστου Συνόλου Ανεξαρτησίας (ΜΣΑ – Maximum Independent Set, MIS) του γραφήματος G. Συνεπώς, αν $\alpha(G) < |V|/6$, αυτός ο αλγόριθμος επιτυγχάνει καλύτερα αποτελέσματα από τον ακολουθιακό αλγόριθμο των Papadimitriou και Yannakakis [117].

Αποδεικνύουμε ακόμη ότι, δεδομένης μιας διαμέρισης ενός γραφήματος σε κ κλίκες (πλήρη υπογραφήματα), τα TSP(1,2) και G-TSP μπορούν να επιλυθούν με βέλτιστο τρόπο σε χρόνο $n^{\mathcal{O}(\kappa^2)}$. Επιπλέον, δείχνουμε ότι ο χρόνος μπορεί να βελτιωθεί σε $n^{\mathcal{O}(\kappa)}$ για μια συγκεκριμένη κλάση γραφημάτων, και διατυπώνουμε την εικασία ότι αυτή η βελτίωση είναι πάντοτε εφικτή. Συνεπώς, τα G-TSP και

TSP(1,2) μπορούν να επιλυθούν με βέλτιστο τρόπο σε πολυωνυμικό χρόνο για στιγμιότυπα εισόδου που ο αριθμός των κλικών κ είναι σταθερός. Αυτός ο αλγόριθμος μπορεί να εφαρμοστεί σε συμπληρώματα γραφημάτων που μπορούν να χρωματιστούν με σταθερό αριθμό από χρώματα σε πολυωνυμικό χρόνο, π.χ. συμπληρώματα επίπεδων γραφημάτων. Μέχρι αυτή τη στιγμή δεν έχουμε υπόψη μας κάποιον άλλον αλγόριθμο που να εκμεταλλεύεται μια διαμέριση του γραφήματος εισόδου σε μικρό αριθμό από κλίκες για την βέλτιστη επίλυση του TSP σε πολυωνυμικό χρόνο. Άλλες ειδικές περιπτώσεις του TSP που μπορούν να επιλυθούν βέλτιστα σε πολυωνυμικό χρόνο περιγράφονται στην [105].

Τέλος, επεκτείνουμε την ανάλυση του 7/6-προσεγγιστικού αλγορίθμου των Papadimitriou και Yannakakis [117] για το TSP(1,2), και δείχνουμε ότι το G-TSP μπορεί να προσεγγισθεί σε λόγο 22/15 σε γραφήματα με διάμετρο 3.

2.2 Μη-Προσεγγισιμότητα σε Πυκνά Γραφήματα

Στην [117] αποδεικνύεται ότι το TSP(1,2) παραμένει MAX-SNP-δύσκολο ακόμα και για γραφήματα που είναι πυκνά κατά μέσον όρο, δηλ. έχουν $\Omega(n^2)$ ακμές. Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύεται ότι το TSP(1,2) παραμένει MAX-SNP-δύσκολο και για δ-πυκνά γραφήματα.

Θεώρημα 2.1. *Υπάρχει μια σταθερά $1/2 > \delta^\star > 0$, τέτοια ώστε, για κάθε $0 < \delta \leq \delta^\star$, δεν υπάρχει Σχήμα Προσέγγισης Πολυωνυμικού Χρόνου για τα δ-πυκνά στιγμιότυπα του TSP(1,2), εκτός αν $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.*

Απόδειξη. Έστω $G(V, E)$ ένα γράφημα με n κορυφές, και TSP_G το μήκος μιας βέλτιστης περιοδείας του αντίστοιχου TSP(1,2) στιγμιότυπου. Για κάθε σταθερά $\delta > 0$, έστω X_δ ένα σύνολο από δn ανεξάρτητες κορυφές, και έστω G' το γράφημα που προκύπτει αν το X_δ προστεθεί στο G και όλες οι κορυφές του X_δ συνδεθούν με όλες τις κορυφές του G. Το νέο γράφημα μπορεί να οριστεί σαν $G'(V \cup X_\delta, E')$, όπου

$$E' = E \cup \{\{u, v\} : \forall (u, v) \in V \times X_\delta\}$$

Προφανώς, το γράφημα G' είναι δ'-πυκνό, όπου $\delta' = \frac{\delta}{1+\delta} \geq \delta - \delta^2$. Στο εξής, έστω $\mathrm{TSP}_{G'}$ το μήκος της βέλτιστης TSP(1,2) περιοδείας για το στιγμιότυπο που αντιστοιχεί στο G'.

Έστω $H^\star_G$ μια βέλτιστη περιοδεία για το γράφημα G, και $l(H^\star_G) = \mathrm{TSP}_G$ το μήκος της. Για κάθε ζεύγος κορυφών $v, u \in V$ που συνδέονται στην $H^\star_G$ με ακμή μήκους 2, παρεμβάλλεται μια (διαφορετική για κάθε ζεύγος) κορυφή του X_δ. Αν $\mathrm{TSP}_G \geq (1 + \delta)n$, με αυτό τον τρόπο μπορούν να παρεμβληθούν όλες οι κορυφές του X_δ και να κατασκευαστεί μια βέλτιστη περιοδεία $H^\star_{G'}$ για το G' με μήκος $l(H^\star_{G'}) = \mathrm{TSP}_{G'} = \mathrm{TSP}_G$. Διαφορετικά, κάποιες από τις κορυφές του X_δ πρέπει να παρεμβληθούν μεταξύ κορυφών $v, u \in V$ που συνδέονται με ακμές μήκους 1 στην

$H^\star_G$. Σε αυτή την περίπτωση, η βέλτιστη περιοδεία $H^\star_{G'}$ έχει μήκος $l(H^\star_{G'}) = (1+\delta)n$. Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι

$$\mathrm{TSP}_G \leq \mathrm{TSP}_{G'} + \delta n \leq (1+\delta)\mathrm{TSP}_G$$

Επίσης έστω ότι, για κάποια σταθερά $\epsilon > 0$, έχει υπολογιστεί μια $(1+\epsilon)$-προσεγγιστική περιοδεία $H_{G'}$ για το δ'-πυκνό γράφημα G'. Σε αυτή την περίπτωση, είναι εύκολο να κατασκευαστεί μια περιοδεία H_G για το γράφημα G απλώς παρακάμπτοντας όλες τις επισκέψεις στις κορυφές του συνόλου X_δ. Προφανώς,

$$l(H_G) \leq l(H_{G'}) \leq (1+\epsilon)\mathrm{TSP}_{G'} \leq (1+\epsilon)(1+\delta)\mathrm{TSP}_G$$

Επειδή το TSP(1,2) είναι MAX-SNP-δύσκολο, υπάρχει μια σταθερά $\epsilon^\star > 0$, ώστε να μην μπορεί να επιτευχθεί λόγος προσέγγισης μικρότερος του $(1+\epsilon^\star)$ σε πολυωνυμικό χρόνο, εκτός αν $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ [12]. Έστω $\alpha > 0$ μια πολύ μικρή σταθερά και $\delta^\star = \frac{\epsilon^\star - \alpha}{1+\epsilon^\star-\alpha} > 0$. Αν για κάποιο $0 < \delta \leq \delta^\star$, υπήρχε ΣΠΠΧ για τα δ-πυκνά στιγμιότυπα του TSP(1,2), τότε όλα τα στιγμιότυπα του TSP(1,2) θα μπορούσαν να προσεγγισθούν σε λόγο μικρότερο του $(1+\epsilon^\star)$. □

Είναι αξιοσημείωτο ότι ο λόγος προσέγγισης που μπορεί να επιτευχθεί για δ-πυκνά γραφήματα είναι ακριβώς ο ίδιος με το λόγο προσέγγισης που μπορεί να επιτευχθεί για γραφήματα G με $\mathrm{TSP}_G \geq (1+\delta)n$. Αυτό ισχύει γιατί, αν το αρχικό γράφημα G έχει $\mathrm{TSP}_G \geq (1+\delta)n$, τότε ο παραπάνω μετασχηματισμός είναι μια L-αναγωγή [116] με παραμέτρους ίσες με τη μονάδα. Χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση μπορεί κάποιος να κατασκευάσει γραφήματα G με $\mathrm{TSP}_G \geq (1+\delta)n$ για τα οποία το TSP(1,2) παραμένει MAX-SNP-δύσκολο, βελτιώνοντας έτσι την τιμή της παραμέτρου $\delta^\star$ (επίσης βλ. [49]).

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι η διάμετρος του πυκνού γραφήματος G' είναι ίση με 2. Συνεπώς το γράφημα G' μπορεί επίσης να θεωρηθεί σαν ένα στιγμιότυπο του G-TSP. Σε αυτή την περίπτωση ο παραπάνω μετασχηματισμός αποδεικνύει ότι τα πυκνά στιγμιότυπα του G-TSP είναι τόσο δύσκολο να προσεγγισθούν όσο η γενική περίπτωση του TSP(1,2).

Θεώρημα 2.2. *Υπάρχει μια σταθερά $1/2 > \delta^\star > 0$, τέτοια ώστε, για κάθε $0 < \delta \leq \delta^\star$, δεν υπάρχει ΣΠΠΧ για τα δ-πυκνά στιγμιότυπα του G-TSP, εκτός αν $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.*

Μια τελευταία παρατήρηση είναι ότι, ανεξάρτητα από το αρχικό γράφημα G, το G' είναι γράφημα-επεκτατής (expander graph) με παράγοντα επέκτασης (expansion factor) τουλάχιστον $\frac{2\delta}{1+\delta} = 2\delta'$. Συνεπώς, τα παραπάνω αποτελέσματα για τη μη-προσεγγισιμότητα των TSP(1,2) και G-TSP ισχύουν και για πυκνά γραφήματα-επεκτατές.

2.3 Σύνολα Ανεξαρτησίας και $\mathcal{NC}$ Προσεγγισιμότητα

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζεται ένας $\mathcal{NC}$ αλγόριθμος προσέγγισης για το TSP(1,2). Δεδομένου ενός γραφήματος $G(V,E)$ με n κορυφές, μήκος βέλτιστης TSP(1,2) περιοδείας TSP_G, και πληθικό αριθμό Μέγιστου Συνόλου Ανεξαρτησίας (Maximum Independent Set, MIS) $\alpha(G)$, ο αλγόριθμος παράγει μια περιοδεία μήκους το πολύ $n+\alpha(G)$, και ένα σύνολο ανεξαρτησίας μεγέθους τουλάχιστον $\mathrm{TSP}_G - n$.

Θεώρημα 2.3. *Οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε γράφημα $G(V,E)$ με n κορυφές:*

$$2\alpha(G) \leq \mathrm{TSP}_G \leq n + \alpha(G) \tag{2.1}$$

Επιπλέον, μια περιοδεία και ένα σύνολο ανεξαρτησίας που ικανοποιούν την (2.1) μπορούν να υπολογιστούν στο $\mathcal{NC}$.

Απόδειξη. Ο αλγόριθμος TSP-MIS (Σχήμα 2.1) ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη για κάθε επανάληψη i.

Για κάθε ζεύγος κορυφών $v, u \in V^i$, το σύνολο $P \cup \{v,u\}$ εξακολουθεί να αποτελείται από ξένα μεταξύ τους, απλά μονοπάτια.

Επομένως για κάθε επανάληψη i, το σύνολο $P \cup M^i$ αποτελείται από ξένα μεταξύ τους, απλά μονοπάτια. Στο τέλος του αλγορίθμου, το σύνολο ακμών P ορίζει στο $G(V,E)$ ένα σύνολο από απλά μονοπάτια και ένα σύνολο από απομονωμένες κορυφές. Αν οι απομονωμένες κορυφές θεωρηθούν σαν μονοπάτια μηδενικού μήκους (τετριμμένα μονοπάτια), τότε το P είναι ένα κάλυμμα (για το V) από ξένα μεταξύ τους, απλά μονοπάτια (vertex disjoint path cover). Επίσης, κάθε S^i είναι ένα σύνολο ανεξαρτησίας, γιατί κάθε M^i είναι ένα μεγαλύτερο ταίριασμα (maximal matching) για το αντίστοιχο $G^i(V^i, E^i)$.

Απόδοση: Η απόδοση του αλγορίθμου εξαρτάται από τον αριθμό των ακμών $|P|$ στο σύνολο P. Θα δείξουμε ότι ο αλγόριθμος τερματίζει με $|P| \geq n - \alpha(G)$.

Έστω $|M^i|$ ο αριθμός των ακμών στο ταίριασμα M^i. Επειδή για κάθε ακμή του M^i ακριβώς μια κορυφή απομακρύνεται από το V^i, ισχύει ότι $|V^{i+1}| = |V^i| - |M^i|$.

Επίσης, έστω K ο αριθμός των επαναλήψεων που εκτελεί ο TSP-MIS. Επειδή ακμές μόνο προστίθενται στο σύνολο P κάθε φορά που εκτελείται το βήμα (∗), στο τέλος του αλγορίθμου είναι

$$|P| = \sum_{i=1}^{K} |M^i| = \sum_{i=1}^{K} \big(|V^i| - |V^{i+1}|\big) = n - |V^{K+1}|$$

Προφανώς, αν ο αλγόριθμος τερματίσει με $M^i = \emptyset$, τότε το V^i αποτελεί σύνολο ανεξαρτησίας και $|V^i| \leq \alpha(G)$. Συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι $|P| \geq n - \alpha(G)$.

```
        Αλγόριθμος TSP-MIS
        Είσοδος: Γράφημα G(V, E).
        Έξοδος:  Κάλυμμα P από ξένα μεταξύ τους απλά μονοπάτια.
                 Σύνολο S* από ανεξάρτητες κορυφές.

        P := ∅; i := 0;
        repeat
            i := i + 1;
            V^i := {v ∈ V : deg_P(v) = 0};
            Για κάθε μονοπάτι p ∈ P, |p| ≠ 0,
                πρόσθεσε ακριβώς μια από τις κορυφές-άκρα του p στο V^i;
            E^i := {{v, w} ∈ E : v ∈ V^i ∧ w ∈ V^i};
            Υπολόγισε ένα Μεγαλύτερο Ταίριασμα M^i στο G^i(V^i, E^i);
(*)         P := P ∪ M^i;
            S^i := {v ∈ V^i : deg_{M^i}(v) = 0};
        until M^i = ∅ or i ≥ ⌈log n⌉;
        S* := S^i μέγιστου πληθικού αριθμού;
        return(P, S*);
```

Σχήμα 2.1: Ο Αλγόριθμος TSP-MIS.

Επιπλέον, αφού οι κορυφές του V^i που δεν καλύπτονται από το μεγαλύτερο ταίριασμα M^i αποτελούν ένα σύνολο ανεξαρτησίας, είναι

$$|M^i| \geq \frac{|V^i| - \alpha(G)}{2} \quad \text{και} \quad |V^{i+1}| \leq \frac{|V^i| + \alpha(G)}{2}$$

Με απλή επαγωγή στο i, μπορεί να αποδειχθεί ότι, για κάθε επανάληψη $i = 1, \ldots, K$, ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$|V^{i+1}| \leq \frac{|V| + (2^i - 1)\alpha(G)}{2^i} \tag{2.2}$$

Συνεπώς, αν ο αλγόριθμος τερματίσει ύστερα από την εκτέλεση $K = \lceil \log n \rceil$, επαναλήψεων, τότε είναι $|V^{K+1}| < \alpha(G) + 1$ από την ανισότητα (2.2). Μάλιστα, επειδή το $|V^{K+1}|$ παίρνει μόνο ακέραιες τιμές, ισχύει ότι $|V^{K+1}| \leq \alpha(G)$. Άρα, σε κάθε περίπτωση, ο αλγόριθμος τερματίζει με $|P| \geq n - \alpha(G)$.

Είναι φανερό ότι το P, το οποίο ορίζει ένα σύνολο από ξένα μονοπάτια που καλύπτουν το $G(V, E)$, μπορεί να επεκταθεί σε μία TSP(1,2) περιοδεία με χρήση το πολύ $\alpha(G)$ μη-ακμών (δηλ. συνδέσεων μήκους 2). Το μήκος μια τέτοιας περιοδείας δεν μπορεί να είναι περισσότερο από $n + \alpha(G)$.

Η ανισότητα $2\alpha(G) \leq \mathrm{TSP}_G$ ισχύει γιατί μια οποιαδήποτε TSP(1,2) περιοδεία η οποία διέρχεται από $\alpha(G)$ ανεξάρτητες κορυφές πρέπει να έχει μήκος τουλάχιστον $2\alpha(G)$. Επίσης το μέγεθος του $S^\star$ πρέπει να είναι τουλάχιστον $\mathrm{TSP}_G - n$. Διαφορετικά, από την παραπάνω ανάλυση, ο αλγόριθμος θα τερμάτιζε με μια TSP(1,2) περιοδεία μήκους αυστηρά μικρότερου από TSP_G.

Αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχουν γραφήματα G με $\mathrm{TSP}_G = n + \alpha(G) - 1$. Για παράδειγμα, για κάθε ακέραιο $x > 1$, το γράφημα που αποτελείται από μια κλίκα $n - x$ κορυφών και ένα σύνολο x ανεξάρτητων κορυφών, όλες οι οποίες συνδέονται σε μια συγκεκριμένη κορυφή της κλίκας, έχει Μέγιστο Σύνολο Ανεξαρτησίας ίσο με $x + 1$ και βέλτιστη TSP(1,2) περιοδεία μήκους $n + x$.

Πολυπλοκότητα: Ο αλγόριθμος TSP-MIS εκτελεί το πολύ $\lceil \log n \rceil$ επαναλήψεις, και οι βασικές λειτουργίες κάθε επανάληψης μπορούν εύκολα να υλοποιηθούν στο $\mathcal{NC}$ (π.χ. βλ. Κεφάλαιο 2 του [65]). Οι βαθμοί των κορυφών στο P μπορούν να ενημερώνονται σε σταθερό παράλληλο χρόνο στο βήμα (*), ενώ ο υπολογισμός του G^i μπορεί εύκολα να υλοποιηθεί στο $\mathcal{NC}$, γιατί οι συνεκτικές συνιστώσες του P είναι ξένα μεταξύ τους, απλά μονοπάτια. Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου καθορίζεται από τον υπολογισμό των μεγαλύτερων ταιριασμάτων. Υπάρχει παράλληλος αλγόριθμος για το μοντέλο CRCW PRAM ο οποίος υπολογίζει μεγαλύτερα ταιριάσματα σε χρόνο $\mathcal{O}(\log^3 n)$ με χρήση $\mathcal{O}(n^2)$ επεξεργαστών [88]. Συνεπώς, ο αλγόριθμος TSP-MIS μπορεί να εκτελεσθεί σε μια CRCW PRAM σε χρόνο $\mathcal{O}(\log^4 n)$ με χρήση $\mathcal{O}(n^2)$ επεξεργαστών. Τέλος, η ακολουθιακή πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $\mathcal{O}(n^2 \log n)$. □

Οι αλγοριθμικές συνέπειες του προηγούμενου θεωρήματος μπορούν να συνοψισθούν στα ακόλουθα.

Πόρισμα 2.1. *Υπάρχει ένας $\mathcal{NC}$ αλγόριθμος που εκτελείται σε περιβάλλον CRCW PRAM σε χρόνο $\mathcal{O}(\log^4 n)$ με χρήση $\mathcal{O}(n^2)$ επεξεργαστών και παράγει τα παρακάτω αποτελέσματα.*

1. *Μια $\frac{3}{2}$-προσεγγιστική TSP(1,2) περιοδεία.*
2. *Μια $(1+\beta)$-προσεγγιστική TSP(1,2) περιοδεία, εφόσον το γράφημα εισόδου G έχει $\alpha(G) \leq \beta n$, για κάποιον πραγματικό αριθμό $\beta > 0$.*
3. *Ένα $\frac{2\beta}{1+\beta}$-προσεγγιστικό σύνολο ανεξαρτησίας, εφόσον το γράφημα εισόδου G έχει $\mathrm{TSP}_G \geq (1+\beta)n$, για κάποιον πραγματικό αριθμό $\beta > 0$.*

Παρατήρηση. Ο αλγόριθμος TSP-MIS είναι στην πραγματικότητα μια αποτελεσματική παράλληλη υλοποίηση του κανόνα τετραπλής αλλαγής (4-exchange) για τοπική αναζήτηση (local search) στο χώρο λύσεων του TSP(1,2). Ο αντίστοιχος ακολουθιακός αλγόριθμος έχει αναλυθεί στην [97]. Ο αλγόριθμος ξεκινά με μια οποιαδήποτε περιοδεία και ελέγχει αν η τρέχουσα λύση περιέχει ένα ζευγάρι ακμών $(v, w), (v', w')$, που δεν συντρέχουν σε ίδιες κορυφές, και η αντικατάστασή τους από το ζευγάρι $(v, v'), (w, w')$ δημιουργεί μια περιοδεία με μικρότερο μήκος.

Έστω ένας οποιοδήποτε προσανατολισμός μιας τοπικά βέλτιστης περιοδείας t, $S_L = \{v \in V : v$ αριστερή κορυφή ακμής μήκους 2 στο $t\}$, και S_R το αντίστοιχο σύνολο για τις δεξιές κορυφές των ακμών μήκους 2. Επειδή η t είναι τοπικά βέλτιστη περιοδεία όσον αφορά τη γειτονιά που προκύπτει από την τετραπλή αλλαγή, πρέπει αμφότερα τα σύνολα S_L και S_R να είναι σύνολα ανεξαρτησίας. Συνεπώς, κάθε τοπικά βέλτιστη περιοδεία περιέχει το πολύ $\alpha(G)$ ακμές μήκους 2, και το μέγεθος του Μέγιστου Συνόλου Ανεξαρτησίας φράσσει από πάνω τη διαφορά του μήκους μιας οποιασδήποτε τοπικά βέλτιστης περιοδείας από τον αριθμό των κορυφών. □

2.4 Περιοδείες σε Σταθερό Αριθμό Κλικών

Σε αυτή την παράγραφο δείχνουμε πώς το πρόβλημα ύπαρξης κύκλου Hamilton σε ένα γράφημα μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο, δεδομένης μιας διαμέρισης του γραφήματος σε σταθερό αριθμό από κλίκες (πλήρη υπογραφήματα). Το γεγονός αυτό επιτρέπει τον υπολογισμό σε πολυωνυμικό χρόνο βέλτιστων περιοδειών για τα αντίστοιχα στιγμιότυπα των TSP(1,2) και G-TSP.

Η τεχνική που θα περιγράψουμε μπορεί να εφαρμοστεί σε γραφήματα των οποίων τα συμπληρωματικά (complementary graphs) μπορούν να χρωματιστούν με σταθερό αριθμό χρωμάτων σε πολυωνυμικό χρόνο (π.χ. συμπληρώματα επίπεδων γραφημάτων).

Θεώρημα 2.4. *Δεδομένης μιας διαμέρισης ενός γραφήματος $G(V,E)$, $|V| = n$, σε $\kappa > 1$ κλίκες, υπάρχει ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος που αποφασίζει αν το G περιέχει κύκλο Hamilton σε χρόνο $\mathcal{O}\big(n^{\kappa(2\kappa-1)}\big)$. Αν το γράφημα G περιέχει κύκλο Hamilton, ο αλγόριθμος βρίσκει έναν τέτοιο κύκλο.*

Απόδειξη. Δεδομένης μιας διαμέρισης $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_\kappa\}$, μια ακμή $e \in E$ καλείται *εξωτερική* όταν έχει τα άκρα της σε δύο διαφορετικές κλίκες, και *εσωτερική* διαφορετικά. Ένα *HC-σύνολο* είναι ένα σύνολο $M \subseteq E$ από εξωτερικές ακμές που μπορεί να επεκταθεί σε έναν κύκλο Hamilton με την προσθήκη ενός συνόλου από εσωτερικές ακμές, δηλ. υπάρχει ένα $M^{(c)} \subseteq E$ από εσωτερικές ακμές ώστε το $M \cup M^{(c)}$ να είναι κύκλος Hamilton.

Αρχικά δείχνουμε ότι μπορούμε να αποφασίσουμε, σε χρόνο πολυωνυμικό στα n και κ, αν ένα σύνολο M από εξωτερικές ακμές είναι ένα HC-σύνολο (Λήμμα 2.1). Έπειτα αποδεικνύουμε ότι το γράφημα G περιέχει κύκλο Hamilton ανν περιέχει ένα HC-σύνολο μεγέθους το πολύ $\kappa(\kappa-1)$ (Λήμματα 2.2 και 2.3). Ο αλγόριθμος ψάχνει εξαντλητικά όλα τα υποσύνολα εξωτερικών ακμών μεγέθους το πολύ $\kappa(\kappa-1)$ για ένα HC-σύνολο. Επιπλέον, διατυπώνουμε την εικασία ότι το γράφημα G περιέχει κύκλο Hamilton ανν περιέχει ένα HC-σύνολο μεγέθους το πολύ $2(\kappa-1)$. Τέλος, αποδεικνύουμε την εικασία για μια ειδική κατηγορία γραφημάτων (Λήμμα 2.4) και χρησιμοποιούμε το Λήμμα 2.2 για να διατυπώσουμε την Εικασία 2.1 σαν γενικευμένη μορφή του Θεωρήματος του Smith (βλ. [23]).

Ένα *γράφημα κλικών* (clique graph) $T(C, M)$ αποτελεί μια αναπαράσταση του τρόπου με τον οποίο ένα σύνολο $M \subseteq E$ από εξωτερικές ακμές διασυνδέει τις κλίκες της διαμέρισης $\mathcal{C}$. Το γράφημα κλικών $T(C, M)$ έχει ακριβώς κ κορυφές οι οποίες αντιστοιχούν στις κλίκες της διαμέρισης $\mathcal{C}$. Προφανώς, αν το M είναι ένα HC-σύνολο, τότε το αντίστοιχο γράφημα κλικών είναι συνεκτικό και Eulerian. Η αντίστροφη πρόταση όμως δεν είναι πάντοτε αληθής.

Δεδομένου ενός συνόλου M από εξωτερικές ακμές, χρωματίζουμε ΚΟΚΚΙΝΕΣ όλες τις ακμές του M που έχουν (στο γράφημα G) κοινές κορυφές με άλλες ακμές του M. Οι υπόλοιπες ακμές του M χρωματίζονται ΜΠΛΕ, ενώ όλες οι εσωτερικές ακμές του G χρωματίζονται ΜΑΥΡΕΣ. Όσον αφορά στις κορυφές του V, χρωματίζουμε ΚΟΚΚΙΝΗ κάθε κορυφή $v \in V$ που αποτελεί κοινό σημείο δύο ή περισσότερων ΚΟΚΚΙΝΩΝ ακμών του M. Ακόμα, χρωματίζουμε ΜΠΛΕ κάθε κορυφή $v \in V$ στην οποία συντρέχει ακριβώς μία ακμή του M, και χρωματίζουμε ΜΑΥΡΕΣ όλες τις υπόλοιπες κορυφές του V οποίες δεν εφάπτονται του M (Σχήμα 2.2).

Από τα τρία είδη κορυφών, οι ΚΟΚΚΙΝΕΣ είναι οι πλέον προβληματικές στο χειρισμό τους, επειδή δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν από έναν κύκλο Hamilton για την επίσκεψη κάποιων ΜΑΥΡΩΝ κορυφών στην ίδια κλίκα. Όσον αφορά στις ΜΠΛΕ κορυφές, αν μια κλίκα C_i έχει δύο ΜΠΛΕ κορυφές $v, u \in C_i$, ένας κύκλος Hamilton μπορεί να επισκεφθεί την C_i από την v, να περάσει από όλες/κάποιες ΜΑΥΡΕΣ κορυφές της C_i, και να βγει χρησιμοποιώντας την u. Μια τέτοιου είδους διαδρομή καλείται ΜΠΛΕ πέρασμα από την κλίκα C_i.

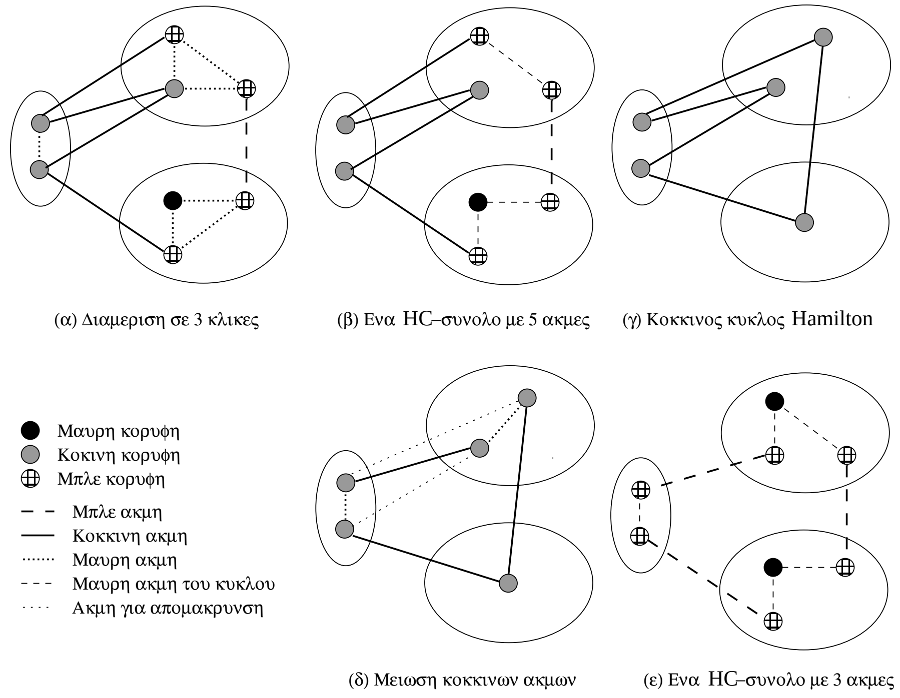
Ένα σύνολο από εξωτερικές ακμές M λέγεται ότι καλύπτει μια κλίκα C_i όταν όλες οι κορυφές της C_i έχουν βαθμό το πολύ 2 στο M, και είτε η C_i περιέχει μόνο ΚΟΚΚΙΝΕΣ κορυφές, είτε περιέχει τουλάχιστον ένα ζευγάρι ΜΠΛΕ κορυφών. Το ακόλουθο Λήμμα χαρακτηρίζει τα HC-σύνολα εξωτερικών ακμών και δείχνει πώς ένας κύκλος Hamilton μπορεί να κατασκευαστεί σε πολυωνυμικό χρόνο από ένα HC-σύνολο.

Λήμμα 2.1. *Ένα σύνολο εξωτερικών ακμών M είναι ένα HC-σύνολο ανν το αντίστοιχο γράφημα κλικών $T(C, M)$ είναι συνεκτικό, Eulerian, και*

- *(α) Για κάθε $i = 1, \ldots, \kappa$, η κλίκα C_i καλύπτεται από το M, και*
- *(β) Υπάρχει ένα Eulerian ίχνος (trail) R για το γράφημα T με την ιδιότητα για κάθε* ΚΟΚΚΙΝΗ *κορυφή $v \in V$, το R να περνάει από τη v ακριβώς μία φορά χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο ζευγάρι* ΚΟΚΚΙΝΩΝ *ακμών.*

Απόδειξη. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι κάθε HC-σύνολο από εξωτερικές ακμές αντιστοιχεί σε ένα συνεκτικό, Eulerian γράφημα κλικών $T(C, M)$ που ικανοποιεί και τις δύο ιδιότητες (α) και (β).

Για το αντίστροφο, θα δείξουμε πως το M μπορεί να επεκταθεί σε έναν κύκλο Hamilton ακολουθώντας το Eulerian ίχνος R. Εξ' αιτίας της ιδιότητας (β), το ίχνος R εξασφαλίζει ότι όλες οι ΚΟΚΚΙΝΕΣ κορυφές θα συμπεριληφθούν στον κύκλο με



(α) Διαμεριση σε 3 κλικες (β) Ενα HC–συνολο με 5 ακμες (γ) Κοκκινος κυκλος Hamilton

(δ) Μειωση κοκκινων ακμων (ε) Ενα HC–συνολο με 3 ακμες

Σχήμα 2.2: Ένα παράδειγμα εφαρμογής των Λημμάτων 6 και 7.

βαθμό ακριβώς 2. Επιπλέον, επειδή το R διέρχεται από όλες τις ακμές του M ακριβώς μια φορά και ισχύει η ιδιότητα (α), όλες οι ΜΠΛΕ και οι ΜΑΥΡΕΣ κορυφές μπορούν συμπεριληφθούν στον κύκλο με βαθμό ακριβώς 2. Τέλος επειδή το γράφημα κλικών T είναι συνεκτικό, ο κύκλος θα περνάει από όλες τις κλίκες (δηλ. θα επισκεφθεί όλες τις κορυφές του V). Επομένως, ακολουθώντας το Eulerian ίχνος R μπορώ να υπολογίσω ένα σύνολο από εσωτερικές ακμές $M^{(c)}$, ώστε το $M \cup M^{(c)}$ να είναι ένας κύκλος Hamilton. □

Συνεπώς, για να αποφασιστεί αν ένα σύνολο M είναι ένα HC-σύνολο (και να επεκταθεί το M σε έναν κύκλο Hamilton) αρκεί να ελεγχθεί αν όλες οι κλίκες καλύπτονται από το M, αν το T είναι συνεκτικό, και αν υπάρχει ένα Eulerian ίχνος που ικανοποιεί την ιδιότητα (β). Είναι εύκολο να δει κανείς ότι αυτοί οι έλεγχοι μπορούν να εκτελεσθούν σε ντετερμινιστικό χρόνο πολυωνυμικό στα n και κ. Επιπλέον, η εύρεση ενός κατάλληλου Eulerian ίχνους R ουσιαστικά παρέχει την επέκταση του M σε έναν κύκλο Hamilton.

Μένει να δείξουμε πως μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τη διαμέριση του $G(V, E)$

σε κ κλίκες για να αποφασίσουμε την ύπαρξη ενός κύκλου Hamilton. Διαισθητικά πρέπει να είναι φανερό ότι, αν το G είναι Hamiltonian και αποτελείται από σημαντικό αριθμό κορυφών (σε σχέση με το κ), τότε πρέπει να υπάρχει ένας κύκλος Hamilton που εκμεταλλεύεται τη διαμέριση του G σε μικρό αριθμό από κλίκες. Αυτός ο κύκλος Hamilton θα περνάει ένα μικρό αριθμό φορών από κλίκα σε κλίκα, και επομένως θα είναι εύκολο να ανακαλυφθεί με εξαντλητική αναζήτηση στα υποσύνολα των εξωτερικών ακμών. Τα επόμενα δύο Λήμματα εκφράζουν αυτή τη διαίσθηση.

Λήμμα 2.2. *Έστω ότι υπάρχει ένας ακέραιος $B_\kappa \geq 2$ που μόνο εξαρτάται από το κ τέτοιος ώστε, για κάθε γράφημα $G(V,E)$ και κάθε διαμέριση του G σε κ κλίκες, αν το G είναι Hamiltonian και $|V| > B_\kappa$, τότε το G περιέχει τουλάχιστον έναν κύκλο Hamilton που δεν αποτελείται εξ' ολοκλήρου από εξωτερικές ακμές (δηλ.* ΚΟΚΚΙΝΕΣ *ακμές/κορυφές).*
Τότε, για κάθε γράφημα $G(V,E)$ και κάθε διαμέριση του G σε κ κλίκες, το G είναι Hamiltonian ανν περιέχει έναν κύκλο Hamilton με το πολύ B_κ εξωτερικές ακμές.

Απόδειξη. Έστω H ο κύκλος Hamilton του γραφήματος G που περιέχει τον ελάχιστο αριθμό από εξωτερικές ακμές (ανάμεσα σε όλους τους κύκλους Hamilton του G), και έστω M το σύνολο από εξωτερικές ακμές που αντιστοιχεί στον H. Υποθέτουμε ότι μπορεί να ισχύει $|M| > B_\kappa$ και θα καταλήξουμε σε αντίφαση. Ο κύκλος H πρέπει να περιέχει τουλάχιστον ένα ζεύγος ΜΠΛΕ κορυφών, γιατί από υπόθεση δεν μπορεί να αποτελείται εξ' ολοκλήρου από ΚΟΚΚΙΝΕΣ κορυφές.

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε κάθε ΜΠΛΕ πέρασμα του H από μια κλίκα C_i με μια ΚΟΚΚΙΝΗ μετα-κορυφή $\hat{v}$, η οποία επίσης θα θεωρείται ότι ανήκει στην κλίκα C_i (δηλ. η $\hat{v}$ θα συνδέεται με όλες τις υπόλοιπες κορυφές της C_i με ΜΑΥΡΕΣ ακμές). Το σύνολο αυτών των αντικαταστάσεων δημιουργεί ένα νέο γράφημα $G'(V',E')$ και έναν κύκλο Hamilton H' για αυτό το γράφημα. Μάλιστα, ο κύκλος H' αποτελείται εξ' ολοκλήρου από εξωτερικές ακμές (ΚΟΚΚΙΝΕΣ ακμές/κορυφές), και περιέχει ακριβώς το ίδιο σύνολο M από εξωτερικές ακμές με τον αρχικό κύκλο H (Σχήμα 2.2, περίπτωση (γ) και (δ)).

Είναι εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς ότι οποιοσδήποτε κύκλος Hamilton $H_{G'}$ για το γράφημα $G'(V',E')$ μπορεί να μετατραπεί σε έναν κύκλο Hamilton H_G για το γράφημα $G(V,E)$ πραγματοποιώντας τις αντίστροφες αντικαταστάσεις των ΚΟΚΚΙΝΩΝ μετα-κορυφών $\hat{v}$ από τα αντίστοιχα ΜΠΛΕ περάσματα. Επιπλέον, ο κύκλος $H_{G'}$ έχει ακριβώς το ίδιο σύνολο από εξωτερικές ακμές με τον κύκλο H_G (Σχήμα 2.2, περίπτωση (δ) και (ε)).

Επομένως το γράφημα $G'(V',E')$ είναι Hamiltonian, έχει μια διαμέριση σε κ κλίκες, και ισχύει ότι $|V'| > B_\kappa$. Από την υπόθεση θα πρέπει να περιέχει ένα κύκλο Hamilton ο οποίος δεν θα αποτελείται εξ' ολοκλήρου από εξωτερικές ακμές, και επομένως θα περιέχει λιγότερες εξωτερικές ακμές από τον H'. Συνεπώς, υπάρχει ένας κύκλος Hamilton για το G με λιγότερες εξωτερικές ακμές από $|M|$, γεγονός που αντιβαίνει στην υπόθεση ότι το M είναι ελαχίστου μεγέθους. □

Από το Λήμμα 2.2 συνάγεται ότι, για να αποδείξουμε ένα πάνω φράγμα στο μέγεθος του μικρότερου HC-συνόλου, αρκεί να αποδείξουμε το ίδιο πάνω φράγμα στον αριθμό των κορυφών των Hamiltonian γραφημάτων που (i) μπορούν να διαμεριστούν σε κ κλίκες, και (ii) περιέχουν μόνο κύκλους Hamilton που εξ' ολοκλήρου αποτελούνται από εξωτερικές ακμές. Διαισθητικά πρέπει να είναι φανερό ότι τέτοιου είδους γραφήματα δεν μπορούν να έχουν οσοδήποτε μεγάλο αριθμό κορυφών.

Λήμμα 2.3. *Για κάθε γράφημα $G(V,E)$ και κάθε διαμέριση του G σε κ κλίκες, το γράφημα G είναι Hamiltonian ανν περιέχει ένα HC-σύνολο M με $|M| \le \kappa(\kappa-1)$.*

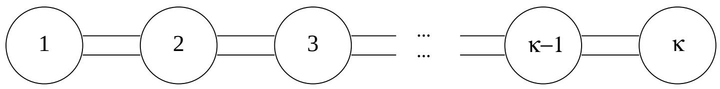
Απόδειξη. Εξ' ορισμού, η ύπαρξη ενός οποιουδήποτε HC-συνόλου αρκεί για να είναι το γράφημα G Hamiltonian. Για το αντίστροφο, από το Λήμμα 2.2, αρκεί να αποδείξουμε ότι οποιοδήποτε Hamiltonian γράφημα $G(V,E)$, το οποίο περιέχει μόνο κύκλους Hamilton εξ' ολοκλήρου αποτελούμενους από εξωτερικές ακμές, δεν μπορεί να έχει $|V| > \kappa(\kappa-1)$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το γράφημα G ανήκει σε αυτή την κατηγορία (δηλ. περιέχει μόνο κύκλους Hamilton εξ' ολοκλήρου αποτελούμενους από εξωτερικές ακμές), και έστωσαν H ένας τέτοιος κύκλος και M το αντίστοιχο σύνολο από εξωτερικές ακμές.

Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε προσανατολισμό του κύκλου H. Αν $|V| > \kappa(\kappa-1)$, ένα απλό συνδυαστικό επιχείρημα φανερώνει ότι πάντα υπάρχει ένα ζευγάρι κλίκες C_i και C_j και τέσσερις κορυφές, $v_1, v_2 \in C_i$ και $u_1, u_2 \in C_j$, ώστε, στον προσανατολισμένο κύκλο H, η u_1 να είναι αμέσως επόμενη της v_1, και η u_2 να είναι αμέσως επόμενη της v_2. Σε αυτή την περίπτωση οι εξωτερικές ακμές $\{v_1, u_1\}$ και $\{v_2, u_2\}$ μπορούν να αντικατασταθούν από τις εσωτερικές (μαυρες) ακμές $\{v_1, v_2\}$ και $\{u_1, u_2\}$. Αυτή η αντικατάσταση δημιουργεί ένα νέο κύκλο Hamilton H' που περιέχει τουλάχιστον δύο εσωτερικές ακμές. Συνεπώς δεν υπάρχει γράφημα $G(V,E)$ που να είναι Hamiltonian, να περιέχει μόνο κύκλους Hamilton εξ' ολοκλήρου αποτελούμενους από εξωτερικές ακμές, και να έχει $|V| > \kappa(\kappa-1)$. □

Επομένως, με εξαντλητική αναζήτηση μπορούμε να αποφασίσουμε αν το γράφημα G περιέχει κύκλο Hamilton σε ντετερμινιστικό χρόνο $\mathcal{O}(n^{\kappa(2\kappa-1)})$, επειδή ο αριθμός των διαφορετικών συνόλων εξωτερικών ακμών με μέγεθος το πολύ $\kappa(\kappa-1)$ είναι το πολύ $n^{2\kappa(\kappa-1)}$, και μπορούμε να αποφασίσουμε αν ένα σύνολο από εξωτερικές ακμές είναι ένα HC-σύνολο σε ντετερμινιστικό χρόνο $\mathrm{poly}(n,\kappa) = \mathcal{O}(n^\kappa)$. □

Ένας μπλε κύκλος Hamilton είναι ένας κύκλος που δεν περιέχει καθόλου κοκκινες ακμές ή κορυφές. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι το άνω φράγμα του $\kappa(\kappa-1)$ μπορεί να βελτιωθεί σημαντικά στην περίπτωση που το γράφημα περιέχει κάποιον μπλε κύκλο Hamilton.

Λήμμα 2.4. *Για κάθε γράφημα $G(V,E)$ και κάθε διαμέριση του G σε κ κλίκες, αν το G περιέχει ένα* μπλε *κύκλο Hamilton, τότε περιέχει και ένα HC-σύνολο M που εξ' ολοκλήρου αποτελείται από το πολύ $2(\kappa-1)$* μπλε *ακμές.*



Σχήμα 2.3: Ένα HC-σύνολο που περιέχει ακριβώς $2(\kappa - 1)$ εξωτερικές ακμές.

Απόδειξη. Έστω H ο ΜΠΛΕ κύκλος Hamilton του G που περιέχει τον ελάχιστο αριθμό εξωτερικών ακμών, M το αντίστοιχο σύνολο εξωτερικών ακμών, και $|M| > 2(\kappa - 1)$. Επειδή δεν μπορούν να δημιουργηθούν ΚΟΚΚΙΝΕΣ κορυφές μόνο με την αφαίρεση εξωτερικών ακμών από το M, οποιοδήποτε υποσύνολο $M' \subseteq M$ που αντιστοιχεί σε ένα συνεκτικό, Eulerian γράφημα κλικών $T(C, M')$ είναι ένα HC-σύνολο που περιέχει μόνο ΜΠΛΕ ακμές.

Έστω $T_S(C, M_S)$ ένα γενετικό δέντρο του $T(C, M)$. Αφού $|M_S| = \kappa - 1$, το γράφημα $T^{(S)}(C, M - M_S)$, το οποίο δημιουργείται από την αφαίρεση των ακμών του γενετικού δέντρου T_S, περιέχει τουλάχιστον κ ακμές. Επομένως, το $T^{(S)}$ περιέχει ένα απλό κύκλο L. Προφανώς η απομάκρυνση των ακμών του κύκλου L δεν επηρεάζει τη συνεκτικότητα του T, αφού $M_S \subseteq M - L$, και μειώνει ακριβώς κατά δύο τους βαθμούς των εμπλεκομένων κορυφών/κλικών. Το γράφημα κλικών $T'(C, M - L)$ είναι λοιπόν συνεκτικό και Eulerian, ενώ ισχύει ότι $|M - L| < |M|$. □

Υπάρχουν HC-σύνολα με πληθάριθμο ακριβώς $2(\kappa - 1)$ τα οποία αντιστοιχούν σε κύκλους Hamilton με το μικρότερο αριθμό εξωτερικών ακμών (Σχήμα 2.3). Συνεπώς το άνω φράγμα του $2(\kappa - 1)$ είναι ακριβές. Από την άλλη πλευρά, ακόμα και επιτρέποντας ΚΟΚΚΙΝΕΣ κορυφές, δεν μπορέσαμε να κατασκευάσουμε κάποιο HC-σύνολο που περιέχει περισσότερες από $2(\kappa - 1)$ ακμές και αντιστοιχεί σε κύκλο Hamilton με τον ελάχιστο αριθμό εξωτερικών ακμών. Αυτό μας οδήγησε στη διατύπωση της εικασίας ότι το πάνω φράγμα του $2(\kappa - 1)$ ισχύει για κάθε γράφημα και κάθε διαμέριση σε κ κλίκες. Είναι εύκολο να αποδειχθεί με επαγωγική εφαρμογή του Λήμματος 2.2 ότι αυτή η εικασία είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη πρόταση.

Εικασία 2.1. *Για κάθε Hamiltonian γράφημα $G(V, E)$ με $2\kappa - 1$ κορυφές και κάθε διαμέριση του G σε κ κλίκες, υπάρχει τουλάχιστον ένας κύκλος Hamilton που δεν αποτελείται εξ' ολοκλήρου από εξωτερικές ακμές.*

Αυτή η διατύπωση της εικασίας μοιάζει πολύ με το Θεώρημα του C.A.B. Smith, το οποίο αποδείχθηκε το 1946, και λέει ότι ο αριθμός των κύκλων Hamilton που περιέχουν κάθε δεδομένη ακμή ενός κυβικού γραφήματος (cubic graph, ένα απλό κανονικό γράφημα με βαθμό 3) είναι άρτιος. Μια απλή αλγεβρική απόδειξη αυτού του θεωρήματος υπάρχει στο [23]. Το Θεώρημα του Smith υποδηλώνει ότι κάθε Hamiltonian γράφημα, που αποτελείται από $2\kappa - 1$ κορυφές, έναν ΚΟΚΚΙΝΟ κύκλο Hamilton, και κ ΜΑΥΡΕΣ ακμές που σχηματίζουν ένα ταίριασμα, περιέχει έναν κύκλο Hamilton που διέρχεται από μια τουλάχιστον ΜΑΥΡΗ ακμή. Η υπόθεση της

Εικασίας 2.1 είναι γενικότερη, αφού περιλαμβάνει όλα τα Hamiltonian γραφήματα που έχουν $2\kappa - 1$ κορυφές και μπορούν να διαμεριστούν σε κ κλίκες. Από την άλλη πλευρά το συμπέρασμα της Εικασίας 2.1 είναι ασθενέστερο, γιατί το αντίστοιχο συμπέρασμα για τα γραφήματα που προκύπτουν από τα κυβικά με προσθήκη μιας κορυφής, είναι ένα απλό πόρισμα του Θεωρήματος του Smith.

Παρατήρηση. Η απόδειξη του Λήμματος 2.4 σχετίζεται άμεσα με το πρόβλημα του Ελάχιστου Eulerian Υπογραφήματος. Δεδομένου ενός συνεκτικού, Eulerian πολυγραφήματος (multigraph) $G(V, E)$, το πρόβλημα του Ελάχιστου Eulerian Υπογραφήματος είναι να βρεθεί το συνεκτικό, Eulerian, γενετικό υπογράφημα του G με τον ελάχιστο αριθμό ακμών. Προφανώς, το γράφημα G περιέχει έναν κύκλο Hamilton ανν περιέχει ένα συνεκτικό, Eulerian υπογράφημα με ακριβώς $|V|$ ακμές. Επομένως, το πρόβλημα του Ελάχιστου Eulerian Υπογραφήματος είναι $\mathcal{NP}$-πλήρες, αφού οποιοδήποτε συνεκτικό γράφημα μπορεί να γίνει Eulerian με διπλασιασμό των ακμών του. Είναι φανερό ότι αυτός ο μετασχηματισμός δεν επηρεάζει το μήκος του μεγαλύτερου απλού κύκλου.

Ένας αλγόριθμος προσέγγισης για αυτό το πρόβλημα είναι να σβηστούν οι ακμές ενός ελάχιστου γενετικού δέντρου από το G, και ενόσω το υπολειμματικό γράφημα περιέχει περισσότερες από $|V| - 1$ ακμές, να αφαιρούνται οι ακμές ενός απλού κύκλου. Αυτός ο απλός αλγόριθμος μπορεί εύκολα να εκτελεσθεί σε πολυωνυμικό χρόνο και τερματίζει με ένα συνεκτικό, Eulerian γράφημα με το πολύ $2(|V| - 1)$ ακμές. Συνεπώς είναι ένας 2-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το πρόβλημα του Ελάχιστου Eulerian Υπογραφήματος. □

2.4.1 Βέλτιστες Περιοδείες και Κύκλοι Hamilton

Ολοκληρώνουμε αυτή την παράγραφο, δείχνοντας ότι, δεδομένου ενός γραφήματος $G(V, E)$ και μιας διαμέρισης του G σε σταθερό αριθμό κλικών, τα αντίστοιχα στιγμιότυπα των TSP(1,2) και G-TSP μπορούν να αναχθούν σε πολυωνυμικό χρόνο στο πρόβλημα εύρεσης ενός κύκλου Hamilton.

Θεώρημα 2.5. *Δεδομένων ενός συνεκτικού γραφήματος $G(V, E)$ με n κορυφές και μιας διαμέρισης του G σε $\kappa > 1$ κλίκες, μια βέλτιστη λύση στο αντίστοιχο στιγμιότυπο του G-TSP/TSP(1,2) μπορεί να υπολογιστεί σε ντετερμινιστικό χρόνο $\mathcal{O}\big(n^{\kappa(2\kappa+3)}\big)/\mathcal{O}\big(n^{\kappa(2\kappa+1)}\big)$.*

Απόδειξη. Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι μια βέλτιστη G-TSP περιοδεία δεν μπορεί να έχει μήκος μεγαλύτερο από $n + 2(\kappa - 1)$. Έστω $T(C, M)$ το γράφημα κλικών για το G, και έστω $T_S(C, M_S)$ ένα γενετικό δέντρο του T. Επειδή το T (όπως και το G) είναι συνεκτικό, το συνολικό μήκος των ακμών του T_S είναι ακριβώς $\kappa - 1$. Για κάθε ακμή $e \in M_S$, προστίθεται μια ακμή e' παράλληλη στην e. Συγκεκριμένα, αν οι κλίκες C_i και C_j συνδέονται στο T_S με μια ακμή $e = \{v, w\}$, $v \in C_i, w \in C_j$, τότε προστίθεται μια ακμή $e' = \{w', v'\}$, $v' \in C_i, w' \in C_j$, όπου οι κορυφές v', w'

είναι διαφορετικές από τις κορυφές v, w, εφόσον τα μεγέθη $|C_i|, |C_j|$ το επιτρέπουν. Το μήκος της ακμής e' είναι το πολύ 3 στο αντίστοιχο στιγμιότυπο του G-TSP (το πολύ 1 για την ακμή $\{v', v\}$, 1 για την ακμή $\{v, w\}$, και το πολύ 1 για την ακμή $\{w, w'\}$). Αν το M'_S συμβολίζει το σύνολο των ακμών που δημιουργήθηκαν από αυτές τις προσθήκες, ο αλγόριθμος του Ελάχιστου Γενετικού Δέντρου για το G-TSP (π.χ. βλ. [62]) εγγυημένα παράγει μια περιοδεία με μήκος το πολύ ίσο με το συνολικό μήκος των ακμών του M'_S. Επομένως, το μήκος της βέλτιστης περιοδείας δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από $n+2(\kappa-1)$, και κάθε βέλτιστη περιοδεία περιέχει το πολύ $2(\kappa-1)$ συνδέσεις που δεν υπάρχουν στο E (μη-ακμές – non-edges).

Για να υπολογιστεί μια βέλτιστη περιοδεία αρκεί να υπολογιστεί το σύνολο των μη-ακμών που περιλαμβάνει και να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος του Θεωρήματος 2.4. Έστω $K = \mathcal{O}\big(n^{4(\kappa-1)}\big)$, και έστωσαν N_i, $i = 1, \ldots, K$, όλα τα υποσύνολα μη-ακμών του G που περιέχουν το πολύ $2(\kappa-1)$ στοιχεία, του κενού συνόλου συμπεριλαμβανομένου. Σχηματίζουμε τα γραφήματα $G_i(V, E \cup V_i)$, $i = 1, \ldots, K$, και καλούμε K φορές τον αλγόριθμο του Θεωρήματος 2.4. Η βέλτιστη περιοδεία δίνεται από τον κύκλο Hamilton που παράγεται για το Hamiltonian γράφημα G_i, το οποίο αντιστοιχεί στο N_i με το ελάχιστο συνολικό μήκος μη-ακμών (ανάμεσα σε όλα τα N_i που αντιστοιχούν σε Hamiltonian γραφήματα). Επομένως, μια βέλτιστη G-TSP περιοδεία για το G μπορεί να βρεθεί με το πολύ $\mathcal{O}\big(n^{4(\kappa-1)}\big)$ κλήσεις του αλγορίθμου του Θεωρήματος 2.4.

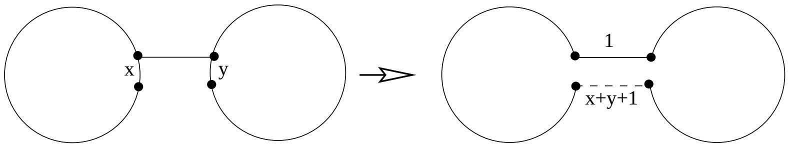
Όσον αφορά στο TSP(1,2), είναι φανερό ότι το μήκος μιας βέλτιστης περιοδείας δεν μπορεί να ξεπερνά το $n+\kappa-1$. Συνεπώς, το πολύ $\mathcal{O}\big(n^{2(\kappa-1)}\big)$ κλήσεις του αλγορίθμου του Θεωρήματος 2.4 απαιτούνται για τον υπολογισμό μιας βέλτιστης TSP(1,2) περιοδείας για το G. □

2.5 Γραφήματα με Μικρή Διάμετρο

Σε αυτή την ενότητα επεκτείνουμε τις ιδέες του 7/6-προσεγγιστικού αλγορίθμου για το TSP(1,2) των Papadimitriou και Yannakakis [117] για να βελτιώσουμε το λόγο προσέγγισης για το G-TSP σε γραφήματα με διάμετρο 3. Ο αλγόριθμος που παρουσιάζουμε βασίζεται στη χρήση ενός βέλτιστου 2-ταιριάσματος για τη δημιουργία μιας προσεγγιστικής περιοδείας.

Ένα *2-ταίριασμα* (2-matching) M_2 ενός γραφήματος $G(V, E)$ είναι ένα υποσύνολο ακμών ($M_2 \subseteq E$) στο οποίο κάθε κορυφή του V έχει βαθμό το πολύ 2. (βλ. [78] για μια λεπτομερή παρουσίαση). Ένα 2-ταίριασμα M_2 καλείται *απλό* (simple), εφόσον καμία ακμή του E δεν περιλαμβάνεται στο M_2 περισσότερο από μία φορά (δηλ. το M_2 δεν περιέχει κύκλους μήκους 2), και καλείται *τέλειο* (perfect), εφόσον όλες οι κορυφές του V έχουν βαθμό ακριβώς 2 στο M_2.

Ο υπολογισμός ενός μέγιστου απλού 2-ταιριάσματος ενός γραφήματος είναι ένα πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης που έχει μελετηθεί εκτενώς στο παρελθόν. Όταν οι ακμές του E έχουν βάρη, τότε ζητείται ένα απλό 2-ταίριασμα μέγιστου



Σχήμα 2.4: Ένα παράδειγμα συνένωσης κύκλων.

συνολικού βάρους, ενώ όταν οι ακμές δεν έχουν βάρη ζητείται ένα απλό 2-ταίριασμα με μέγιστο αριθμό ακμών. Ο Hartvigsen [78] παρουσίασε primal-dual αλγορίθμους πολυωνυμικού χρόνου για τον υπολογισμό ενός απλού 2-ταιριάσματος μέγιστου βάρους (maximum weighted, simple 2-matching), και ενός απλού 2-ταιριάσματος μέγιστου αριθμού ακμών που δεν περιέχει κύκλους μήκους 3 (maximum cardinality, simple, triangle-free 2-matching). Επιπλέον, διατύπωσε την εικασία ότι υπάρχει ένας primal-dual αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για τον υπολογισμό ενός απλού 2-ταιριάσματος μέγιστου βάρους που δεν περιέχει κύκλους μήκους 3 (maximum weighted, simple, triangle-free 2-matching) (βλ. επίσης [38]).

Προφανώς ένα 2-ταίριασμα μέγιστου βάρους μπορεί να μετατραπεί σε ένα 2-ταίριασμα ελάχιστου μήκους και αντίστροφα, θέτοντας τα βάρη των ακμών $w_{ij} = W - d_{ij}$, για κάποια αρκούντως μεγάλη ποσότητα W. Είναι γνωστό ότι το πρόβλημα του υπολογισμού ενός απλού, τέλειου, 2-ταιριάσματος ελάχιστου μήκους το οποίο περιέχει μόνο κύκλους μήκους τουλάχιστον $\kappa + 1$ (minimum length, perfect, simple, κ-cycle-free 2-matching) αποτελεί μια φυσιολογική χαλάρωση (relaxation) στο TSP, επειδή κάθε περιοδεία είναι η ίδια ένα απλό, τέλειο 2-ταίριασμα. Μάλιστα, η χαλάρωση γίνεται όλο και ακριβέστερη καθώς το κ τείνει στο $|V| - 1$, όταν δε $\kappa = |V| - 1$, τα δύο προβλήματα συμπίπτουν.

Ο αλγόριθμος των Papadimitriou και Yannakakis για το TSP(1,2) χρησιμοποιεί τη γνωστή τεχνική της συνένωσης (ή "μπαλώματος") υπο-περιοδειών (subtour patching). Αυτή η τεχνική χρησιμοποιείται για τη συνένωση δύο απλών κύκλων που καλύπτουν δύο ξένα υποσύνολα κορυφών $V_1, V_2 \subset V$ (υπο-περιοδείες) σε ένα μεγαλύτερο απλό κύκλο που καλύπτει το $V_1 \cup V_2$. Η συνένωση επιτυγχάνεται διαλέγοντας μία ακμή σε κάθε κύκλο, σβήνοντας αυτές τις δύο ακμές, και συνδέοντας τις τέσσερις κορυφές-άκρα με οποιονδήποτε από τους δύο άλλους τρόπους (Σχήμα 2.4). Η ανάλυση του αλγορίθμου που παρουσιάζεται στην [117] βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στο γεγονός ότι, για το TSP(1,2), οποιεσδήποτε δύο υπο-περιοδείες περιέχουν ακμές μήκους 2, μπορούν να συνενωθούν σε μια υπο-περιοδεία του ίδιου μήκους. Είναι φανερό ότι αυτή η ιδιότητα δεν ισχύει για το G-TSP σε γραφήματα με διάμετρο μεγαλύτερη από 2. Μολαταύτα, όταν η διάμετρος του γραφήματος είναι μικρή (π.χ. 3), το κόστος της συνένωσης είναι δυνατόν να περιορισθεί, και αυτό οδηγεί σε βελτίωση του λόγου προσέγγισης για αυτή την κατηγορία G-TSP στιγμιοτύπων. Επίσης χρησιμοποιούμε την ιδέα της [117], όπου η λύση κατασκευάζεται από ένα βέλτιστο, απλό, τέλειο 2-ταίριασμα του οποίου, στην πρώτη φάση, οι κύκλοι ενώνονται σε ομάδες που σχηματίζονται από τη λύση ενός άλλου προβλήματος ταιριάσματος.

Θεώρημα 2.6. *Υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης 22/15 για το G-TSP περιορισμένο σε γραφήματα με διάμετρο 3.*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε συνεκτικά γραφήματα $G(V, E)$ με n κορυφές. Αρχικά εξετάζουμε την περίπτωση που το G περιέχει έναν κύκλο Hamilton και η βέλτιστη περιοδεία έχει μήκος $\mathrm{TSP}_G = n$. Χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο του Hartvigsen [78] για να υπολογίσουμε ένα απλό, τέλειο 2-ταίριασμα μέγιστου αριθμού ακμών που δεν περιέχει κύκλους μεγέθους 3. Προφανώς, αφού το G είναι Hamiltonian, θα υπάρχει ένα τέτοιο 2-ταίριασμα με ακριβώς n ακμές.

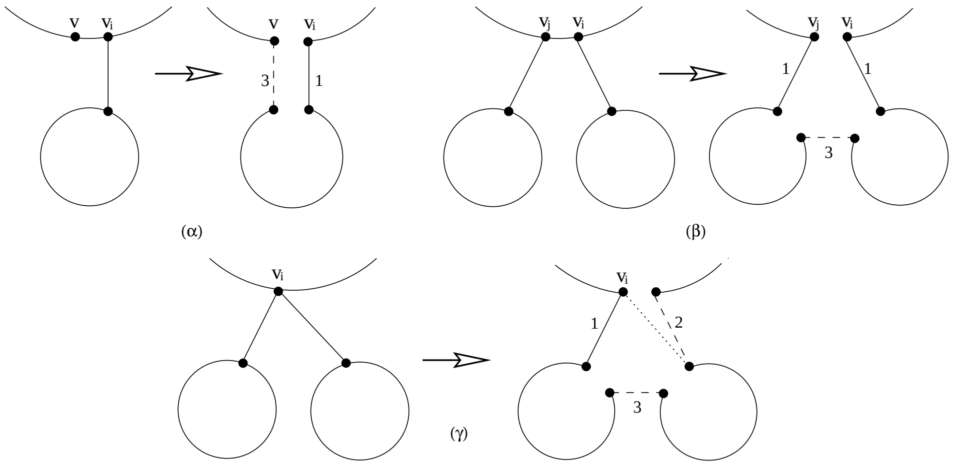
Έστω L το σύνολο των κύκλων ενός βέλτιστου 2-ταιριάσματος, και $|L| > 1$. Σχηματίζουμε ένα διμερές (bipartite) γράφημα B που έχει σαν κατηγορίες κορυφών τα σύνολα L και V. Το γράφημα B περιέχει μια ακμή από έναν κύκλο $l \in L$ σε μία κορυφή $v \in V$, αν η v δεν ανήκει στον κύκλο l και υπάρχει ακμή $\{w, v\} \in E$ από μια κορυφή w του l στην κορυφή v.

Επειδή το G περιέχει κύκλο Hamilton, μπορούμε να βρούμε ένα ταίριασμα στο διμερές γράφημα B που θα καλύπτει όλους τους κύκλους του συνόλου L. Υιοθετώντας την παρουσίαση της [117], κατασκευάζουμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $D(L, A)$ του οποίου το σύνολο κορυφών είναι το σύνολο των κύκλων L. Το γράφημα D περιέχει ένα τόξο (arc, κατευθυνόμενη ακμή) $(l, l') \in A$, αν ο κύκλος l έχει αντιστοιχηθεί από το ταίριασμα που υπολογίστηκε για το γράφημα B, σε μια κορυφή v του κύκλου l'. Προφανώς, επειδή κάθε κύκλος του L έχει αντιστοιχηθεί, μέσω του ταιριάσματος στο B, σε ακριβώς μία κορυφή v, το γράφημα D είναι μια συνάρτηση, δηλ. κάθε κορυφή του D έχει εξω-βαθμό (outdegree) ακριβώς 1. Μπορούμε να αναλύσουμε το γράφημα D όπως δείχνει το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 2.5 [117]. *Κάθε συνάρτηση D περιέχει ένα γενετικό υπογράφημα αποτελούμενο από ξένα ως προς τις κορυφές εσω-δέντρα (in-trees) βάθους 1 και μονοπάτια μήκους 2. Ένα τέτοιο υπογράφημα μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο.*

Από την κατασκευή του γραφήματος D, κάθε τόξο $(l, l') \in A$ αντιστοιχεί σε μία ακμή $\{v, v'\} \in E$, τέτοια ώστε η κορυφή v να ανήκει στον κύκλο l, η κορυφή v' να ανήκει στον κύκλο l', και ο l να έχει αντιστοιχηθεί στη v' από το ταίριασμα του B. Επομένως, αν δύο τόξα έχουν τον ίδιο κύκλο-προορισμό l', τότε οι αντίστοιχες ακμές προσπίπτουν σε διαφορετικές κορυφές του γραφήματος G. Όμως αυτό μπορεί να μην ισχύει όταν ένας κύκλος l' είναι προορισμός ενός τόξου και αφετηρία ενός άλλου.

Το γράφημα D μπορεί να αναλυθεί σε εσω-δέντρα και μονοπάτια όπως υποδεικνύει το Λήμμα 2.5. Όλοι οι κύκλοι που ανήκουν στις ίδιες συνεκτικές συνιστώσες συνενώνονται ώστε να σχηματίσουν ένα μεγαλύτερο απλό κύκλο. Αν μια συνεκτική



Σχήμα 2.5: Οι τρεις περιπτώσεις συνένωσης κύκλων.

συνιστώσα του D είναι ένα εσω-δέντρο, τότε αποτελείται από έναν κύκλο l (τη ρίζα του δέντρου), και άλλους κύκλους $l_1, \ldots, l_k$, που ο καθένας συνδέεται με μία διαφορετική κορυφή $v_1, \ldots, v_k$ του l. Θεωρούμε έναν προσανατολισμό του κύκλου l στη φορά των δεικτών του ρολογιού αρχίζοντας είτε από μια οποιαδήποτε κορυφή του l που δεν συνδέεται με κάποιο κύκλο l_i, εφόσον μια τέτοια κορυφή υπάρχει, είτε από μια οποιαδήποτε κορυφή, διαφορετικά. Κάθε φορά που συναντάμε μια κορυφή v_i (δηλ. το ταίρι του κύκλου l_i), εξετάζουμε την επόμενη κορυφή του l. Αν η επόμενη κορυφή δεν έχει αντιστοιχηθεί σε κάποιον από τους κύκλους l_j, $1 \leq j \leq k, j \neq i$, τότε ενώνουμε τον κύκλο l_i με τον l όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5.α. Σε διαφορετική περίπτωση (δηλ. η επόμενη κορυφή v_j να έχει αντιστοιχηθεί σε κάποιον κύκλο l_j από το ταίριασμα του B), ενώνουμε τους κύκλους l_i και l_j με τον l όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5.β.

Αν κάποια συνεκτική συνιστώσα είναι ένα μονοπάτι μήκους 2, μπορούμε να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Εφόσον και οι δύο ακμές προσπίπτουν στην ίδια κορυφή του μεσαίου κύκλου (γιατί αυτός μπορεί να είναι ο προορισμός της μιας ακμής και η αφετηρία της άλλης), οι τρεις εμπλεκόμενοι κύκλοι μπορούν να συνενωθούν όπως στο Σχήμα 2.5.γ. Διαφορετικά, η συνένωση μπορεί να γίνει είτε όπως στο Σχήμα 2.5.α, είτε όπως στο Σχήμα 2.5.β.

Στην περίπτωση του Σχήματος 2.5.β, η νέα ακμή που χρησιμοποιείται θα μπορούσε να έχει μήκος μέχρι και 5. Επειδή η διάμετρος του G είναι 3, τόσο είναι και η μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο κορυφών. Ομοίως, στην περίπτωση του Σχήματος 2.5.γ, η μια από τις νέες ακμές μπορεί να έχει μήκος το πολύ 3. Τέλος, στην περίπτωση του Σχήματος 2.5.α, η νέα ακμή έχει μήκος το πολύ 3. Επομένως, όλοι οι κύκλοι που θα σχηματιστούν από αυτή τη διαδικασία μπορούν στη συνέχεια να συνενωθούν μεταξύ τους σε οποιαδήποτε σειρά χωρίς επιπλέον κόστος, γιατί όλοι περιέχουν τουλάχιστον μια ακμή με μήκος 3. Αυτή η δεύτερη φάση συνενώσεων διαρκεί μέχρι όλοι οι κύκλοι να συνενωθούν σε μία μόνη περιοδεία.

Λήμμα 2.6. *Η περιοδεία που προκύπτει από την παραπάνω διαδικασία έχει μήκος το πολύ* $\frac{4}{3}n$.

Απόδειξη. Προφανώς το συνολικό μήκος της περιοδείας που προκύπτει είναι ίσο με n (το μήκος του αρχικού 2-ταιριάσματος) συν το συνολικό κόστος της διαδικασίας συνένωσης των κύκλων σε μια περιοδεία. Είδαμε ήδη ότι το κόστος της δεύτερης φάσης είναι μηδενικό. Συνεπώς αρκεί να αναλύσουμε το κόστος της πρώτης φάσης συνενώσεων.

Το επιπλέον κόστος από κάθε συνένωση του Σχήματος 2.5.α είναι 2. Αυτό το κόστος μπορεί να επιμεριστεί στις κορυφές του κύκλου l_i (τουλάχιστον 4), στην κορυφή v_i, και στην επόμενη κορυφή της v_i στον l, η οποία δεν χρεώνεται από κάποια άλλη συνένωση. Επομένως, το κόστος ανά κορυφή είναι το πολύ $\frac{1}{3}$. Κάθε συνένωση του Σχήματος 2.5.β κοστίζει 2. Αυτό το κόστος μπορεί να επιμεριστεί στις κορυφές των κύκλων l_i και l_j. Συνεπώς, κάθε κορυφή χρεώνεται με κόστος το πολύ $\frac{1}{4}$. Τελικά, κάθε συνένωση του Σχήματος 2.5.γ κοστίζει 3. Αυτό το κόστος μπορεί να επιμεριστεί στις κορυφές των τριών κύκλων που εμπλέκονται (τουλάχιστον 12 κορυφές). Δηλαδή, κάθε κορυφή χρεώνεται με $\frac{1}{4}$.

Είναι φανερό ότι καμία κορυφή δεν χρεώνεται από περισσότερες από μία συνενώσεις. Ο ισχυρισμός συνάγεται από το γεγονός ότι κάθε κορυφή χρεώνεται με κόστος το πολύ $\frac{1}{3}$. □

Στη συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση που το γράφημα $G(V, E)$ δεν περιέχει κάποιο κύκλο Hamilton. Σε αυτή την περίπτωση το G ενδέχεται να μην περιέχει ένα απλό, τέλειο 2-ταίριασμα που δεν περιέχει κύκλους μήκους 3, οπότε το μόνο που μπορούμε να υπολογίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο είναι ένα απλό 2-ταίριασμα μέγιστου βάρους (ή ελάχιστου μήκους). Αλγόριθμοι πολυωνυμικού χρόνου για αυτό το πρόβλημα παρουσιάζονται στις [78, 118].

Έστω $d_G(v, u)$ το μήκος του συντομότερου μονοπατιού μεταξύ δύο κορυφών v και u στο G, και έστω $\hat{G}$ το πλήρες βεβαρημένο γράφημα ορισμένο στο σύνολο κορυφών V, όπου για κάθε ζεύγος κορυφών $v, u \in V$, το βάρος της αντίστοιχης ακμής στο $\hat{G}$ είναι $w(v, u) = W - d_G(v, u)$, για κάποια αρκούντως μεγάλη ποσότητα W. Αρχικά υπολογίζουμε ένα απλό 2-ταίριασμα μέγιστου βάρους για το γράφημα $\hat{G}$.

Πρόταση 2.1. *Εαν* $W \geq \mathrm{diam}(G) + 1$, *τότε οποιοδήποτε απλό 2-ταίριασμα μέγιστου βάρους για το* $\hat{G}$ *είναι και τέλειο.*

Απόδειξη. Έστω $M_2^\star$ ένα απλό 2-ταίριασμα μέγιστου βάρους για το $\hat{G}$, και $V_1 \subseteq V$ το υποσύνολο των κορυφών που δεν περιλαμβάνεται σε κάποιο κύκλο του $M_2^\star$. Θα δείξουμε ότι δεν μπορεί να είναι $V_1 \neq \emptyset$.

Προφανώς, αν $|V_1| \geq 3$, μπορούμε να συνδέσουμε τις αντίστοιχες συνεκτικές συνιστώσες σε έναν κύκλο προσθέτοντας ακμές/βάρος στο $M_2^\star$. Επιπλέον, το 2-ταίριασμα που θα προκύψει θα συνεχίσει να είναι απλό.

Εξ' αιτίας της συνεκτικότητας του G, κάθε κορυφή $v \in V_1$, η οποία είναι απομονωμένη στο $M_2^\star$, συνδέεται μέσω μιας ακμής $e_v \in E$ σε κάποιο κύκλο l του $M_2^\star$. Επομένως, μπορούμε να παρεμβάλουμε την κορυφή v στον κύκλο l χρησιμοποιώντας την e_v και αυξάνοντας το βάρος του $M_2^\star$ τουλάχιστον κατά $W - 2$.

Τέλος αν ένα ζευγάρι κορυφών $v, w \in V_1$ έχουν ταίρι η μία την άλλη στο $M_2^\star$, τότε τουλάχιστον μία από αυτές (έστω v) συνδέεται μέσω μιας ακμής $e_v \in E$ σε κάποιο κύκλο l του $M_2^\star$. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ακμή e_v για να παρεμβάλουμε τις κορυφές v και w στον l αυξάνοντας το βάρος του $M_2^\star$ τουλάχιστον κατά $W - \mathrm{diam}(G)$. □

Έστω ότι ένα βέλτιστο απλό, τέλειο 2-ταίριασμα για το γράφημα G περιλαμβάνει n_2 ακμές μήκους 2 και n_3 ακμές μήκους 3. Ένα τέτοιο 2-ταίριασμα καλύπτει όλες τις κορυφές του V με απλούς κύκλους που είναι μεταξύ τους ξένοι ως προς τις κορυφές. Ένας κύκλος καλείται *μεικτός* όταν περιλαμβάνει κάποιες ακμές με μήκος μεγαλύτερο από 1, δηλ. όταν κάποιες ακμές του δεν ανήκουν στο E. Διαφορετικά, ο κύκλος θα καλείται *αμιγής*. Προφανώς, το μήκος μιας βέλτιστης περιοδείας θα είναι $\mathrm{TSP}_G \geq n + n_2 + 2n_3$.

Στην περίπτωση που δύο μεικτοί κύκλοι περιέχουν ακμές μήκους 3, μπορούν να συνενωθούν σε ένα μεγαλύτερο χωρίς επιπλέον κόστος. Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση που μια ακμή μήκους 1 συνδέει μια κορυφή ενός αμιγούς κύκλου με ένα από τα άκρα μιας ακμής μήκους 3 ενός μεικτού κύκλου. Επομένως, μπορούμε πάντα να υποθέσουμε ότι ο αλγόριθμος ξεκινά με ένα 2-ταίριασμα που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες: (i) όλες οι ακμές μήκους 3 περιλαμβάνονται σε έναν απλό μεικτό κύκλο l_3, και (ii) καμία ακμή μήκους 1 δεν συνδέει ένα άκρο μιας ακμής μήκους 3 του κύκλου l_3 με μια κορυφή ενός αμιγούς κύκλου.

Όπως και στην περίπτωση που το γράφημα G περιέχει έναν κύκλο Hamilton, σχηματίζουμε το διμερές γράφημα B, με τη διαφορά ότι η πρώτη κατηγορία κορυφών του B περιλαμβάνει μόνο τους αμιγείς κύκλους. Ομοίως, υπολογίζουμε ένα μέγιστο ταίριασμα στο B, αλλά επειδή το γράφημα G δεν είναι Hamiltonian, ένα τέτοιο ταίριασμα μπορεί να μην καλύπτει όλους τους αμιγείς κύκλους. Με βάση το μέγιστο ταίριασμα του B, κατασκευάζουμε το κατευθυνόμενο γράφημα D, που περιέχει ένα τόξο (l, l') όταν ο αμιγής κύκλος l έχει αντιστοιχηθεί σε μία κορυφή του κύκλου l', ο οποίος ενδεχομένως δεν είναι αμιγής. Το γράφημα D είναι μια μερική συνάρτηση (partial function) επειδή μπορεί να έχει κάποιες κορυφές με εξω-βαθμό 0, δηλ. κύκλους χωρίς ταίρι στο μέγιστο ταίριασμα του B. Σε αυτή την περίπτωση, από την ανάλυση του D σύμφωνα με το Λήμμα 2.5 προκύπτουν εσω-δέντρα βάθους 1, απλά μονοπάτια μήκους 2, και ενδεχομένως απομονωμένες κορυφές. Δεδομένης μιας τέτοιας ανάλυσης του D, μπορούμε να συνενώσουμε τους κύκλους που μετέχουν στα εσω-δέντρα και στα μονοπάτια όπως στο Σχήμα 2.5. Για την ανάλυση όμως χρειάζεται ένας πολύ προσεκτικός επιμερισμός του κόστους ανά κορυφή, κυρίως επειδή το 2-ταίριασμα μπορεί να περιέχει τρίγωνα και ο αριθμός των κορυφών που εμπλέκονται σε κάθε συνένωση είναι μικρότερος από ότι στο Λήμμα 2.6.

Έχει ήδη αναφερθεί ότι κάποιοι αμιγείς κύκλοι του L μπορεί να έχουν αντιστοιχηθεί από το ταίριασμα του B σε μια κορυφή ενός μεικτού κύκλου. Παρόλα αυτά, ένας μεικτός κύκλος δεν μπορεί να είναι η αφετηρία ενός τόξου, και η απόδειξη του Λήμματος 2.5 [117] υποδεικνύει ότι ένας μεικτός κύκλος δεν μπορεί να συμμετέχει σε ένα μονοπάτι μήκους 2. Επομένως, ένας μεικτός κύκλος μπορεί να είναι είτε η ρίζα ενός εσω-δέντρου, είτε μια απομονωμένη κορυφή.

Στην περίπτωση ενός μονοπατιού μήκους 2, το κόστος της συνένωσης επιμερίζεται σε όλες τις εμπλεκόμενες κορυφές, και κάθε κορυφή χρεώνεται με το πολύ $\frac{1}{3}$. Στην περίπτωση του Σχήματος 2.5.β, το επιπλέον κόστος είναι 2, και επιμερίζεται στις κορυφές των κύκλων l_i και l_j (τουλάχιστον 6). Τέλος, στην περίπτωση του Σχήματος 2.5.α, το επιπλέον κόστος είναι 2. Κάθε κορυφή του κύκλου l_i χρεώνεται με $\frac{4}{9}$, και οι κορυφές v και v_i χρεώνονται με το πολύ $\frac{1}{3}$ η καθεμία.

Οι κύκλοι που σχηματίζονται από αυτή τη φάση συνενώσεων και ο μεικτός κύκλος l_3 μπορούν να συνενωθούν σε έναν απλό κύκλο l_1 χωρίς επιπλέον κόστος, γιατί όλοι περιέχουν τουλάχιστον μία ακμή μήκους 3. Έστω I_2 το σύνολο των απομονωμένων μεικτών κύκλων που έχουν απομείνει, και έστω I_1 το σύνολο των αμιγών κύκλων που έχουν απομείνει. Κάθε κύκλος $l \in I_2$ μπορεί να συνενωθεί με τον l_1 με επιπλέον κόστος το πολύ 1, γιατί ο l περιέχει τουλάχιστον μια ακμή μήκους 2. Αυτό το κόστος μπορεί να επιμεριστεί στις κορυφές του l, που είναι τουλάχιστον 3. Ενόσω το I_1 δεν είναι κενό, εξ' αιτίας της συνεκτικότητας του G, υπάρχει ένας κύκλος $l \in I_1$ που συνδέεται με την τρέχουσα υπο-περιοδεία με ακμή μήκους 1, και συνεπώς ο l μπορεί να συνενωθεί με την τρέχουσα υπο-περιοδεία με επιπλέον κόστος το πολύ 2.

Αν ο μεικτός κύκλος l_3 αποτελεί τη ρίζα ενός εσω-δέντρου που προκύπτει από την ανάλυση του D, τότε η ιδιότητα (ii) υποδεικνύει ότι μια ακμή μήκους το πολύ 2 προηγείται κάθε κορυφής του l_3 που χρεώνεται με μη μηδενικό κόστος. Επίσης, αν ο l_3 αποτελεί μια απομονωμένη κορυφή στην ανάλυση του D, τότε καμία κορυφή του δεν χρεώνεται με μη μηδενικό κόστος. Επομένως, τουλάχιστον n_3 κορυφές χρεώνονται με μηδενικό κόστος. Όσον αφορά στις υπόλοιπες κορυφές των μεικτών κύκλων, που είναι τουλάχιστον n_2, αυτές χρεώνονται με κόστος το πολύ $\frac{1}{3}$ η καθεμία. Τέλος, έστω n_1 ο αριθμός των κορυφών των απομονωμένων αμιγών κύκλων του συνόλου I_1. Προφανώς, το πολύ $n' = n - n_1 - n_2 - n_3$ κορυφές χρεώνονται με κόστος το πολύ $\frac{4}{9}$ από τη φάση των συνενώσεων των εσω-δέντρων και των μονοπατιών του D, και επιπλέον το σύνολο I_1 δεν μπορεί να περιλαμβάνει περισσότερους από $\frac{n_1}{3}$ αμιγείς κύκλους.

Έστω $v_1, \ldots, v_n, v_1$ μια βέλτιστη περιοδεία και U το σύνολο των κορυφών v_i τέτοιων ώστε η ακμή $\{v_i, v_{i+1}\} \notin E$, η v_i ανήκει σε έναν κύκλο l, και η v_{i+1} ανήκει σε έναν διαφορετικό κύκλο l'. Έστω z ο αριθμός των κύκλων που περιέχουν μία κορυφή από το σύνολο U. Προφανώς, το μήκος της βέλτιστης περιοδείας δεν μπορεί να είναι μικρότερο του $n + z$. Επίσης, επειδή το γράφημα D σχηματίστηκε από ένα μέγιστο ταίριασμα στο γράφημα B, ο αριθμός των απομονωμένων αμιγών κύκλων που περιέχονται στο I_1 δεν μπορεί να ξεπερνά το z.

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι ακόλουθες ανισότητες ισχύουν για το μήκος της περιοδείας H_G η οποία παράγεται από τη διαδικασία που περιγράφηκε.

$$
\begin{aligned}
l(H_G) &\leq n + n_2 + 2n_3 + \frac{4}{9}n' + \frac{n_2}{3} + 2|I_1| \\
&\leq n + n_2 + 2n_3 + \frac{4}{9}n' + \frac{n_2}{3} + \frac{7}{15}n_1 + \frac{9}{15}z \\
&\leq n + \frac{7}{15}(n_1 + n_2 + n_3 + n') + n_2\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{7}{15}\right) + 2n_3\left(1 - \frac{7}{30}\right) + \frac{9}{15}z \\
&\leq \frac{22}{15}n + \frac{13}{15}n_2 + \frac{23}{30}(2n_3) + \frac{9}{15}z \\
&\leq \frac{22}{15}n + \frac{13}{15}(n_2 + 2n_3) + \frac{9}{15}z \\
&\leq \frac{22}{15}(n + \max\{n_2 + 2n_3, z\})
\end{aligned}
$$

□

Παρατήρηση. Στην [78], διατυπώνεται η εικασία ότι υπάρχει ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για τον υπολογισμό ενός απλού 2-ταιριάσματος μέγιστου βάρους που δεν περιέχει κύκλους μήκους 3 (επίσης βλ. [38]). Με δεδομένο έναν τέτοιο αλγόριθμο, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το G-TSP προσεγγίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο σε λόγο 7/5 για γραφήματα διαμέτρου 3, και σε λόγο 17/12 για γραφήματα διαμέτρου 4 (επίσης βλ. [54]).

2.6 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετήσαμε την επίδραση διαφόρων γραφοθεωρητικών παραμέτρων στην προσεγγισιμότητα των TSP(1,2) και G-TSP. Αρχικά αποδείξαμε ότι η προσέγγιση των TSP(1,2) και G-TSP σε πυκνά γραφήματα είναι ουσιαστικά το ίδιο δύσκολη με την προσέγγιση του TSP(1,2) στη γενική περίπτωση. Από την άλλη πλευρά, η προσέγγιση του TSP(1,2) είναι ευκολότερη σε γραφήματα με μικρά Σύνολα Ανεξαρτησίας. Ξεκινώντας από αυτό το γεγονός, παρουσιάζουμε τον πρώτο 3/2-προσεγγιστικό $\mathcal{NC}$ αλγόριθμο για το TSP(1,2). Επιπλέον, αν το γράφημα εισόδου $G(V,E)$ έχει $\alpha(G) \leq \beta|V|$, τότε ο αλγόριθμος επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης $(1+\beta)$.

Επίσης δείξαμε ότι, δεδομένης μιας διαμέρισης του γραφήματος εισόδου σε σταθερό αριθμό από κλίκες, τα TSP(1,2) και G-TSP μπορούν να επιλυθούν με βέλτιστο τρόπο σε πολυωνυμικό χρόνο. Τέλος, γενικεύσαμε τις ιδέες και την ανάλυση της

[117], και αποδείξαμε ότι το G-TSP μπορεί να προσεγγισθεί σε λόγο 22/15 για γραφήματα με διάμετρο 3.

Ένα πολύ ενδιαφέρον ανοικτό πρόβλημα αφορά στην προσεγγισιμότητα του G-TSP για πυκνά γραφήματα εισόδου. Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1 συνεπάγεται ότι η προσέγγιση του G-TSP σε πυκνά γραφήματα είναι το ίδιο δύσκολη με την προσέγγιση του TSP(1,2) στη γενική περίπτωση. Αυτό σημαίνει ότι το G-TSP σε πυκνά γραφήματα μπορεί να προσεγγίζεται σε λόγο μικρότερο του 3/2, χωρίς αυτό να επηρεάζει την προσεγγισιμότητα του G-TSP στη γενική περίπτωση. Επειδή τα πυκνά γραφήματα έχουν μικρή σταθερή διάμετρο, το γεγονός ότι το G-TSP σε γραφήματα διαμέτρου 3 προσεγγίζεται σε λόγο $22/15 < 3/2$ μπορεί να θεωρηθεί σαν ένδειξη σε αυτή την κατεύθυνση.

Σε κάθε περίπτωση θα ήταν ενδιαφέρουσα η ύπαρξη μιας αναγωγής που διατηρεί το λόγο προσέγγισης, από ένα αυθαίρετο στιγμιότυπο του G-TSP σε ένα πυκνό στιγμιότυπο του ίδιου προβλήματος. Το βασικό εμπόδιο στο σχεδιασμό μιας τέτοιας αναγωγής είναι η δυσκολία συσχέτισης των αποστάσεων των κορυφών στο πυκνό γράφημα με τις αποστάσεις των κορυφών στο αρχικό γράφημα. Συγκεκριμένα, το πρόβλημα είναι ότι κάποιες κορυφές που είναι σε μεγάλη απόσταση στο αρχικό γράφημα, αναγκαστικά θα βρίσκονται σε μικρή απόσταση στο πυκνό γράφημα. Επιπλέον, αν κανείς δοκιμάσει να αρχίσει από γραφήματα με σταθερή διάμετρο, φαίνεται ότι πρέπει να επιλύσει ένα πρόβλημα παρόμοιο με τη διαμέριση σε κλίκες, το οποίο είναι $\mathcal{NP}$-πλήρες. Από την άλλη πλευρά, οι ιδέες που χρησιμοποιούμε για την προσέγγιση του G-TSP σε γραφήματα με διάμετρο 3 δεν αρκούν για τη βελτίωση του λόγου προσέγγισης στην κατηγορία των πυκνών γραφημάτων.

Ένα άλλο πολύ ενδιαφέρον ανοικτό πρόβλημα είναι η Εικασία 2.1 σχετικά με τον ελάχιστο αριθμό των εξωτερικών ακμών που περιέχονται σε έναν κύκλο Hamilton ενός Hamiltonian γραφήματος που έχει διαμεριστεί σε κ κλίκες. Συγκεκριμένα, έχουμε ισχυρές πειραματικές ενδείξεις ότι, για κάθε Hamiltonian γράφημα G και κάθε διαμέριση σε κ κλίκες, υπάρχει ένας κύκλος Hamilton με το πολύ $2(\kappa - 1)$ εξωτερικές ακμές. Το γεγονός ότι αυτή η εικασία μπορεί να θεωρηθεί γενίκευση του Θεωρήματος του Smith καθιστά την απόδειξή της εξαιρετικά ενδιαφέρον γραφοθεωρητικό πρόβλημα.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε γραφοθεωρητικά προβλήματα βελτιστοποίησης που εμφανίζονται στην περιοχή της Ανάθεσης Συχνοτήτων σε Ραδιοφωνικά Δίκτυα. Όπως θα δούμε, το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης (radio labelling), που εμφανίζεται στην περιοχή της Ανάθεσης Συχνοτήτων, είναι ισοδύναμο με το TSP(1,2) στο συμπληρωματικό γράφημα. Επιπλέον στην πλειοψηφία των πρακτικών εφαρμογών, τα στιγμιότυπα εισόδου για το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης είτε είναι επίπεδα γραφήματα, είτε έχουν μικρό χρωματικό αριθμό και συνεπώς μικρό μέγεθος Μέγιστης Κλίκας. Επομένως τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου που αφορούν στο TSP(1,2) έχουν σημαντικές θεωρητικές συνέπειες και πρακτικές εφαρμογές στην περιοχή της Ανάθεσης Συχνοτήτων.

Κεφάλαιο 3

Προβλήματα Ανάθεσης Συχνοτήτων

Κατά το σχεδιασμό ραδιοφωνικών δικτύων (radio networks) ανακύπτουν προβλήματα βελτιστοποίησης που σχετίζονται με την ανάθεση συχνοτήτων/καναλιών εκπομπής στους πομπούς (μεταδότες σήματος – transmitters) ώστε να αποφευχθούν οι παρεμβολές και να ελαχιστοποιηθεί το χρησιμοποιούμενο φάσμα. Τέτοιου είδους προβλήματα συνήθως αναφέρονται σαν Προβλήματα Ανάθεσης Συχνοτήτων (ΠΑΣ – Frequency Assignment Problem, FAP). Στην πραγματικότητα το ΠΑΣ συνιστά ένα γενικό πλαίσιο στο οποίο εντάσσεται μια πλειάδα προβλημάτων που ανακύπτουν στην πράξη κατά το σχεδιασμό ραδιοφωνικών δικτύων. Ο Hale [74] επιχείρησε μια προσπάθεια τυπικού ορισμού και κατηγοριοποίησης αυτών των προβλημάτων σαν προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης.

Ο λόγος για τον οποίο το ΠΑΣ μελετάται εκτενώς από την οπτική γωνία των αλγορίθμων προσέγγισης τα τελευταία χρόνια είναι ότι το φάσμα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μετάδοση πληροφορίας μέσω ραδιοφωνικών δικτύων (radio spectrum) είναι περιορισμένο και αποτελεί ένα πολύτιμο φυσικό αγαθό. Επιπλέον, οι συνεχώς αυξανόμενες απαιτήσεις σε φάσμα εξ' αιτίας των σύγχρονων αναγκών για επικοινωνία τείνουν να υπερκεράσουν την αύξηση στο εκμεταλλεύσιμο φάσμα εξ' αιτίας των τεχνολογικών εξελίξεων. Πολλές πολιτικές και στρατιωτικές εφαρμογές απαιτούν πρόσβαση στο φάσμα, και οι απαιτήσεις σε κανάλια επικοινωνίας αυξάνονται συνεχώς. Συνεπώς, η αδήριτη ανάγκη για αποτελεσματική διαχείριση του φάσματος απαιτεί την ανάθεση συχνοτήτων κατά βέλτιστο ή σχεδόν βέλτιστο τρόπο. Από την άλλη πλευρά, το Πρόβλημα Ανάθεσης Συχνοτήτων αποτελεί ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης, και περιέχει το γνωστό πρόβλημα χρωματισμού γραφημάτων σαν ειδική περίπτωση.

Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζονται τα προβλήματα του κ-χρωματισμού (κ-coloring) και της κ-αρίθμησης (κ-labelling), που αποτελούν τα γραφοθεωρητικά μοντέλα για το σχήμα περιορισμών παρεμβολής Συχνότητας-Απόστασης (Frequency-Distance interference constraints) στις περιπτώσεις των επαναχρησιμοποιήσιμων (reusable) και μη-επαναχρησιμοποιήσιμων (non-reusable) καναλιών αντίστοιχα. Η θεωρητική μελέτη επικεντρώνεται στα προβλήματα του ραδιο-χρωματισμού (2-χρωματισμός) και της ραδιο-αρίθμησης (2-αρίθμησης). Τα προβλήματα αυτά παρέχουν το γραφοθεωρητικό μοντέλο για τους περιορισμούς παρεμβολής από εκπομπή σε κοινό κανάλι και σε γειτονικά κανάλια, οι οποίοι συνήθως εφαρμόζονται στην πράξη.

Για τα προβλήματα του ραδιο-χρωματισμού και της ραδιο-αρίθμησης αποδεικνύουμε ότι παραμένουν $\mathcal{NP}$-πλήρη ακόμα και για γραφήματα με διάμετρο 2. Επίσης δείχνουμε ότι οποιοσδήποτε αλγόριθμος προσέγγισης για το χρωματισμό γραφημάτων μπορεί να εφαρμοστεί στο πρόβλημα του ραδιο-χρωματισμού. Για το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης, αποδεικνύουμε ότι είναι ισοδύναμο με το TSP(1,2) στο συμπληρωματικό γράφημα. Συνεπώς, ο $\mathcal{NC}$ αλγόριθμος της Ενότητας 2.3 προσεγγίζει τη βέλτιστη λύση κατά ένα αθροιστικό παράγοντα που φράσσεται άνω από το χρωματικό αριθμό του γραφήματος εισόδου, ενώ ο αλγόριθμος της Ενότητας 2.4 μπορεί να εφαρμοστεί για τη βέλτιστη επίλυση σε πολυωνυμικό χρόνο του προβλήματος της ραδιο-αρίθμησης σε επίπεδα γραφήματα. Το κεφάλαιο κλείνει με εφαρμογή της μεθόδου ανταγωνιστικής ανάλυσης (competitive analysis) για το πρόβλημα της on-line ραδιο-αρίθμησης.

Από τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου, αυτά που αναφέρονται στα προβλήματα του ραδιο-χρωματισμού και της ραδιο-αρίθμησης παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά στις εργασίες [55, 56], και αυτά που αναφέρονται στο πρόβλημα της on-line ραδιο-αρίθμησης παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά στις [51, 55].

3.1 Εισαγωγή

Σε ένα ραδιοφωνικό δίκτυο (radio network) η ακτίνα μετάδοσης των πομπών συνήθως επικαλύπτεται. Αν υποθέσουμε ότι ένας δέκτης συντονίζεται σε κάποιο συγκεκριμένο κανάλι συχνότητας, είναι γνωστό ότι όταν υπάρχουν παρεμβολές από άλλους πομπούς της περιοχής, το λαμβανόμενο σήμα υποβαθμίζεται. Οι παρεμβολές μπορούν να δημιουργούνται από αναμεταδότες που μεταδίδουν στο ίδιο κανάλι, αλλά και από πομπούς που μεταδίδουν σε φασματικά κοντινά κανάλια, αφού πρακτικά ούτε οι πομποί αλλά ούτε και οι δέκτες λειτουργούν ακριβώς στο προκαθορισμένο κανάλι.

Το Πρόβλημα της Ανάθεσης Συχνοτήτων (ΠΑΣ – Frequency Assignment Problem, FAP) σχετίζεται με τον καθορισμό του καναλιού εκπομπής ενός συνόλου πομπών (transmitters), ώστε να ελαχιστοποιηθούν οι παρεμβολές (interference) και να γίνει βέλτιστη αξιοποίηση του φάσματος. Το ΠΑΣ μπορεί να οριστεί σαν πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης ως εξής: Δεδομένου ενός συνόλου πομπών σε καθέναν από τους οποίους πρέπει να ανατεθεί ένα κανάλι εκπομπής, και ενός συνόλου περιορισμών παρεμβολής (interference constraints) για τα ζεύγη των πομπών, να υπολογιστεί η ανάθεση καναλιών που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς και ελαχιστοποιεί το χρησιμοποιούμενο εύρος ζώνης φάσματος (bandwidth).

Ο Hale [74] περιέγραψε διάφορες παραλλαγές του ΠΑΣ σαν πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Οι περισσότερες παραλλαγές διαφοροποιούνται στο είδος και τον τρόπο ορισμού των περιορισμών, και στη συνάρτηση βελτιστοποίησης.

Η πιο συνηθισμένη αναπαράσταση του ΠΑΣ είναι μέσω ενός γραφήματος παρεμβολών (interference graph). Κάθε κορυφή του γραφήματος παρεμβολών αντιστοιχεί σε έναν πομπό, ενώ κάθε ακμή αναπαριστά έναν περιορισμό παρεμβολής, δηλαδή έναν περιορισμό για τα κανάλια που μπορούν να ανατεθούν στους γειτονικούς πομπούς, ώστε να αποφευχθεί το ενδεχόμενο της παρεμβολής. Αξίζει να σημειωθεί ότι στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές, τα γραφήματα παρεμβολών έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες, όπως επιπεδότητα (planarity) ή/και μικρό χρωματικό αριθμό, εξ' αιτίας της γεωγραφικής κατανομής των πομπών. Μάλιστα, μερικές φορές τα γραφήματα παρεμβολών θεωρείται ότι έχουν κάποια κανονική δομή η οποία διευκολύνει την ανάθεση καναλιών (π.χ. πλέγματα (lattices) [106]), υπόθεση η οποία είναι πολύ περιοριστική, αφού προϋποθέτει μεγάλη κανονικότητα της γεωγραφικής κατανομής των πομπών και της μορφολογίας του εδάφους.

Τα κανάλια εκπομπής συνήθως θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένα στο ραδιοφωνικό φάσμα και ταυτοποιούνται με χρήση φυσικών αριθμών που αρχίζουν από τη μονάδα (επίσης βλ. [70, 74]). Σε αυτό το μοντέλο, τα κανάλια εκπομπής που αντιστοιχούν σε γειτονικούς φυσικούς αριθμούς αντιμετωπίζονται σαν γειτονικά.

Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές σχεδιασμού ραδιοφωνικών δικτύων, αντί για τον ορισμό περιορισμών παρεμβολής για κάθε ζευγάρι πομπών, το ΠΑΣ ορίζεται με τον καθορισμό των ελαχίστων γεωγραφικών αποστάσεων που πρέπει να χωρίζουν τους πομπούς, ώστε να επιτρέπεται η χρήση καναλιών σε συγκεκριμένη φασματική απόσταση. Αυτός ο τρόπος ορισμού καλείται σχήμα περιορισμών Συχνότητας-Απόστασης (Frequency-Distance constraints) [74]. Ένα σχήμα περιορισμών Συχνότητας-Απόστασης τάξης κ ορίζεται από ένα σύνολο κ+1 γεωγραφικών αποστάσεων $\{D_0, D_1, \ldots, D_\kappa\}$, $D_0 \geq D_1 \geq \cdots \geq D_\kappa$, όπου η απόσταση D_κ ορίζει την ελάχιστη επιτρεπόμενη απόσταση μεταξύ δύο πομπών, και η απόσταση D_x, για κάθε $x \in \{0, \ldots, \kappa-1\}$, ορίζει την ελάχιστη γεωγραφική απόσταση μεταξύ δύο πομπών που μπορούν να χρησιμοποιούν κανάλια σε απόσταση ακριβώς x. Για παράδειγμα, αν δύο πομποί απέχουν μεταξύ τους απόσταση τουλάχιστον D_2, και ο ένας εκπέμπει στο κανάλι c, τότε ο άλλος μπορεί να εκπέμπει σε οποιοδήποτε κανάλι εκτός των $\{c-1, c, c+1\}$. Αν η γεωγραφική απόσταση των πομπών είναι τουλάχιστον D_1, τότε ο δεύτερος μπορεί να εκπέμπει σε οποιοδήποτε κανάλι εκτός του c.

Το πρόβλημα του κ-χρωματισμού έχει προταθεί σαν ένα γραφοθεωρητικό μοντέλο για το σχήμα περιορισμών Συχνότητας-Απόστασης (π.χ. [81]). Στον κ-χρωματισμό ζητείται μία συνάρτηση/ανάθεση $X_\kappa : V \mapsto \{1, \ldots, \nu\}$, η οποία να ικανοποιεί τους περιορισμούς Συχνότητας-Απόστασης για τις γραφοθεωρητικές αποστάσεις $D_0 = \kappa + 1, D_1 = \kappa, \ldots, D_\kappa = 1$, και να ελαχιστοποιεί το μεγαλύτερο αριθμό καναλιού ν που έχει ανατεθεί σε κάποιο πομπό (color span). Μια άλλη διατύπωση των περιορισμών είναι ότι, για όλους τους ακεραίους $x \in \{0, 1, \ldots, \kappa\}$, δύο κορυφές $v, u \in V$ επιτρέπεται να χρησιμοποιούν κανάλια σε απόσταση x, δηλ. $|X_\kappa(v) - X_\kappa(u)| = x$, μόνο αν αυτές βρίσκονται σε απόσταση τουλάχιστον $\kappa - x + 1$ στο υποκείμενο γράφημα παρεμβολών. Αξίζει να σημειωθεί ότι το πρόβλημα του κ-χρωματισμού αποτελεί γενίκευση του γνωστού προβλήματος Ελάχιστου Χρωματισμού Γραφημάτων, το οποίο αντιστοιχεί στον 1-χρωματισμό.

Σε αυτό το κεφάλαιο εστιάζουμε στο πρόβλημα του 2-χρωματισμού γραφημάτων, ο οποίος καλείται και ραδιο-χρωματισμός (radio coloring). Το πρόβλημα του ραδιο-χρωματισμού αποτελεί το γραφοθεωρητικό μοντέλο για τους περιορισμούς παρεμβολής από εκπομπή σε κοινά κανάλια (co-channel interference constraints) και σε γειτονικά κανάλια (adjacent-channel interference constraints), οι οποίοι συνήθως εφαρμόζονται στην πράξη.

Στην περίπτωση του ραδιο-χρωματισμού, τα κανάλια εκπομπής είναι επαναχρησιμοποιήσιμα (reusable), με την έννοια ότι αν δύο πομποί είναι αρκούντως απομακρυσμένοι, τότε μπορούν να εκπέμπουν στο ίδιο κανάλι. Υπάρχουν όμως πρακτικές εφαρμογές όπου, επειδή οι πομποί καλύπτουν μια περιορισμένη γεωγραφική περιοχή (π.χ. στην ίδια πόλη), δεν επιτρέπεται περισσότεροι του ενός πομπού να εκπέμπουν στο ίδιο κανάλι. Σε αυτή την περίπτωση τα κανάλια καλούνται μη-επαναχρησιμοποιήσιμα (non-reusable), και η απόσταση D_0 στο σχήμα περιορισμών Συχνότητας-Απόστασης θεωρείται άπειρη ($D_0 = \infty$). Το μοντέλο μη-επαναχρησιμοποιήσιμων καναλιών χρησιμοποιείται επίσης για τον υπολογισμό κάτω φραγμάτων στις τιμές των βέλτιστων λύσεων στιγμιοτύπων με επαναχρησιμοποιήσιμα κανάλια (π.χ. [2, 119]). Επειδή έστω και η προσεγγιστική επίλυση μερικών κατηγοριών τέτοιων στιγμιοτύπων αποτελεί ένα εξαιρετικά δύσκολο πρόβλημα, αυτά τα κάτω φράγματα, που συνήθως είναι ευκολότερο να υπολογιστούν, χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση των λύσεων που παράγονται από ευριστικές τεχνικές.

Το πρόβλημα της κ-αρίθμησης είναι το ανάλογο του κ-χρωματισμού στην περίπτωση των μη-επαναχρησιμοποιήσιμων καναλιών. Στην κ-αρίθμηση, δεδομένου ενός γραφήματος παρεμβολών $G(V, E)$, ζητείται μια συνάρτηση $L_\kappa : V \mapsto \{1, \ldots, \nu\}$, η οποία να ικανοποιεί τους περιορισμούς Συχνότητας-Απόστασης για τις αποστάσεις $D_0 = \infty, D_1 = \kappa, \ldots, D_\kappa = 1$, και να ελαχιστοποιεί το μεγαλύτερο αριθμό καναλιού ν που έχει ανατεθεί σε κάποιον πομπό (label span). Προφανώς, επειδή η απόσταση D_0 θεωρείται άπειρη, σε ένα συνεκτικό γράφημα G, κανένα ζευγάρι κορυφών δεν μπορεί να έχει το ίδιο κανάλι. Σε αυτό το κεφάλαιο, επικεντρώνουμε στη μελέτη της ραδιο-αρίθμησης (2-αρίθμηση – radio labelling).

3.1.1 Ορισμοί

Στο πρόβλημα του ελάχιστου χρωματισμού γραφημάτων, το ζητούμενο είναι μια ανάθεση χρωμάτων στις κορυφές, η οποία δεν αναθέτει το ίδιο χρώμα σε κανένα ζευγάρι γειτονικών κορυφών και ελαχιστοποιεί τον αριθμό χρωμάτων που χρησιμοποιούνται. Δεδομένου ενός γραφήματος $G(V,E)$, ο αριθμός χρωμάτων που χρησιμοποιεί ένας βέλτιστος χρωματισμός ονομάζεται *χρωματικός αριθμός* του G, και συμβολίζεται $\chi(G)$. Είναι γνωστό ότι είναι $\mathcal{NP}$-δύσκολη ακόμη και η αποδοτική προσέγγιση του χρωματικού αριθμού γραφημάτων στη γενική περίπτωση [111, 47]. Παρόλα αυτά, υπάρχουν κάποιοι αλγόριθμοι προσέγγισης πολυωνυμικού χρόνου, οι οποίοι επιτυγχάνουν μεγαλύτερους λόγους προσέγγισης [75, 93].

Η ακόλουθη γενίκευση του χρωματισμού γραφημάτων προκύπτει από την εφαρμογή του σχήματος περιορισμών Συχνότητας-Απόστασης σε μη βεβαρημένα γραφήματα.

Ορισμός 3.1. (κ-χρωματισμός)
Εισοδος: Ένα γράφημα $G(V,E)$.
Λυση: Ένας έγκυρος κ-χρωματισμός του G, δηλαδή μια συνάρτηση $X_\kappa : V \mapsto \{1,\ldots,\nu\}$ η οποία, για κάθε ζευγάρι κορυφών $v,u \in V$, έχει $|X_\kappa(v) - X_\kappa(u)| = x$, $x \in \{0,1,\ldots,\kappa\}$, μόνο εφόσον $d(v,u) \geq \kappa - x + 1$.
Στοχος: Ελαχιστοποίηση του μέγιστου αριθμού καναλιού ν που έχει ανατεθεί από την X_κ (color span).

Στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου θα μελετήσουμε το πρόβλημα του 2-χρωματισμού, το οποίο καλείται επίσης ραδιο-χρωματισμός (radio coloring). Ο ραδιο-χρωματισμός αντιστοιχεί σε περιορισμούς Συχνότητας-Απόστασης τάξης 2, και τυποποιεί τους περιορισμούς εκπομπής σε κοινό κανάλι (co-channel constraints) και σε γειτονικά κανάλια (adjacent-channel constraints).

Πρέπει να σημειωθεί ότι το πρόβλημα του ραδιο-χρωματισμού ενός γραφήματος G είναι διαφορετικό από το πρόβλημα του χρωματισμού του τετραγώνου του G, που συμβολίζεται με G^2. Στο G^2 συνδέονται με ακμή όλες οι κορυφές που βρίσκονται σε απόσταση 1 ή 2 στο G. Η διαφορά είναι ότι στο χρωματισμό του G^2, ο στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του αριθμού των διαφορετικών χρωμάτων που χρησιμοποιούνται (color order), ενώ στο ραδιο-χρωματισμό του G ο στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του μέγιστου καναλιού/χρώματος που χρησιμοποιείται (color span). Για παράδειγμα, αν το γράφημα εισόδου είναι το $K_{m,m}$ (πλήρες διμερές γράφημα με m κορυφές σε κάθε κατηγορία), τότε $K^2_{m,m} = K_{2m}$ (πλήρες γράφημα με $2m$ κορυφές). Είναι φανερό ότι $\chi\big(K^2_{m,m}\big) = 2m$, ενώ $X_2(K_{m,m}) = 2m+1$.

Ορισμός 3.2. (κ-αρίθμηση)
Εισοδος: Ένα γράφημα $G(V,E)$.
Λυση: Μια έγκυρη κ-αρίθμηση του G, δηλαδή μια συνάρτηση $\Lambda_\kappa : V \mapsto \{1,\ldots,\nu\}$ η οποία, για κάθε ζευγάρι κορυφών $v,u \in V$, έχει $|\Lambda_\kappa(v) - \Lambda_\kappa(u)| = x$, $x \in \{1,\ldots,\kappa\}$, μόνο εφόσον $d(v,u) \geq \kappa - x + 1$.
Στοχος: Ελαχιστοποίηση του μέγιστου αριθμού καναλιού ν που έχει ανατεθεί από την Λ_κ (label span).

Ο ορισμός του προβλήματος της κ-αρίθμησης ήρθε σε γνώση μας από τον F. Harary [77]. Η κ-αρίθμηση μπορεί να θεωρηθεί σαν η περίπτωση του κ-χρωματισμού όπου η ελάχιστη απόσταση για την επαναχρησιμοποίηση ενός καναλιού είναι πολύ μεγάλη, πρακτικά άπειρη, δηλ. $D_0 = \infty$. Συνεπώς, η επαναχρησιμοποίηση ενός καναλιού δεν επιτρέπεται, και όλες οι κορυφές πρέπει να έχουν διαφορετικά κανάλια.

Στη συνέχεια, θα εστιάσουμε στη μελέτη του προβλήματος της 2-αρίθμησης, που επίσης καλείται ραδιο-αρίθμηση (radio labelling). Το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης είναι να ανατεθούν διαφορετικά κανάλια/ετικέτες (labels) σε όλες τις κορυφές ενός γραφήματος, ώστε οποιοδήποτε ζευγάρι γειτονικών κορυφών να έχει μη-γειτονικά κανάλια (δηλ. κανάλια σε απόσταση 2), και να ελαχιστοποιηθεί ο μεγαλύτερος αριθμός καναλιού που χρησιμοποιείται.

Παρακινούμενοι από προβλήματα ανάθεσης συχνοτήτων που εμφανίζονται σε δίκτυα κινητής τηλεφωνίας (mobile networks), σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε επίσης το πρόβλημα της on-line ραδιο-αρίθμησης. Στην on-line έκδοση του προβλήματος, ένα υπογράφημα (induced subgraph) του γραφήματος παρεμβολών εμφανίζεται στον αλγόριθμο κορυφή προς κορυφή. Κάθε κορυφή που παρουσιάζεται στον αλγόριθμο αποτελεί μια αίτηση στην οποία πρέπει να αποδοθεί ένα κανάλι. Μία αίτηση γίνεται αποδεκτή αν όντως ένα έγκυρο κανάλι (με βάση τον ορισμό της ραδιο-αρίθμησης) ανατίθεται στην αντίστοιχη κορυφή. Διαφορετικά, η αίτηση απορρίπτεται. Εξετάζουμε δύο παραλλαγές της on-line ραδιο-αρίθμησης. Στην πρώτη υπάρχει περιορισμένος αριθμός καναλιών προς διάθεση και ο αλγόριθμος πρέπει να μεγιστοποιήσει τον αριθμό των αιτήσεων που γίνονται αποδεκτές. Στη δεύτερη παραλλαγή ο αλγόριθμος δεν έχει τη δυνατότητα να απορρίπτει αιτήσεις, και πρέπει να ελαχιστοποιήσει το μέγιστο αριθμό καναλιού που χρησιμοποιείται.

Ορισμός 3.3. (On-line Ραδιο-Αρίθμηση με Περιορισμό Καναλιών)
ΕΙΣΟΔΟΣ: Ένα γράφημα $G(V, E)$ και ο μέγιστος αριθμός καναλιού που είναι διαθέσιμο $\beta > 0$. Μια νέα κορυφή $v \in V$ παρουσιάζεται στον on-line αλγόριθμο κάθε χρονική στιγμή. Ο αντίπαλος μπορεί να επιλέξει την εμφάνιση οποιουδήποτε υποσυνόλου $V' \subseteq V$ σε οποιαδήποτε σειρά.
ΛΥΣΗ: Ο αλγόριθμος πρέπει να αποφασίσει είτε να αποδεχθεί τη v αναθέτοντάς της ένα κανάλι όχι μεγαλύτερο από β, είτε να την απορρίψει. Σε κάθε βήμα, τα κανάλια που έχουν ανατεθεί στο σύνολο $V^{(a)}$ των κορυφών που έχουν γίνει αποδεκτές πρέπει να συνθέτουν μια έγκυρη ραδιο-αρίθμηση για το υπογράφημα του G που ορίζεται από το $V^{(a)}$.
ΣΤΟΧΟΣ: Μεγιστοποίηση του αριθμού των αποδεκτών αιτήσεων/κορυφών.

Ορισμός 3.4. (On-line Ραδιο-Αρίθμηση χωρίς Περιορισμό Καναλιών)
ΕΙΣΟΔΟΣ: Ένα γράφημα $G(V, E)$. Μια νέα κορυφή $v \in V$ παρουσιάζεται στον on-line αλγόριθμο κάθε χρονική στιγμή. Ο αντίπαλος μπορεί να επιλέξει την εμφάνιση οποιουδήποτε υποσυνόλου $V' \subseteq V$ σε οποιαδήποτε σειρά.
ΛΥΣΗ: Ο αλγόριθμος πρέπει να αναθέσει κανάλια σε όλες τις κορυφές που εμφανίζονται. Σε κάθε βήμα, τα κανάλια που έχουν ανατεθεί στο σύνολο $V^{(p)}$ των

κορυφών που έχουν παρουσιαστεί πρέπει να συνθέτουν μια έγκυρη ραδιο-αρίθμηση για το υπογράφημα του G που ορίζεται από το $V^{(p)}$.

Στοχος: Ελαχιστοποίηση του μέγιστου καναλιού που χρησιμοποιείται.

3.1.2 Αποτελέσματα

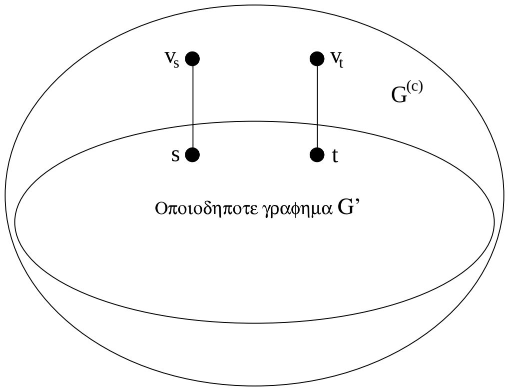
Κατ' αρχήν αποδεικνύουμε ότι τα προβλήματα του ραδιο-χρωματισμού και της ραδιο-αρίθμησης παραμένουν $\mathcal{NP}$-πλήρη ακόμα και για γραφήματα με διάμετρο 2. Επίσης δείχνουμε πως ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που προσεγγίζει το βέλτιστο ραδιο-χρωματισμό σε λόγο 2α μπορεί να κατασκευαστεί από έναν α-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το χρωματισμό τετραγώνων γραφημάτων (δηλ. G^2).

Για το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης αποδεικνύουμε ότι είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα του υπολογισμού ενός Ελάχιστου Μήκους Απλού Γενετικού Μονοπατιού (Hamilton Path) σε ένα πλήρες γράφημα με ακμές μήκους 1 ή 2, HP(1,2). Είναι φανερό ότι το HP(1,2) είναι παρόμοιο με το TSP(1,2). Συνεπώς τα αποτελέσματα των Papadimitriou και Yannakakis [117] δηλώνουν ότι το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης είναι MAX-SNP-δύσκολο και ότι υπάρχει 7/6-προσεγγιστικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου.

Η ισοδυναμία με το HP(1,2) επιτρέπει την εφαρμογή των αλγορίθμων για το TSP(1,2) στο πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης. Συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος για τη βέλτιστη επίλυση του TSP(1,2) σε σταθερό αριθμών κλικών συνεπάγεται ότι η ραδιο-αρίθμηση μπορεί να επιλυθεί βέλτιστα σε πολυωνυμικό χρόνο για γραφήματα που μπορούν να χρωματιστούν με σταθερό αριθμό χρωμάτων σε πολυωνυμικό χρόνο. Μια πολύ σημαντική κατηγορία τέτοιων γραφημάτων είναι τα επίπεδα γραφήματα (planar graphs). Επίσης, για κάθε γράφημα $G(V,E)$, ο $\mathcal{NC}$ αλγόριθμος της Ενότητας 2.3 παράγει μια έγκυρη ραδιο-αρίθμηση με κόστος το πολύ $|V|+\omega(G)-1 \leq |V|+\chi(G)-1$, χωρίς καμία γνώση για το μέγεθος της Μέγιστης Κλίκας $\omega(G)$ ή το χρωματικό αριθμό $\chi(G)$.

Τα θεωρητικά αυτά αποτελέσματα αποκτούν ιδιαίτερη σημασία, επειδή στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές τα στιγμιότυπα εισόδου είναι είτε επίπεδα γραφήματα είτε γραφήματα με μικρό χρωματικό αριθμό. Σε αυτές τις περιπτώσεις, τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να ειδωθούν σαν συμπληρωματικά. Όπου απαιτείται μια βέλτιστη λύση μπορεί να εφαρμοστεί ο ακριβής (αλλά υπολογιστικά χρονοβόρος) αλγόριθμος, και όπου απαιτείται μια γρήγορη ικανοποιητική προσέγγιση μπορεί να εφαρμοστεί ο $\mathcal{NC}$ αλγόριθμος.

Όσον αφορά στην on-line ραδιο-αρίθμηση, αποδεικνύουμε ότι ο αλγόριθμος απληστίας (greedy) είναι 2-ανταγωνιστικός και για τις δύο παραλλαγές του προβλήματος. Επίσης, δείχνουμε ένα κάτω φράγμα 3/2 στον λόγο ανταγωνιστικότητας ενός οποιουδήποτε αλγορίθμου για την on-line ραδιο-αρίθμηση με περιορισμό καναλιών εναντίον του πλέον αδύναμου αντιπάλου.



Σχήμα 3.1: Το γράφημα $G^{(c)}$.

3.2 Το Πρόβλημα του Ραδιο-Χρωματισμού

Κατ' αρχήν αποδεικνύουμε ότι τόσο το πρόβλημα του ραδιο-χρωματισμού όσο και το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης παραμένουν $\mathcal{NP}$-πλήρη, ακόμη και για την πολύ περιορισμένη κατηγορία γραφημάτων με διάμετρο 2. Πρόσφατα, ο R. Tan [126] μας πληροφόρησε ότι οι Griggs και Liu [72] απέδειξαν ανεξάρτητα το ίδιο αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.1. *Τα προβλήματα του ραδιο-χρωματισμού και της ραδιο-αρίθμησης είναι $\mathcal{NP}$-πλήρη ακόμα και για γραφήματα με διάμετρο 2.*

Απόδειξη. Έστω $G(V, E)$ οποιοδήποτε γράφημα με n κορυφές και διάμετρο 2. Επειδή για κάθε ζευγάρι κορυφών $v, u \in V$, $d(v, u) \leq 2$, οποιοσδήποτε έγκυρος ραδιο-χρωματισμός αναθέτει διαφορετικά κανάλια σε όλες τις κορυφές του G. Επίσης από τον ορισμό του προβλήματος, αν $\{v, u\} \in E$, είναι $|X_2(v) - X_2(u)| \geq 2$. Επομένως, αν $\mathrm{diam}(G) = 2$, το πρόβλημα του ραδιο-χρωματισμού ενός γραφήματος G είναι ταυτόσημο με το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης του ίδιου γραφήματος. Απομένει να δείξουμε ότι το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης είναι $\mathcal{NP}$-πλήρες για γραφήματα με διάμετρο 2.

Προφανώς το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης ανήκει στην κλάση $\mathcal{NP}$. Επίσης, $\Lambda_2(G) \leq |V|$ ανν το συμπλήρωμα του G, που συμβολίζεται με $\overline{G}$, περιέχει ένα μονοπάτι Hamilton (επίσης βλ. Λήμμα 3.3). Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι το πρόβλημα της ύπαρξης μονοπατιού Hamilton παραμένει $\mathcal{NP}$-πλήρες για γραφήματα $\overline{G}$ των οποίων τα συμπληρώματα έχουν διάμετρο 2, δηλ. $\mathrm{diam}(G) = 2$.

Έστω $G'(V', E')$ ένα οποιοδήποτε γράφημα και $s, t \in V'$ ένα ζευγάρι μηγειτονικών κορυφών. Το πρόβλημα της ύπαρξης στο γράφημα G' ενός μονοπατιού Hamilton που ξεκινάει από το s και καταλήγει στο t είναι $\mathcal{NP}$-πλήρες (Μονοπάτι Hamilton μεταξύ δύο κορυφών [62]). Έστω $G^{(c)}(V' \cup \{v_s, v_t\}, E' \cup \{(s, v_s), (t, v_t)\})$

το γράφημα που σχηματίζεται όταν στο G' προστεθούν δύο μη-γειτονικές κορυφές v_s, v_t, οι οποίες συνδέονται η v_s στην s, και η v_t στην t (Σχήμα 3.1). Το συμπλήρωμα του γραφήματος $G^{(c)}$ έχει διάμετρο 2. Συγκεκριμένα, οι ακόλουθες παρατηρήσεις καταδεικνύουν ότι $\mathrm{diam}\left(\overline{G^{(c)}}\right) = 2$.

1. Τα ζευγάρια $(s,t), (v_s, v_t), (s, v_t)$ και (t, v_s) συνδέονται με ακμές στο $\overline{G^{(c)}}$.

2. Η απόσταση μεταξύ οποιουδήποτε ζευγαριού $u, w \in V' - \{s,t\}$ είναι το πολύ 2, γιατί αμφότερες είναι γειτονικές τόσο με την v_s όσο και με την v_t.

3. Η απόσταση οποιασδήποτε κορυφής $u \in V' \cup \{v_s\} - \{s,t\}$ από την s είναι το πολύ 2, γιατί αμφότερες οι u και s συνδέονται με την v_t.

4. Η απόσταση οποιασδήποτε κορυφής $u \in V' \cup \{v_t\} - \{s,t\}$ από την t είναι το πολύ 2, γιατί η u και η t συνδέονται στην v_s.

Επίσης, το γράφημα $G^{(c)}$ περιέχει ένα μονοπάτι Hamilton ανν το γράφημα G' περιέχει ένα μονοπάτι Hamilton από την s στην t. Συνεπώς, το πρόβλημα ύπαρξης ενός μονοπατιού Hamilton παραμένει $\mathcal{NP}$-πλήρες για γραφήματα των οποίων τα συμπληρώματα έχουν διάμετρο 2. □

Ακολούθως θα δούμε πως ένας αλγόριθμος προσέγγισης για το χρωματισμό του τετραγώνου G^2 του γραφήματος εισόδου G μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσέγγιση του προβλήματος του ραδιο-χρωματισμού.

Λήμμα 3.2. *Για κάθε γράφημα $G(V,E)$ και πραγματικό αριθμό $\alpha \geq 1$, ένας 2α-προσεγγιστικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για το ραδιο-χρωματισμό του G μπορεί να κατασκευαστεί από οποιονδήποτε α-προσεγγιστικό αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για το χρωματισμό του G^2.*

Απόδειξη. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι οποιοδήποτε σύνολο κορυφών $C \subseteq V$ μπορεί να έχει το ίδιο χρώμα στο γράφημα G^2, μόνο αν μπορεί να έχει το ίδιο κανάλι σε κάποιον έγκυρο ραδιο-χρωματισμό του G, επειδή κάθε ζευγάρι κορυφών του C πρέπει να βρίσκεται σε απόσταση τουλάχιστον 3 στο γράφημα G. Συνεπώς, δεδομένου ενός έγκυρου χρωματισμού του G^2 με $\chi(G^2)$ χρώματα, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν έγκυρο ραδιο-χρωματισμό του G αναθέτοντας τα κανάλια $1, 3, \ldots, 2\chi(G^2) - 1$ στις χρωματικές κλάσεις του G^2. Επομένως,

$$\chi(G^2) \leq X_2(G) \leq 2\chi(G^2) - 1$$

Επιπλέον, αν A είναι ένας α-προσεγγιστικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για το χρωματισμό του G^2 ο οποίος χρησιμοποιεί $|A(G^2)|$ χρώματα, με τον ίδιο τρόπο μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε έναν έγκυρο ραδιο-χρωματισμό για το G που δεν χρησιμοποιεί κανάλια μεγαλύτερα του $2|A(G^2)| - 1$. Επειδή,

$$2|A(G^2)| - 1 \leq 2\alpha\chi(G^2) - 1 \leq 2\alpha X_2(G) - 1 \leq 2\alpha X_2(G) \ ,$$

αυτή η κατασκευή αποτελεί έναν 2α-προσεγγιστικό αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για το ραδιο-χρωματισμό του G. $\square$

3.3 Το Πρόβλημα της Ραδιο-Αρίθμησης

Αφού το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης αναθέτει διαφορετικά κανάλια/ακέραιους αριθμούς σε όλες τις κορυφές του γραφήματος εισόδου, είναι στην πραγματικότητα ένα πρόβλημα διάταξης κορυφών (vertex arrangement problem). Συγκεκριμένα, δεδομένης μιας διάταξης κορυφών $v_1, v_2, \ldots, v_n$, μια έγκυρη ραδιο-αρίθμηση μπορεί να υπολογιστεί ως εξής: $\Lambda_2(v_1) = 1$, και για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$, $\Lambda_2(v_{i+1}) = \Lambda_2(v_i) + 1$, αν $\{v_i, v_{i+1}\} \notin E$, και $\Lambda_2(v_{i+1}) = \Lambda_2(v_i) + 2$, διαφορετικά. Αντίστροφα, κάθε έγκυρη ραδιο-αρίθμηση υποδεικνύει μια διάταξη των κορυφών, όπου η κορυφή v προηγείται της κορυφής u, ανν $\Lambda_2(v) < \Lambda_2(u)$. Μια ραδιο-αρίθμηση Λ_2 λέγεται ελάχιστη (minimal), αν δεν υπάρχει άλλη ραδιο-αρίθμηση Λ_2' που να αντιστοιχεί στην ίδια διάταξη κορυφών, και να έχει κόστος $\Lambda_2'(G)$ μικρότερο από το $\Lambda_2(G)$. Πάντα θεωρούμε μόνο ελάχιστες ραδιο-αριθμήσεις.

Το επόμενο λήμμα τεκμηριώνει τη διαίσθηση ότι η ραδιο-αρίθμηση είναι πρόβλημα διάταξης κορυφών συσχετίζοντάς την με ένα πρόβλημα παρόμοιο με το TSP(1,2).

Λήμμα 3.3. *Το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης είναι ισοδύναμο με το HP(1,2) στο συμπληρωματικό γράφημα.*

Απόδειξη. Από κάθε γράφημα $G(V, E)$ που αποτελεί στιγμιότυπο εισόδου για το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα αντίστοιχο στιγμιότυπο του HP(1,2), δηλαδή ένα πλήρες γράφημα $\hat{G}$ ορισμένο στο σύνολο κορυφών V και μια συνάρτηση απόστασης $\hat{d}$ που ορίζεται για όλα τα ζευγάρια $v, u \in V$, $v \neq u$, ως εξής:

$$\hat{d}(v,u) = \begin{cases} 1 & \text{αν } (v,u) \notin E \\ 2 & \text{αν } (v,u) \in E \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι το $\hat{G}$ αντιστοιχεί στο συμπληρωματικό γράφημα του G.

Δεδομένης μιας οποιασδήποτε έγκυρης ραδιο-αρίθμησης Λ_2 για το G, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μονοπάτι Hamilton H για το $\hat{G}$ επισκεπτόμενοι όλες τις κορυφές σε αύξουσα σειρά των καναλιών τους. Μάλιστα, θα δείξουμε ότι το μήκος του μονοπατιού H μέχρι και την κορυφή με κανάλι i, $i = 1, \ldots, \Lambda_2(G)$, είναι ακριβώς $i - 1$.

Ο ισχυρισμός μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή στο i. Ο ισχυρισμός φανερά ισχύει για την πρώτη κορυφή που έχει κανάλι $i = 1$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάθε κορυφή v με κανάλι $i \geq 1$, και έστω u η αμέσως επόμενη κορυφή στο μονοπάτι H. Μπορούμε να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $\Lambda_2(u) = i+1$, η ακμή $\{v, u\}$ δεν υπάρχει στο G και επομένως $\hat{d}(v,u) = 1$. Άρα το μήκος του H μέχρι και την κορυφή u είναι ακριβώς i.

2. Αν $\Lambda_2(u) = i + 2$, τότε από την κατασκευή του H δεν υπάρχει κορυφή με κανάλι $i + 1$, και επομένως η ακμή $\{v, u\}$ είναι παρούσα στο γράφημα G. Άρα, $\hat{d}(v,u) = 2$ και το μονοπάτι H μέχρι και την u έχει μήκος ακριβώς $i+1$.

Αντίστροφα, δεδομένου ενός στιγμιότυπου $(\hat{G}, \hat{d})$ για το HP(1,2), το αντίστοιχο στιγμιότυπο $G(V, E)$ για το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης μπορεί να κατασκευαστεί συνδέοντας με ακμές μόνο τις κορυφές $v, u \in V$ με $\hat{d}(v, u) = 2$. Επιπλέον, δεδομένου ενός μονοπατιού Hamilton $H = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ για το $\hat{G}$ με μήκος $l(H)$, μια έγκυρη ραδιο-αρίθμηση Λ_2 για το G μπορεί εύκολα να κατασκευαστεί ως εξής:

1. $\Lambda_2(v_1) = 1$.

2. Για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$,

   (α) $\Lambda_2(v_{i+1}) = \Lambda_2(v_i) + 1$, αν $\hat{d}(v_i, v_{i+1}) = 1$.

   (β) $\Lambda_2(v_{i+1}) = \Lambda_2(v_i) + 2$, αν $\hat{d}(v_i, v_{i+1}) = 2$.

Είναι φανερό ότι η παραπάνω κατασκευή αναθέτει σε όλες τις κορυφές του G διαφορετικά κανάλια. Επιπλέον, αν η ακμή $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$, δηλ. $\hat{d}(v_i, v_{i+1}) = 2$, τότε οι κορυφές v_i και v_{i+1} έχουν μη-γειτονικά κανάλια. Συνεπώς, η ραδιο-αρίθμηση που κατασκευάζεται με αυτό τον τρόπο είναι έγκυρη, ενώ το μεγαλύτερο κανάλι ανατίθεται στην τελευταία κορυφή v_n, για την οποία είναι $\Lambda_2(v_n) = l(H) + 1$. □

Από το Λήμμα 3.3 συνεπάγεται ότι το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης είναι MAX-SNP-δύσκολο και ότι υπάρχει 7/6-προσεγγιστικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου [117]. Επίσης, το Θεώρημα του Dirac υποδεικνύει ότι αν ο μέγιστος βαθμός του γραφήματος G είναι μικρότερος από $\frac{|V|}{2}$, υπάρχει πάντα μια ραδιο-αρίθμηση με κόστος ακριβώς $|V|$, η οποία μπορεί εύκολα να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο.

Επίσης, δεδομένου ενός χρωματισμού του γραφήματος εισόδου $G(V, E)$ με χ χρώματα, είναι εύκολο να κατασκευαστεί μια ραδιο-αρίθμηση με κόστος το πολύ $|V| + \chi - 1$. Επομένως,

$$|V| \leq \Lambda_2(G) \leq |V| + \chi(G) - 1$$

Μάλιστα, υπάρχουν γραφήματα για τα οποία το άνω φράγμα είναι ακριβές, όπως είναι κάθε πλήρες r-μερές γράφημα, $r \geq 2$.

3.3.1 Ραδιο-Αρίθμηση Σταθερού Αριθμού Χρωμάτων

Αφού το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης είναι ισοδύναμο με το HP(1,2) και κάθε χρωματισμός του γραφήματος εισόδου αντιστοιχεί σε μια διαμέριση του συμπληρωματικού γραφήματος σε κλίκες, ο αλγόριθμος για το TSP(1,2) του Θεωρήματος 2.5

μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τη ραδιο-αρίθμηση. Συγκεκριμένα, η ακόλουθη πρόταση είναι άμεση συνέπεια των αποτελεσμάτων της Ενότητας 2.4.

Θεώρημα 3.1. *Δεδομένου ενός γραφήματος $G(V,E)$, $|V| = n$, και ενός χρωματισμού του G με κ χρώματα, μια βέλτιστη ραδιο-αρίθμηση μπορεί να υπολογιστεί σε ντετερμινιστικό χρόνο $\mathcal{O}\big(n^{\kappa(2\kappa+1)}\big)$.*

Το ακόλουθο θεώρημα συνάγεται εύκολα από το γεγονός ότι κάθε επίπεδο γράφημα (planar graph) μπορεί να χρωματιστεί με σταθερό αριθμό χρωμάτων σε πολυωνυμικό χρόνο.

Θεώρημα 3.2. *Μια βέλτιστη ραδιο-αρίθμηση ενός επίπεδου γραφήματος μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο.*

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν η Εικασία 2.1 αποδειχθεί, η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου του Θεωρήματος 3.1 θα βελτιωθεί από $n^{\mathcal{O}(\kappa^2)}$ σε $n^{\mathcal{O}(\kappa)}$.

3.3.2 Χρωματικός Αριθμός και $\mathcal{NC}$ Προσεγγισιμότητα

Εξ' αιτίας της ισοδυναμίας με το HP(1,2) στο συμπληρωματικό γράφημα, ο $\mathcal{NC}$ αλγόριθμος προσέγγισης του Θεωρήματος 2.3 μπορεί να εφαρμοστεί και στο πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης. Ο αλγόριθμος TSP-MIS πρέπει να εφαρμοστεί στο συμπλήρωμα του γραφήματος εισόδου για το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης. Για τη ραδιο-αρίθμηση, η ανάλυση απόδοσης του αλγορίθμου μπορεί να γίνει σε σχέση είτε με το μέγεθος της Μέγιστης Κλίκας, είτε με το χρωματικό αριθμό του γραφήματος εισόδου, επειδή σε κάθε γράφημα ο χρωματικός αριθμός φράσσει άνω το μέγεθος κάθε κλίκας. Το ακόλουθο αποτελεί άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.3 και του Λήμματος 3.3.

Θεώρημα 3.3. *Για κάθε γράφημα $G(V,E)$ με n κορυφές, υπάρχει ένας $\mathcal{NC}$ αλγόριθμος που εκτελείται σε περιβάλλον CRCW PRAM σε χρόνο $\mathcal{O}(\log^4 n)$ με χρήση $\mathcal{O}(n^2)$ επεξεργαστών και παράγει τα παρακάτω αποτελέσματα.*

1. *Μια $\frac{3}{2}$-προσεγγιστική έγκυρη ραδιο-αρίθμηση.*
2. *Μια έγκυρη ραδιο-αρίθμηση με κόστος το πολύ $n+\omega(G)-1 \le n+\chi(G)-1$.*
3. *Μια $(1+\beta)$-προσεγγιστική έγκυρη ραδιο-αρίθμηση, εφόσον $\omega(G) \le \beta n$ $(\chi(G) \le \beta n)$, για κάποιον πραγματικό αριθμό $\beta > 0$.*

3.4 On-Line Ραδιο-Αρίθμηση

Στο πρόβλημα της on-line ραδιο-αρίθμησης μπορούμε να διακρίνουμε δύο παραλλαγές. Αρχικά θεωρούμε ότι υπάρχει περιορισμένος αριθμός διαθέσιμων καναλιών, και ο on-line αλγόριθμος έχει τη δυνατότητα να απορρίπτει αιτήσεις. Ο στόχος είναι να μεγιστοποιηθεί ο αριθμός των αιτήσεων που ικανοποιήθηκαν (benefit version). Στη δεύτερη παραλλαγή ο αριθμός των καναλιών είναι απεριόριστος, ο on-line αλγόριθμος δεν μπορεί να απορρίπτει αιτήσεις, και ο στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του μέγιστου αριθμού καναλιού που χρησιμοποιείται στην on-line ανάθεση (assignment version).

3.4.1 Περιορισμένος Αριθμός Καναλιών

Κατ' αρχήν αναλύουμε την απόδοση του αλγορίθμου απληστίας BGreedy για το πρόβλημα της on-line ραδιο-αρίθμησης με περιορισμένο αριθμό καναλιών. Ο BGreedy αναθέτει σε κάθε νέα αίτηση το ελάχιστο κανάλι j ώστε η ραδιο-αρίθμηση που προκύπτει για το υπογράφημα των αιτήσεων που έχουν γίνει αποδεκτές να είναι έγκυρη. Ο BGreedy αποδέχεται την αίτηση μόνο εφόσον το j δεν ξεπερνά το όριο β.

Λήμμα 3.4. *Ο λόγος ανταγωνιστικότητας του* BGreedy *είναι* $\beta\left\lceil\frac{\beta}{2}\right\rceil^{-1}$.

Απόδειξη. Ο αλγόριθμος BGreedy πάντα αποδέχεται τουλάχιστον $\left\lceil\frac{\beta}{2}\right\rceil$ αιτήσεις, γιατί, για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, \left\lceil\frac{\beta}{2}\right\rceil$, ο BGreedy μπορεί πάντα να αποδεκτεί την i-οστή αίτηση αναθέτοντας σε αυτή το κανάλι $2i - 1$. Από την άλλη πλευρά, ο βέλτιστος off-line αλγόριθμος δεν μπορεί ποτέ να αποδεχθεί περισσότερες από β αιτήσεις, επειδή διαθέτει μόνο β κανάλια. Συνεπώς ο λόγος ανταγωνιστικότητας του BGreedy είναι το πολύ $\beta\left\lceil\frac{\beta}{2}\right\rceil^{-1}$.

Θα αποδείξουμε ότι ο λόγος ανταγωνιστικότητας για αυτό τον αλγόριθμο είναι ακριβώς $\beta\left\lceil\frac{\beta}{2}\right\rceil^{-1}$ μελετώντας μια συγκεκριμένη ακολουθία αιτήσεων. Έστω S_m ένα οποιοδήποτε γράφημα με m κορυφές που περιέχει ένα μονοπάτι Hamilton και $H_m = \overline{S_m}$ το συμπληρωματικό γράφημα. Το Λήμμα 3.3 υποδεικνύει ότι $\Lambda_2(H_m) = m$. Επίσης, έστω L_m το γράφημα που προκύπτει από το πλήρες γράφημα με $\frac{m}{2}$ κορυφές, που συμβολίζεται με $K_{m/2}$, και από το $H_{m/2}$, όταν κάθε κορυφή του $K_{m/2}$ συνδεθεί με κάθε κορυφή του $H_{m/2}$. Προφανώς, μια βέλτιστη ραδιο-αρίθμηση για το L_m έχει κόστος ακριβώς $\frac{3m}{2}$.

Δεδομένου ενός ορίου $\beta > 0$ στον αριθμό των καναλιών, έστω μια οποιαδήποτε ακολουθία 2β αιτήσεων, που αποτελείται από όλες τις κορυφές του γραφήματος $L_{2\beta}$, ώστε όλες οι β κορυφές του K_β να παρουσιάζονται στον on-line αλγόριθμο πριν από τις κορυφές του H_β. Για μια τέτοια ακολουθία, ο BGreedy μπορεί να αποδεχθεί μόνο τις πρώτες $\left\lceil\frac{\beta}{2}\right\rceil$ αιτήσεις, ενώ ο βέλτιστος αλγόριθμος θα αποδεχθεί τις τελευταίες β αιτήσεις. □

Ο BGreedy δεν λαμβάνει καθόλου υπόψη του τη δομή της βέλτιστης λύσης στο τρέχον σύνολο των αιτήσεων, ώστε να απορρίπτει αιτήσεις κατ' επιλογή (reject by choice), δηλαδή να απορρίπτει αιτήσεις ακόμα και όταν έχει διαθέσιμα κανάλια. Η προηγούμενη ακολουθία αιτήσεων δείχνει ότι οποιοσδήποτε ντετερμινιστικός on-line αλγόριθμος δεν απορρίπτει αιτήσεις κατ' επιλογή, δεν μπορεί να επιτύχει λόγο ανταγωνιστικότητας καλύτερο από $\beta\left\lceil\frac{\beta}{2}\right\rceil^{-1}$. Επομένως, ο BGreedy είναι βέλτιστος σε σύγκριση με όλους τους ντετερμινιστικούς on-line αλγορίθμους που δεν απορρίπτουν αιτήσεις κατ' επιλογή.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ένα κάτω φράγμα στο λόγο ανταγωνιστικότητας οποιουδήποτε αλγορίθμου για τον πρόβλημα της on-line ραδιο-αρίθμησης με περιορισμένα κανάλια. Μια τυποποιημένη τεχνική στη μεθοδολογία της ανταγωνιστικής ανάλυσης είναι η εισαγωγή ενός αντιπάλου (adversary), ο οποίος αγωνίζεται εναντίον του αλγορίθμου A κατασκευάζοντας μια ακολουθία αιτήσεων που προκαλεί μικρό κέρδος για τον A, ενώ επιτρέπει μεγάλο βέλτιστο κέρδος OPT. Ένας αντίπαλος καλείται *επιλήσμων* (oblivious), όταν κατασκευάζει την ακολουθία αιτήσεων εφάπαξ και πριν ο A αρχίζει να παράγει αποτελέσματα (δηλ. ο αντίπαλος στην επόμενη επιλογή αιτήσεις δεν λαμβάνει υπόψη τις προηγούμενες απαντήσεις του A). Βέβαια ακόμα και ο επιλήσμων αντίπαλος γνωρίζει την κατανομή πιθανότητας για τις απαντήσεις του A. Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο επιλήσμων αντίπαλος είναι ο πλέον αδύνατος από όλα τα είδη των αντιπάλων που συνήθως χρησιμοποιούνται [22].

Η τεχνική που θα χρησιμοποιήσουμε είναι πολύ διαδεδομένη για την απόδειξη κάτω φραγμάτων στο λόγο ανταγωνιστικότητας των πιθανοτικών on-line αλγορίθμων εναντίον του επιλήσμονα αντιπάλου. Έστω $\mathcal{D}$ μια κατανομή πιθανότητας για τις ακολουθίες αιτήσεων σ, έστω $\mathrm{E}_{\mathcal{D}}[A(\sigma)]$ να συμβολίζει τη μέση τιμή του κέρδους ενός αλγορίθμου A, και έστω $\mathrm{E}_{\mathcal{D}}[\mathrm{OPT}(\sigma)]$ να συμβολίζει το μέσο κέρδος του βέλτιστου off-line αλγορίθμου στις ακολουθίες αιτήσεων που δημιουργούνται από την $\mathcal{D}$. Ο αλγόριθμος A είναι c-ανταγωνιστικός εναντίον της κατανομής $\mathcal{D}$, αν υπάρχει σταθερά b, ώστε

$$c \cdot \mathrm{E}_{\mathcal{D}}[A(\sigma)] + b \geq \mathrm{E}_{\mathcal{D}}[\mathrm{OPT}(\sigma)]$$

Για την απόδειξη του κάτω φράγματος, αναλύουμε την απόδοση του "καλύτερου" ντετερμινιστικού on-line αλγορίθμου σε ακολουθίες αιτήσεων που έχουν δημιουργηθεί με βάση τη "χειρότερη" κατανομή πιθανότητας, και χρησιμοποιούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.5 [28]. *Ένας πραγματικός αριθμός c αποτελεί κάτω φράγμα στο λόγο ανταγωνιστικότητας ενός πιθανοτικού on-line αλγορίθμου εναντίον του επιλήσμονα αντιπάλου ανν υπάρχει μια κατανομή πιθανότητας $\mathcal{D}$ για την οποία ο αριθμός c είναι κάτω φράγμα στο λόγο ανταγωνιστικότητας οποιουδήποτε ντετερμινιστικού on-line αλγορίθμου εναντίον της $\mathcal{D}$.*

Χρησιμοποιώντας αυτή την τεχνική θα αποδείξουμε ένα κάτω φράγμα 3/2 στο λόγο ανταγωνιστικότητας που μπορεί να πετύχει κάθε πιθανοτικός on-line αλγόριθμος εναντίον του επιλήσμονα αντιπάλου, ο οποίος αποτελεί και την ασθενέστερη από τις συνηθισμένες κατηγορίες αντιπάλων.

Λήμμα 3.6. *Κανένας πιθανοτικός αλγόριθμος για το πρόβλημα της on-line ραδιο-αρίθμησης με περιορισμένο αριθμό καναλιών δεν μπορεί να επιτύχει λόγο ανταγωνιστικότητας καλύτερο από 3/2 εναντίον του επιλήσμονα αντιπάλου.*

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε μια κατάλληλη κατανομή πιθανότητας για τις ακολουθίες αιτήσεων και θα εφαρμόσουμε το Λήμμα 3.5. Έστω $\{1, \ldots, \beta\}$ το σύνολο τω διαθέσιμων καναλιών. Θεωρούμε την ακόλουθη κατανομή πιθανότητας:

1. Με πιθανότητα p, η ακολουθία αιτήσεων αποτελείται από όλες τις κορυφές του γραφήματος K_β σε οποιαδήποτε σειρά.

2. Με πιθανότητα $1-p$, η ακολουθία αιτήσεων αποτελείται από τις κορυφές του γραφήματος $L_{2\beta}$, όπου όλες οι κορυφές του K_β προηγούνται των κορυφών του H_β.

Αν η ακολουθία αιτήσεων είναι το πλήρες γράφημα K_β, ο βέλτιστος off-line αλγόριθμος αποδέχεται ακριβώς $\left\lceil \frac{\beta}{2} \right\rceil$ αιτήσεις, ενώ αν η ακολουθία αιτήσεων είναι το γράφημα $L_{2\beta}$, ο μέγιστος αριθμός αιτήσεων που γίνονται αποδεκτές είναι ακριβώς β. Επομένως, ο μέσος αριθμός αιτήσεων που γίνονται αποδεκτές από τον βέλτιστο αλγόριθμο είναι,

$$\mathrm{E(OPT)} = p\left\lceil \frac{\beta}{2} \right\rceil + (1-p)\beta$$

Έστω A ένας οποιοσδήποτε ντετερμινιστικός on-line αλγόριθμος. Με πιθανότητα p η ακολουθία αιτήσεων συνίσταται στον K_β, και ο αλγόριθμος A θα αποδεχθεί x αιτήσεις αναθέτοντας κανάλια από το σύνολο $\{1, \ldots, 2x-1\}$, όπου το x μπορεί να είναι οποιοσδήποτε ακέραιος μεταξύ του 0 και του $\left\lceil \frac{\beta}{2} \right\rceil$. Ο αλγόριθμος A επιλέγεται να είναι ο καλύτερος δυνατός με βάση την κατανομή για τις ακολουθίες αιτήσεων. Για τη δεδομένη κατανομή, η επιλογή του A συνίσταται στον καθορισμό του ακεραίου x ώστε να μεγιστοποιηθεί ο μέσος αριθμός αιτήσεων που γίνονται αποδεκτές.

Επίσης, ο αλγόριθμος A θα πρέπει να αποδεχτεί ακριβώς x αιτήσεις από το υπογράφημα K_β ακόμα και όταν η ακολουθία αιτήσεων συνίσταται στο γράφημα $L_{2\beta}$, επειδή ο A είναι ένας ντετερμινιστικός on-line αλγόριθμος και οι κορυφές του K_β παρουσιάζονται πριν τις κορυφές του H_β. Επομένως, ο A μπορεί να αποδεχθεί το πολύ $(\beta - 2x)$ αιτήσεις από το υπογράφημα H_β. Ο μέσος αριθμός των αιτήσεων που γίνονται αποδεκτές από τον καλύτερο ντετερμινιστικό αλγόριθμο για αυτή την κατανομή ακολουθιών αιτήσεων είναι $\mathrm{E}(A) = px + (1-p)(\beta - x)$. Για $p = \frac{1}{2}$, αυτή η μέση τιμή είναι ίση με

$$\mathrm{E}(A) = \frac{\beta}{2}\,, \quad \text{ενώ} \quad \mathrm{E}(\mathrm{OPT}) = \frac{1}{2}\left(\left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil + \beta\right) \geq \frac{3\beta}{4}$$

Συνεπώς, κάθε ντετερμινιστικός on-line αλγόριθμος δεν μπορεί να επιτύχει λόγο ανταγωνιστικότητας μικρότερο από $\frac{3}{2}$ εναντίον της συγκεκριμένης κατανομής πιθανότητας. Μια εφαρμογή του Λήμματος 3.5 δείχνει ότι το $\frac{3}{2}$ αποτελεί κάτω φράγμα στο λόγο ανταγωνιστικότητας που μπορεί να επιτευχθεί από οποιονδήποτε πιθανοτικό on-line αλγόριθμο εναντίον του επιλήσμονα αντιπάλου. □

3.4.2 Απεριόριστος Αριθμός Καναλιών

Σε αυτή την παράγραφο αναλύουμε την απόδοση του αλγορίθμου απληστίας AGreedy για την παραλλαγή της on-line ραδιο-αρίθμησης με απεριόριστο αριθμό καναλιών. Ο AGreedy αναθέτει σε κάθε νέα αίτηση i, $i = 1, \ldots, n$, το ελάχιστο κανάλι j ώστε η ραδιο-αρίθμηση που προκύπτει για το υπογράφημα των αιτήσεων που έχουν παρουσιαστεί να είναι έγκυρη. Είναι φανερό ότι ένα τέτοιο κανάλι j θα υπάρχει πάντα, επειδή ο αριθμός των καναλιών είναι απεριόριστος.

Λήμμα 3.7. *Ο λόγος ανταγωνιστικότητας C_A του αλγορίθμου* AGreedy *είναι $2 - \frac{3}{n} \leq C_A \leq 2 - \frac{1}{n}$, όπου n είναι ο αριθμός των αιτήσεων.*

Απόδειξη. Για κάθε ακολουθία από n αιτήσεις, ο μέγιστος αριθμός καναλιού που χρησιμοποιείται από τον AGreedy είναι το πολύ $2n-1$, αφού η ραδιο-αρίθμηση $1, 3, \ldots, 2n-1$ είναι πάντα έγκυρη. Επομένως, το πάνω φράγμα στον λόγο ανταγωνιστικότητας προκύπτει από το γεγονός ότι το κόστος κάθε βέλτιστης ραδιο-αρίθμησης δεν μπορεί να είναι λιγότερο από n.

Για να δείξουμε το κάτω φράγμα στο λόγο ανταγωνιστικότητας, για κάθε άρτιο ακέραιο $n \geq 2$, θεωρούμε το γράφημα U_n, το οποίο αποτελείται από n κορυφές και προκύπτει από το πλήρες γράφημα K_n με την αφαίρεση των ακμών που αντιστοιχούν σε ένα μονοπάτι Hamilton. Άρα το συμπληρωματικό γράφημα του U_n είναι ένα μονοπάτι Hamilton n κορυφών, και επομένως $\Lambda_2(U_n) = n$. Έστω $u_1, u_2, \ldots, u_n$ η διάταξη των κορυφών του U_n που προκύπτει από τη σειρά με την οποία εμφανίζονται στο μονοπάτι Hamilton του συμπληρωματικού γραφήματος· δηλαδή, για όλα τα $i = 1, \ldots n-1$, οι κορυφές u_i και u_{i+1} δεν είναι συνδεδεμένες στο U_n. Ο αντίπαλος παρουσιάζει όλες τις κορυφές του U_n στην ακόλουθη σειρά: για $i = 0, \ldots, \frac{n}{2} - 1$, παρουσιάζεται η κορυφή u_{i+1} ακολουθούμενη από την κορυφή u_{n-i}.

Ισχυρισμός. *Για όλα τα $i = 0, \ldots, \frac{n}{2} - 2$, ο* AGreedy *αναθέτει στην κορυφή u_{i+1} το κανάλι $4(i+1) - 3$, και στην κορυφή u_{n-i} το κανάλι $4(i+1) - 1$. Τελικά, ο* AGreedy *υπολογίζει μια έγκυρη ραδιο-αρίθμηση για το U_n με κόστος $2n - 3$.*

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Θα αποδείξουμε το πρώτο μέρος του ισχυρισμού με επαγωγή στο i. Προφανώς, για $i = 0$, το κανάλι 1 ανατίθεται στην κορυφή u_1, και το κανάλι 3 ανατίθεται στην κορυφή u_n, αφού οι u_1 και u_n είναι συνδεδεμένες στο γράφημα U_n.

Υποθέτουμε επαγωγικά ότι ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε i, $0 < i < \frac{n}{2} - 2$. Στη συνέχεια για $i + 1$, ο αντίπαλος παρουσιάζει τις κορυφές u_{i+2} και $u_{n-(i+1)}$. Στο γράφημα U_n, η κορυφή u_{i+2} είναι συνδεδεμένη με όλες τις κορυφές που έχουν παρουσιαστεί μέχρι αυτό το σημείο, εκτός από την u_{i+1}. Επομένως, αφού το κανάλι $4(i + 1) - 1$ έχει ανατεθεί στην κορυφή u_{n-i}, ο AGreedy αναθέτει το κανάλι $4(i+1)+1 = 4(i+2)-3$ στην κορυφή u_{i+2}. Ομοίως, επειδή όλες οι κορυφές που έχουν παρουσιαστεί, εκτός της u_{n-i}, είναι συνδεδεμένες με την κορυφή $u_{n-(i+1)}$, ο AGreedy αναθέτει το κανάλι $4(i + 2) - 1$ στην κορυφή $u_{n-(i+1)}$.

Συνεπώς, για $i = \frac{n}{2} - 2$, ο αλγόριθμος AGreedy αναθέτει το κανάλι $2n-7$ στην κορυφή $u_{n/2-1}$, και το κανάλι $2n - 5$ στην κορυφή $u_{n/2+2}$. Έπειτα ο αντίπαλος παρουσιάζει τις κορυφές $u_{n/2}$ και $u_{n/2+1}$ στις οποίες ανατίθενται τα κανάλια $2n - 3$ και $2n - 4$ αντίστοιχα. □

Από την κατασκευή του U_n είναι φανερό ότι ο βέλτιστος off-line αλγόριθμος μπορεί να υπολογίσει μια ραδιο-αρίθμηση με κόστος ακριβώς n. Επομένως, προκύπτει ένα κάτω φράγμα $2 - \frac{3}{n}$ στο λόγο ανταγωνιστικότητας που επιτυγχάνει ο αλγόριθμος AGreedy. □

3.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο ορίστηκαν τα προβλήματα του κ-χρωματισμού και της κ-αρίθμησης, τα οποία αποτελούν τα γραφοθεωρητικά μοντέλα για το σχήμα περιορισμών Συχνότητας-Απόστασης στις περιπτώσεις των επαναχρησιμοποιήσιμων και μη-επαναχρησιμοποιήσιμων καναλιών. Επίσης μελετήθηκαν τα προβλήματα του ραδιο-χρωματισμού και της ραδιο-αρίθμησης ($\kappa = 2$) που αποτελούν μοντέλα για περιορισμούς παρεμβολής από εκπομπή σε κοινά και σε γειτονικά κανάλια.

Αποδείχθηκε ότι για το πρόβλημα του ραδιο-χρωματισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοσδήποτε προσεγγιστικός αλγόριθμος για το χρωματισμό τετραγώνων γραφημάτων. Για το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοσδήποτε αλγόριθμος για το TSP(1,2). Επειδή στην πράξη τα στιγμιότυπα εισόδου για το πρόβλημα της ραδιο-αρίθμησης είτε είναι επίπεδα γραφήματα, είτε έχουν μικρό χρωματικό αριθμό, οι αλγόριθμοι για το TSP(1,2) που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο αναμένεται να έχουν εξαιρετικά αποτελέσματα στην πράξη. Τέλος παρουσιάστηκαν αλγόριθμοι και κάτω φράγματα για το πρόβλημα της on-line ραδιο-αρίθμησης, το οποίο έχει σημαντικές εφαρμογές σε προβλήματα Ανάθεσης Συχνοτήτων σε δίκτυα κινητής τηλεφωνίας.

Μια πολύ ενδιαφέρουσα κατεύθυνση για μελλοντική έρευνα είναι ο σχεδιασμός ενός αποδοτικού αλγορίθμου προσέγγισης πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα του ραδιο-χρωματισμού επίπεδων γραφημάτων. Μια προσέγγιση στο σχεδιασμό ενός τέτοιου αλγορίθμου μπορεί να προκύπτει από το διαχωρισμό του επίπεδου γραφήματος σε υπογραφήματα, ώστε ένας βέλτιστος (ή σχεδόν βέλτιστος) ραδιο-χρωματισμός να αναθέτει διαφορετικά κανάλια στη συντριπτική πλειοψηφία των κορυφών κάθε υπογραφήματος. Δεδομένου ενός συνόλου από τέτοια υπογραφήματα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ακριβή αλγόριθμο για τη ραδιο-αρίθμηση επίπεδων γραφημάτων (Θεώρημα 3.2), και να συνθέσουμε τις βέλτιστες ραδιο-αριθμήσεις για τα υπογραφήματα σε ένα σχεδόν βέλτιστο ραδιο-χρωματισμό για όλο το γράφημα. Προφανώς, ο σχεδιασμός και η ανάλυση ενός τέτοιου αλγορίθμου πρέπει να βασίζονται σε ένα κατάλληλο θεώρημα για το διαχωρισμό επίπεδων γραφημάτων (planar separator theorem).

Ένα άλλο ανοικτό ερευνητικό ζήτημα είναι η βελτίωση της πολυπλοκότητας του αλγορίθμου του Θεωρήματος 3.1 (επίσης βλ. Θεώρημα 2.4) σε $\mathcal{O}(f(\kappa)p(n))$, όπου $f(\kappa)$ είναι μια συνάρτηση του κ που δεν εξαρτάται από το n, π.χ. $f(\kappa) = 2^{\kappa^2}$, και $p(n)$ είναι ένα πολυώνυμο του n, του οποίου ο βαθμός δεν εξαρτάται από το κ, π.χ. $p(n) = n$. Αυτή η ερευνητική κατεύθυνση υποδείχθηκε από τον Papadimitriou [115].

Από την οπτική γωνία της on-line ανάθεσης συχνοτήτων, είναι εξαιρετικά ενδιαφέρουσα η μελέτη του προβλήματος του on-line ραδιο-χρωματισμού, το οποίο ορίζεται παρόμοια με την on-line ραδιο-αρίθμηση. Συγκεκριμένα, δεν έχουμε καθόλου υπόψη μας αλγορίθμους και κάτω φράγματα για το πρόβλημα του on-line ραδιο-χρωματισμού είτε σε γενικά γραφήματα, είτε σε ειδικές κατηγορίες γραφημάτων, όπως επίπεδα γραφήματα, πλέγματα, κλπ.

Κεφάλαιο 4

Διαμερίσεις με Περιορισμούς Αξιοπιστίας

Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές που σχετίζονται με σχεδιασμό συνδυαστικών δομών (combinatorial structures) χρησιμοποιώντας ελαττωματικά συστατικά στοιχεία (faulty components), προκύπτει η ανάγκη υπολογισμού της δομής που αντέχει στα σφάλματα των συστατικών με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Για παράδειγμα, αν πρέπει να σχεδιαστεί ένα δίκτυο μεταγωγής δεδομένων που αποτελείται από συγκεκριμένο αριθμό συνδέσμων (links) οι οποίοι τίθενται εκτός λειτουργίας ανεξάρτητα και με τυχαίο τρόπο, προκύπτει το ερώτημα ποιο είναι το γράφημα που έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να παραμείνει συνεκτικό κάτω από αυτές τις συνθήκες.

Αυτή η περίπτωση αποτελεί ένα παράδειγμα μιας μεγάλης κατηγορίας προβλημάτων στα οποία ζητείται η συνδυαστική δομή (π.χ. γράφημα, υπερ-γράφημα) που μεγιστοποιεί την πιθανότητα διατήρησης μιας συγκεκριμένης ιδιότητας (π.χ. συνεκτικότητας, απουσίας απομονωμένων κορυφών) όταν τα συστατικά της δομής (π.χ. ακμές) διαγράφονται/τίθενται εκτός λειτουργίας ανεξάρτητα και με τυχαίο τρόπο.

Σε αυτό και στο επόμενο κεφάλαιο, θα μελετήσουμε το πρόβλημα της κατασκευής αξιόπιστων πλεοναζουσών αναθέσεων (redundant assignments) μηνυμάτων (messages) σε ελαττωματικά παράλληλα κανάλια επικοινωνίας (faulty parallel communication channels), με κριτήριο βελτιστοποίησης την ελαχιστοποίηση της συμφόρησης (congestion) των καναλιών.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι υπάρχουν n μηνύματα μεγέθους s_j το καθένα, $j = 1, \ldots, n$, το σύνολο των οποίων πρέπει να μεταδοθεί σε ένα συγκεκριμένο προορισμό μέσα από m ελαττωματικά κανάλια επικοινωνίας. Τα κανάλια τίθενται εκτός λειτουργίας ανεξάρτητα και με πιθανότητα f_i το καθένα. Κάθε κανάλι που τίθεται εκτός λειτουργίας δεν παραδίδει κανένα μήνυμα στον προορισμό, όπως για παράδειγμα συμβαίνει όταν ένα σύνολο από αρχεία μεταδίδεται με κάποιο είδος πολυπλεξίας (π.χ. μεταγωγή πακέτων) μέσα από μια ελαττωματική δικτυακή σύνδεση, και η σύνδεση τίθεται εκτός λειτουργίας πριν η μετάδοση κάποιου αρχείου ολοκληρωθεί.

Για να αυξήσουμε την πιθανότητα όλα τα μηνύματα να παραδοθούν στον προορισμό χρησιμοποιούμε πλεονάζοντα αντίγραφα των μηνυμάτων (redundant message copies) τα οποία δρομολογούνται μέσω των καναλιών επικοινωνίας προς τον προορισμό. Σε αυτή την περίπτωση η αξιοπιστία της ανάθεσης είναι η πιθανότητα κάθε μήνυμα να έχει αντίγραφο σε τουλάχιστον ένα λειτουργικό κανάλι, δηλ. τουλάχιστον ένα αντίγραφο από κάθε μήνυμα να φτάσει στον προορισμό., Επίσης μέτρο του κόστους της ανάθεσης θεωρείται η συμφόρηση που επιφέρει, δηλαδή το μέγιστο φορτίο που μεταφέρεται από κάθε κανάλι επικοινωνίας.

Το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε μία πλεονάζουσα ανάθεση/δρομολόγηση των μηνυμάτων η οποία έχει αποδεκτή αξιοπιστία και δεν επιφέρει σημαντική συμφόρηση. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι δίνεται ένας περιορισμός $(1-\epsilon)$ στην αξιοπιστία των αποδεκτών αναθέσεων, και από όλες τις αναθέσεις με αξιοπιστία τουλάχιστον $(1-\epsilon)$, ζητείται αυτή που επιφέρει τη μικρότερη συμφόρηση.

Μια απλή μέθοδος για τη δημιουργία τέτοιων πλεοναζουσών αναθέσεων είναι η διαμέριση του συνόλου των καναλιών σε μια συλλογή από ξένα μεταξύ τους υποσύνολα, ώστε η πιθανότητα τουλάχιστον ένα κανάλι να λειτουργήσει σε κάθε υποσύνολο να είναι τουλάχιστον $(1-\epsilon)$. Προφανώς κάθε τέτοιο υποσύνολο μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα αξιόπιστο κανάλι επικοινωνίας. Δεδομένης μιας τέτοιας συλλογής υποσυνόλων, ένας οποιοσδήποτε αλγόριθμος δρομολόγησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό μιας ανάθεσης των μηνυμάτων στα κανάλια.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται αλγόριθμοι προσέγγισης πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα της διαμέρισης ενός συνόλου καναλιών με περιορισμούς αξιοπιστίας. Οι αλγόριθμοι αυτοί παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά στις εργασίες [57, 58]. Οι αλγόριθμοι και οι τεχνικές που θα αναπτυχθούν στη συνέχεια, θα χρησιμοποιηθούν στο επόμενο κεφάλαιο για την προσέγγιση της ελάχιστης συμφόρησης μιας πλεονάζουσας ανάθεσης με περιορισμούς αξιοπιστίας.

4.1 Εισαγωγή

Έστω $M = \{(f_1, v_1), \ldots, (f_m, v_m)\}$ ένα σύνολο από ελαττωματικά κανάλια επικοινωνίας, όπου το κανάλι i έχει χωρητικότητα v_i, και τίθεται εκτός λειτουργίας ανεξάρτητα και με πιθανότητα f_i. Δεδομένου ενός περιορισμού αξιοπιστίας $(1-\epsilon)$, ζητείται να υπολογιστεί μια συλλογή $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_\kappa\}$ από ξένα υποσύνολα του M, τέτοια ώστε η πιθανότητα τουλάχιστον ένα κανάλι να λειτουργήσει σε κάθε M_j να μην είναι λιγότερη από $(1-\epsilon)$.

Επειδή κάθε υποσύνολο M_j αυτής της συλλογής θα χρησιμοποιηθεί σαν ένα αξιόπιστο ενεργό κανάλι (reliable effective channel), είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι η ενεργός χωρητικότητα του υποσυνόλου M_j καθορίζεται από την χωρητικότητα του ασθενέστερου καναλιού που έχει περιληφθεί στο M_j. Δηλαδή, αν με $V(M_j)$ συμβολίζεται η ενεργός χωρητικότητα του υποσυνόλου M_j, είναι $V(M_j) = \min_{i \in M_j}\{v_i\}$. Σε αυτή την περίπτωση ένα εύλογο κριτήριο βελτιστοποίησης είναι η συνολική χωρητικότητα $V(\mathcal{M}) = \sum_{j=1}^{\kappa} V(M_j)$ της συλλογής $\mathcal{M}$.

Η παραπάνω θεώρηση για το κριτήριο βελτιστοποίησης οδηγεί στη διάκριση δύο παραλλαγών του προβλήματος. Στην πρώτη παραλλαγή, όλα τα κανάλια του M έχουν την ίδια χωρητικότητα. Σε αυτή την περίπτωση το ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση του αριθμού των υποσυνόλων κ από τα οποία αποτελείται η διαμέριση $\mathcal{M}$. Στη δεύτερη παραλλαγή, οι χωρητικότητες των καναλιών μπορούν να είναι οποιοιδήποτε ακέραιοι αριθμοί, και το ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση του αθροίσματος των ελάχιστων χωρητικοτήτων των υποσυνόλων.

Σε αυτό το κεφάλαιο αποδεικνύουμε ότι το πρόβλημα της Μέγιστης Αξιόπιστης Διαμέρισης (Maximum Fault-Tolerant Partition) είναι $\mathcal{NP}$-πλήρες ακόμη και για κανάλια με ίδιες χωρητικότητες. Επίσης παρουσιάζουμε αλγορίθμους που επιτυγχάνουν σταθερό λόγο προσέγγισης και για τις δύο παραλλαγές του προβλήματος, και έναν απλό αλγόριθμο που επιτυγχάνει λογαριθμικό λόγο προσέγγισης για την παραλλαγή των καναλιών με διαφορετικές χωρητικότητες. Μέχρι στιγμής δεν έχουμε υπόψη μας κάποια παρόμοια ερευνητική εργασία που να εξετάζει αυτό το πρόβλημα από την οπτική γωνία των αλγορίθμων προσέγγισης.

4.1.1 Ορισμοί

Στη συνέχεια M είναι ένα σύνολο από ελαττωματικά παράλληλα κανάλια, καθένα από τα οποία έχει μια ακέραιη χωρητικότητα $v_i \geq 1$, και τίθεται εκτός λειτουργίας ανεξάρτητα με πιθανότητα f_i, για κάποιο ρητό αριθμό $1 > f_i > 0$. Δεδομένου ενός υποσυνόλου $M' \subseteq M$, το $\Pr[M']$ συμβολίζει την αξιοπιστία του M', δηλαδή την πιθανότητα ένα τουλάχιστον κανάλι του M' να είναι λειτουργικό,

$$\Pr[M'] = 1 - \prod_{i \in M'} f_i \enspace .$$

Επίσης, το $f_{\max} = \max_{i \in M}\{f_i\}$ συμβολίζει την πιθανότητα σφάλματος του λιγότερο αξιόπιστου καναλιού του M.

Ορισμός 4.1. (Μέγιστη Αξιόπιστη Διαμέριση)
ΕΙΣΟΔΟΣ: Ένα σύνολο $M = \{(f_1, v_1), \ldots, (f_m, v_m)\}$ ελαττωματικών καναλιών. Κάθε κανάλι $i \in M$ έχει μια ακέραιη χωρητικότητα $v_i \geq 1$, και τίθεται εκτός λειτουργίας ανεξάρτητα με πιθανότητα f_i, για κάποιο ρητό αριθμό $1 > f_i > 0$.
Ένας περιορισμός αξιοπιστίας $(1 - \epsilon)$, για κάποιον ρητό αριθμό $1 > \epsilon \geq \prod_{i=1}^{m} f_i$.

ΛΥΣΗ: Μια διαμέριση $\mathcal{M}$ ενός υποσυνόλου $M' \subseteq M$ σε ξένα υποσύνολα $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_\kappa\}$, τέτοια ώστε,

$$\Pr[\mathcal{M}] = \Pr[M_1 \wedge \ldots \wedge M_\kappa] = \prod_{j=1}^{\kappa} \Pr[M_j] = \prod_{j=1}^{\kappa} \left(1 - \prod_{i \in M_j} f_i\right) \geq 1 - \epsilon$$

ΣΤΟΧΟΣ: Μεγιστοποίηση της συνολικής ενεργής χωρητικότητας του $\mathcal{M}$:

$$V(\mathcal{M}) = \sum_{l=1}^{\kappa} V(M_l) = \sum_{l=1}^{\kappa} \min_{i \in M_l}\{v_i\}$$

Στη συνέχεια θα διακρίνουμε την περίπτωση των *ίδιων χωρητικοτήτων*, όπου όλα τα κανάλια έχουν την ίδια χωρητικότητα η οποία θεωρείται ίση με τη μονάδα, και των *διαφορετικών χωρητικοτήτων*, όπου οι χωρητικότητες v_i μπορούν να πάρουν οποιεσδήποτε ακέραιες τιμές. Στη δεύτερη περίπτωση θεωρούμε ότι τα κανάλια είναι διατεταγμένα σε φθίνουσα σειρά χωρητικοτήτων $v_1 \geq \cdots \geq v_n$.

Αξίζει να σημειωθεί η καταχρηστική χρήση του όρου "διαμέριση", αφού ο ορισμός του προβλήματος επιτρέπει η ένωση των υποσυνόλων του $\mathcal{M}$ να μην είναι ίση με το M, δηλ. $M' = \bigcup_{j=1}^{\kappa} M_j \subset M$. Αυτό το στοιχείο του ορισμού είναι κρίσιμο στην περίπτωση των διαφορετικών χωρητικοτήτων, όπου η βέλτιστη λύση μπορεί να προκύπτει από τη διαμέριση ενός $M' \subset M$. Παρόλα αυτά, στην περίπτωση των ίδιων χωρητικοτήτων, που στόχος είναι η μεγιστοποίηση του αριθμού κ των υποσυνόλων της $\mathcal{M}$, μπορούμε πάντα να θεωρούμε ότι $M' = \bigcup_{j=1}^{\kappa} M_j = M$. Αυτό συμβαίνει γιατί, όταν όλα τα κανάλια έχουν την ίδια χωρητικότητα, η προσθήκη κάποιων καναλιών στη διαμέριση $\mathcal{M}$ δεν μπορεί να προκαλέσει μείωση της ενεργής χωρητικότητας.

Το πρόβλημα της Αξιόπιστης Διαμέρισης παρουσιάζει σημαντική ομοιότητα με το πρόβλημα της Κάλυψης Κουτιών (Bin Covering) [15], στο οποίο, δεδομένου ενός συνόλου αντικειμένων, ζητείται να μεγιστοποιηθεί ο αριθμός των κουτιών που μπορούν να γεμιστούν (ένα γεμάτο κουτί περιέχει αντικείμενα συνολικού μεγέθους τουλάχιστον 1). Η ειδοποιός διαφορά των δύο προβλημάτων είναι ότι στην Αξιόπιστη Διαμέριση, η ικανοποίηση του περιορισμού εξαρτάται από το περιεχόμενο όλων των υποσυνόλων $M_1, \ldots, M_\kappa$, ενώ στην Κάλυψη Κουτιών, η ικανοποίηση του περιορισμού εξαρτάται από κάθε υποσύνολο αντικειμένων ξεχωριστά. Δηλαδή μια αποδεκτή λύση για τη Αξιόπιστη Διαμέριση μπορεί να περιέχει κάποια υποσύνολα καναλιών που παρουσιάζουν έλλειμμα αξιοπιστίας (δηλ. είναι λιγότερο αξιόπιστα από τον μέσο όρο $(1-\epsilon)^{1/\kappa}$). Όμως η λύση είναι αποδεκτή γιατί το έλλειμμα αξιοπιστίας αυτών των υποσυνόλων καλύπτεται από το πλεόνασμα αξιοπιστίας κάποιων άλλων. Παρόμοιες καταστάσεις δεν επιτρέπονται σε μία αποδεκτή λύση για την Κάλυψη Κουτιών, όπου κάθε υποσύνολο αντικειμένων/κουτί πρέπει να έχει μέγεθος τουλάχιστον 1.

Αν και η ομοιότητα με την Κάλυψη Κουτιών επιτρέπει τη μεταφορά μερικών τεχνικών για την προσέγγιση της Αξιόπιστης Διαμέρισης, η παραπάνω διαφορά καθιστά το τελευταίο πρόβλημα σημαντικά πιο δύσκολο να προσεγγισθεί, ειδικότερα στην περίπτωση των διαφορετικών χωρητικοτήτων.

4.1.2 Αποτελέσματα

Κατ' αρχήν αποδεικνύουμε ότι το πρόβλημα της Αξιόπιστης Διαμέρισης σε δύο υποσύνολα είναι $\mathcal{NP}$-πλήρες, ακόμα και για την περίπτωση των ίδιων χωρητικοτήτων. Κατόπιν, παρουσιάζουμε έναν 2-προσεγγιστικό αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για την Αξιόπιστη Διαμέριση καναλιών ίδιων χωρητικοτήτων.

Για την παραλλαγή των διαφορετικών χωρητικοτήτων παρουσιάζουμε έναν απλό $2\left\lceil \frac{\ln(|M|/\epsilon)}{\ln(1/f_{\max})} \right\rceil$-προσεγγιστικό αλγόριθμο, και, για κάθε σταθερά $\delta > 0$, έναν $(8+\delta)$-προσεγγιστικό αλγόριθμο.

4.2 Η Πολυπλοκότητα της Αξιόπιστης Διαμέρισης

Η παραλλαγή του προβλήματος που εξετάζει την ύπαρξη μιας Αξιόπιστης Διαμέρισης συγκεκριμένου μεγέθους κ (decision version) στην περίπτωση των ίδιων χωρητικοτήτων, έχει σαν είσοδο ένα σύνολο ρητών αριθμών $M = \{f_1, \ldots, f_m\}$, $1 > f_i > 0$, και ένα ρητό ϵ. Το ζητούμενο είναι αν το M μπορεί να διαμεριστεί σε κ ξένα μεταξύ τους υποσύνολα $M_1, \ldots, M_k$ ώστε $\prod_{j=1}^{\kappa} \Pr[M_j] = \prod_{j=1}^{\kappa}\left(1 - \prod_{i \in M_j} f_i\right) \geq 1 - \epsilon$.

Λήμμα 4.1. *Η Αξιόπιστη Διαμέριση σε δύο ξένα υποσύνολα είναι $\mathcal{NP}$-πλήρης ακόμη και για ίδιες χωρητικότητες.*

Απόδειξη. Προφανώς το πρόβλημα της Αξιόπιστης Διαμέρισης ανήκει στο $\mathcal{NP}$. Θα δείξουμε ότι είναι $\mathcal{NP}$-πλήρες με μετασχηματισμό από το πρόβλημα του Υποσυνόλου με Συγκεκριμένο Γινόμενο (Subset Product).

Το πρόβλημα του Υποσυνόλου με Συγκεκριμένο Γινόμενο είναι, δεδομένου ενός συνόλου ακεραίων $A = \{s_1, \ldots, s_n\}$, και ενός ακεραίου αριθμού B, να αποφασιστεί αν υπάρχει ένα υποσύνολο $A' \subseteq A$ με $\prod_{i \in A'} s_i = B$. Αυτό το πρόβλημα καταγράφεται σαν $\mathcal{NP}$-πλήρες στο [62], πρόβλημα SP14. Είναι φανερό ότι η πληρότητα ως προς την κλάση $\mathcal{NP}$ ισχύει και στην περίπτωση που τα s_i και το B είναι ρητοί αριθμοί, $1 > s_i > 0$, $1 > B > 0$, επειδή, για κάθε σύνολο A, και αριθμούς $s_i \in \mathbb{N}^\star$ και $B \in \mathbb{N}^\star$, $\prod_{i \in A} s_i = B$ ανν $\prod_{i \in A} \frac{1}{s_i} = \frac{1}{B}$.

Δεδομένου ενός στιγμιότυπου I_S για το πρόβλημα του Υποσυνόλου με Συγκεκριμένο Γινόμενο, $I_\Gamma = (A = \{f_1, \ldots, f_m\}, B)$, για ρητούς $1 > f_i > 0$ και $1 > B > 0$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα στιγμιότυπο $I_\Delta = (M, \epsilon)$ της Αξιόπιστης Διαμέρισης σε δύο υποσύνολα σε πολυωνυμικό χρόνο. Έστω $P = \prod_{i \in A} f_i$, και χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $P^2 < P < B$. Συγκεκριμένα το I_Δ αποτελείται από $M = \left\{f_1, \ldots, f_m, f_{m+1} = \frac{P^2}{B}, f_{m+2} = PB\right\}$, και $\epsilon = 2P^2 - P^4$.

Προφανώς, αφού $1 - \epsilon = \left(1 - P^2\right)^2$ και $\prod_{i=1}^{m+2} f_i = P^4$, κάθε $(1-\epsilon)$-αξιόπιστη διαμέριση σε δύο υποσύνολα M_1 και M_2 πρέπει να έχει $\Pr[M_1] = \Pr[M_2] = 1 - P^2$. Επομένως, σε κάθε $(1-\epsilon)$-αξιόπιστη διαμέριση, τα αντικείμενα f_{m+1} και f_{m+2} δεν μπορούν να ανήκουν στο ίδιο υποσύνολο, γιατί $f_{m+1} f_{m+2} = P^3 < P^2$. Άρα, αν $f_{m+1} \in M_1$ και $A' = M_1 - \{f_{m+1}\}$, τότε το $A' \subseteq A$ και $\prod_{i \in A'} f_i = P^2 \frac{B}{P^2} = B$.

Αντιστρόφως, αν για το I_Γ υπάρχει ένα υποσύνολο $A' \subseteq A$ με $\prod_{i \in A'} f_i = B$, τότε μπορούμε να θέσουμε $M_1 = A' \cup \{f_{m+1}\}$ και $M_2 = A - A' \cup \{f_{m+2}\}$, οπότε $\Pr[M_1] = \Pr[M_2] = 1 - P^2$. □

4.3 Αξιόπιστη Διαμέριση Ίδιων Χωρητικοτήτων

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο Επόμενου Ταιριάσματος με Φθίνουσα Αξιοπιστία (ΕΤΦΑ – Next Fit Decreasing) για την προσέγγιση της βέλτιστης Αξιόπιστης Διαμέρισης καναλιών ίδιων χωρητικοτήτων. Ο αλγόριθμος ΕΤΦΑ επεκτείνει τον αλγόριθμο Επόμενου Ταιριάσματος (Next Fit) [15] για το πρόβλημα της Κάλυψης Κουτιών, λαμβάνοντας μέριμνα για κανάλια με πλεόνασμα αξιοπιστίας. Συγκεκριμένα, ο ΕΤΦΑ (Σχήμα 4.1) υπολογίζει μια βέλτιστη συλλογή από κανάλια με πλεόνασμα αξιοπιστίας στα βήματα (1), (2) και (3), και χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο Επόμενου Ταιριάσματος για να υπολογίσει μια 2-προσεγγιστική διαμέριση για τα υπόλοιπα κανάλια.

Θεώρημα 4.1. *Ο αλγόριθμος* Επόμενου Ταιριάσματος με Φθίνουσα Αξιοπιστία *(Σχήμα 4.1) εκτελείται σε χρόνο* $\mathcal{O}(\log m(m + \sum \log(1/f_i)))$ *και επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης 2 για το πρόβλημα της Αξιόπιστης Διαμέρισης καναλιών με ίδιες χωρητικότητες.*

Απόδειξη. Τα l πρώτα κανάλια παρουσιάζουν πλεόνασμα αξιοπιστίας και γι' αυτό διαμερίζονται σε l διαφορετικά υποσύνολα, $M_1, \ldots, M_l$. Τα υπόλοιπα κανάλια συγκροτούν το σύνολο $M_r = M - \bigcup_{i=1}^{l} M_i$ και διαμερίζονται με τη λογική του επόμενου ταιριάσματος στα υποσύνολα $M_{l+1}, \ldots, M_\lambda$.

$P_l = \prod_{i=1}^{l}(1 - f_i) = \Pr[M_1 \wedge \ldots \wedge M_l]$ είναι η πιθανότητα όλα τα πρώτα l υποσύνολα $M_1, \ldots M_l$, που περιέχουν από ένα κανάλι, να είναι σε λειτουργία. Καθένα από τα υπόλοιπα υποσύνολα M_i, $i = l+1, \ldots, \lambda$, έχει ένα τουλάχιστον κανάλι σε λειτουργία με πιθανότητα $\Pr[M_i] \geq 1 - \alpha_l$. Επομένως, αφού $a_l = F_l^{1/x_l}$, ο αριθμός των υποσυνόλων $M_{l+1}, \ldots, M_\lambda$ δεν μπορεί να ξεπερνά το x_l, δηλαδή $\lambda - l \leq x_l$. Άρα,

$$\Pr[M_{l+1} \wedge \ldots \wedge M_\lambda] = \prod_{i=l+1}^{\lambda} \Pr[M_i] \geq (1 - \alpha_l)^{\lambda - l} \geq (1 - \alpha_l)^{x_l} = \frac{1 - \epsilon}{P_l} \ ,$$

Αλγόριθμος Επόμενου Ταιριάσματος με Φθίνουσα Αξιοπιστία – ΕΤΦΑ

Είσοδος: $M = \{f_1, \ldots, f_m\}$, πιθανότητες αποτυχίας $1 > f_i > 0$.
Περιορισμός αξιοπιστίας $(1-\epsilon)$, $1 > \epsilon \geq \prod_{i \in M} f_i$.

Έξοδος: Μια $(1-\epsilon)$-αξιόπιστη διαμέριση του M σε λ ξένα υποσύνολα.

1. Διέταξε τα κανάλια του M σε φθίνουσα σειρά αξιοπιστίας, δηλ. $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_m$.
2. Υπολόγισε το μικρότερο l, $0 \leq l < m$, για το οποίο $f_{l+1} > \alpha_l$, όπου το $\alpha_l = F_l^{1/x_l}$ και τα F_l, x_l ορίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\left(1 - F_l^{1/x_l}\right)^{x_l} = \frac{1-\epsilon}{P_l} \ , \ F_l = \prod_{i=l+1}^{m} f_i \ , \ P_l = \prod_{i=1}^{l} (1 - f_i) \qquad (4.1)$$

3. Για όλα τα $j = 1, \ldots, l$, θέσε $M_j = \{f_j\}$, δηλ. το υποσύνολο M_j περιλαμβάνει μόνο το κανάλι f_j.
4. Τα κανάλια $l+1, \ldots, m$ διαμερίζονται με τον αλγόριθμο Επόμενου Ταιριάσματος [15] με τιμή κατωφλίου α_l.

```
j = l + 1;  λ = l + 1;
while j ≤ m do
    if Pr[M_λ] = 1 − ∏_{i∈M_λ} f_i < 1 − α_l then
        M_λ = M_λ ∪ {f_j};
    else
        λ = λ + 1;  M_λ = {f_j};
    j = j + 1;
end_while;
if Pr[M_λ] < 1 − α_l then
    λ = λ − 1;  M_λ = M_λ ∪ M_{λ+1};
```

Σχήμα 4.1: Ο Αλγόριθμος Επόμενου Ταιριάσματος με Φθίνουσα Αξιοπιστία.

και η συνολική αξιοπιστία των υποσυνόλων $M_1, \ldots, M_\lambda$ είναι τουλάχιστον $(1-\epsilon)$.
Απόδοση: Αρχικά, χρησιμοποιούμε ένα επιχείρημα παρόμοιο με την ανάλυση του Επόμενου Ταιριάσματος για την Κάλυψη Κουτιών [15], για να δείξουμε ότι ο ΕΤΦΑ πάντα παράγει τουλάχιστον $l + \frac{x_l - 1}{2}$ υποσύνολα, όπου το x_l ορίζεται από την Εξίσωση (4.1). Συγκεκριμένα δείχνουμε ότι ο ΕΤΦΑ διαμερίζει το σύνολο M_r σε τουλάχιστον $\frac{x_l-1}{2}$ ξένα μεταξύ τους υποσύνολα, που έχουν $\Pr[M_{l+1} \wedge \ldots \wedge M_\lambda] = \prod_{i=l+1}^{\lambda} \Pr[M_i] \geq \frac{1-\epsilon}{P_l}$. Επειδή κάθε κανάλι $j \in M_r$ έχει $f_j > a_l$, όλα, εκτός ίσως από το τελευταίο, τα υποσύνολα που περιέχουν κανάλια του M_r έχουν $1-\alpha_l \leq \Pr[M_i] < 1-\alpha_l^2$. Επιπλέον, σε κάθε περίπτωση, το τελευταίο υποσύνολο έχει $\Pr[M_\lambda] < 1-\alpha_l^3$. Επομένως,

$$F_l = \prod_{i=l+1}^{\lambda} (1 - \Pr[M_i]) > \alpha_l^{2(\lambda-l)+1} \quad .$$

Αφού το a_l έχει ορισθεί σαν F_l^{1/x_l}, η παραπάνω σχέση υποδεικνύει ότι $\lambda - l > \frac{1}{2}(x_l - 1)$, και, επειδή ο αριθμός των υποσυνόλων πρέπει να είναι πάντα ακέραιος, συνάγεται ότι $\lambda \geq l + \frac{\lfloor x_l \rfloor}{2}$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε βέλτιστη $(1-\epsilon)$-αξιόπιστη διαμέριση δεν μπορεί να έχει περισσότερα από $l + x_l$ υποσύνολα. Θεωρούμε τη βέλτιστη διαμέριση $\mathcal{M}^\star = \{M_1^\star, \ldots, M_\kappa^\star\}$, που έχει τη μεγαλύτερη αξιοπιστία. Για κάθε υποσύνολο $M_i^\star$, έστω $\mathsf{MRI}(M_i^\star) = \min_{j \in M_i^\star} f_j$, και υποθέτουμε ότι τα υποσύνολα έχουν αριθμηθεί σε φθίνουσα σειρά ως προς τις τιμές της παραμέτρου $\mathsf{MRI}(M_i^\star)$, δηλ. $\mathsf{MRI}(M_1^\star) \leq \mathsf{MRI}(M_2^\star) \leq \cdots \leq \mathsf{MRI}(M_\kappa^\star)$. Επομένως, τα πρώτα l υποσύνολα της διαμέρισης $\mathcal{M}^\star$ περιέχουν όλα τα κανάλια $f_1, \ldots, f_l$, και ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\bigcup_{i=1}^{l} M_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} M_i^\star \tag{4.2}$$

Έστω $P_l^\star = \prod_{i=1}^{l} \Pr[M_i^\star]$, $M_r^\star = M - \bigcup_{i=1}^{l} M_i^\star$, και $F_l^\star = \prod_{j \in M_r^\star} f_j$. Η σχέση (4.2) υποδεικνύει ότι $P_l \leq P_l^\star$ και $F_l \leq F_l^\star$. Στην περίπτωση που η σχέση (4.2) ισχύει με ισότητα, το σύνολο $M_r^\star$ δεν μπορεί να συνεισφέρει περισσότερα από x_l υποσύνολα στην διαμέριση $\mathcal{M}^\star$. Διαφορετικά, η μέση αξιοπιστία των υποσυνόλων που προέρχονται από το $M_r^\star$ θα έπρεπε να είναι μικρότερη του $1 - \alpha_l$, και, αφού ο αριθμός των υποσυνόλων θα ήταν μεγαλύτερος από x_l, η συνολική αξιοπιστία μιας τέτοιας διαμέρισης πρέπει να είναι μικρότερη από $\frac{1-\epsilon}{P_l}$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι η διαμέριση $\mathcal{M}^\star$ έχει $M_r^\star \subset M_r$ και το σύνολο M_r έχει διαμεριστεί σε $x_l^\star = \kappa - l > x_l$ υποσύνολα με συνολική αξιοπιστία (δηλ. πιθανότητα τουλάχιστον ένα κανάλι να είναι σε λειτουργία σε καθένα) τουλάχιστον $\frac{1-\epsilon}{P_l^\star}$.

Επειδή έχουμε υποθέσει ότι $\bigcup_{i=1}^{l} M_i \subset \bigcup_{i=1}^{l} M_i^\star$, κάποιο από τα υποσύνολα $M_1^\star, \ldots, M_l^\star$ της βέλτιστης διαμέρισης $\mathcal{M}^\star$ πρέπει να περιέχει περισσότερα από ένα κανάλια. Έστω $M^{\star}_{z_1}$, $1 \leq z_1 \leq l$, το πρώτο τέτοιο υποσύνολο της διαμέρισης $\mathcal{M}^{\star}$. Επομένως, το κανάλι f_{z_1} ανήκει στο $M^{\star}_{z_1}$. Έστω f'_{z_1} κάποιο άλλο κανάλι που ανήκει στο υποσύνολο $M^{\star}_{z_1}$. Προφανώς, $\Pr\big[M^{\star}_{z_1} - \{f'_{z_1}\}\big] \geq 1 - \alpha_l$, γιατί $f_{z_1} \leq \alpha_l$. Επιπλέον, επειδή $F_l \leq F^{\star}_l$, $x^{\star}_l > x_l$, και $\alpha_l = F_l^{1/x_l}$, η διαμέριση $\mathcal{M}^{\star}$ πρέπει να περιέχει ένα υποσύνολο $M^{\star}_{z_2}$, $l+1 \leq z_2 \leq \kappa$, με αξιοπιστία $\Pr[M^{\star}_{z_2}] < 1 - \alpha_l$.

Είναι γνωστό ότι, για κάθε τριάδα πραγματικών αριθμών $0 < a_1 < 1$, $0 < a_2 < 1$, και $0 < y < 1$, αν $1 - a_1 < 1 - a_2$ τότε $(1-a_1)(1-a_2 y) < (1-a_1 y)(1-a_2)$. Επομένως, η διαμέριση που προκύπτει από την $\mathcal{M}^{\star}$ με αφαίρεση του καναλιού f'_{z_1} από το υποσύνολο $M^{\star}_{z_1}$ και τοποθέτηση στο υποσύνολο $M^{\star}_{z_2}$ είναι πιο αξιόπιστη από τη διαμέριση $\mathcal{M}^{\star}$, γιατί $\Pr\big[M^{\star}_{z_1} - \{f'_{z_1}\}\big]\Pr\big[M^{\star}_{z_2} \cup \{f'_{z_1}\}\big] > \Pr[M^{\star}_{z_1}]\Pr[M^{\star}_{z_2}]$, αφού $\Pr\big[M^{\star}_{z_2}\big] < \Pr\big[M^{\star}_{z_1} - \{f'_{z_1}\}\big]$. Το γεγονός αυτό που έρχεται σε αντίφαση με την επιλογή της διαμέρισης $\mathcal{M}^{\star}$. Μάλιστα η αντίφαση προήλθε από την υπόθεση ότι το σύνολο $M^{\star}_r \subset M_r$ μπορεί να συνεισφέρει περισσότερα από x_l υποσύνολα στην $\mathcal{M}^{\star}$.

Επειδή ο βέλτιστος αριθμός των υποσυνόλων $\kappa \leq l + x_l$ πρέπει να είναι ακέραιος, η παραπάνω ανάλυση υποδεικνύει ότι $2\lambda \geq \kappa + l$ και ο αριθμός των υποσυνόλων που δημιουργούνται από τον ΕΤΦΑ είναι τουλάχιστον το μισό του βέλτιστου αριθμού υποσυνόλων. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε μια οικογένεια στιγμιοτύπων για τα οποία είναι $\lambda = \frac{\kappa}{2}$.

Έστω $x \geq 1$ ένας ακέραιος και α, ϵ ρητοί αριθμοί, $1 > \alpha > 0$, $1 > \epsilon > 0$, που ικανοποιούν τη σχέση $(1-\alpha)^{2x} = 1 - \epsilon$. Επίσης, έστω δ ένας μικρός ρητός αριθμός που ικανοποιεί τη σχέση $0 < \delta < \min\Big\{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha}, \big(\frac{1}{\epsilon}\big)^{1/2x}\Big\} - 1$. Θεωρούμε ένα στιγμιότυπο της Αξιόπιστης Διαμέρισης που αποτελείται από $4x$ κανάλια, από τα οποία τα $f_1, \ldots, f_{2x}$ έχουν πιθανότητα αποτυχίας $\alpha(1+\delta)$, και τα υπόλοιπα $f_{2x+1}, \ldots, f_{4x}$ έχουν πιθανότητα αποτυχίας $\frac{1}{1+\delta}$, ενώ ο περιορισμός αξιοπιστίας είναι $(1-\epsilon)$. Από την επιλογή των x, α και ϵ, η βέλτιστη διαμέριση αποτελείται από $2x$ υποσύνολα $\{f_i, f_{2x+i}\}$, $i = 1, \ldots, 2x$. Επειδή είναι $\alpha(1+\delta) < \frac{1}{1+\delta}$, λόγω του $1 + \delta < \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha}$, και $f_1 > \alpha$, ο ΕΤΦΑ δημιουργεί x υποσύνολα από τα πρώτα $2x$ πιο αξιόπιστα κανάλια. Επίσης τοποθετεί όλα τα $2x$ λιγότερο αξιόπιστα κανάλια στο τελευταίο από αυτά τα υποσύνολα, γιατί $\big(1 - (1+\delta)^{-2x}\big) < 1 - \epsilon$ λόγω της επιλογής του δ.

Πολυπλοκότητα: Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου καθορίζεται από τα βήματα (1) και (2). $\mathcal{O}(m \log m)$ χρόνος απαιτείται για τη διάταξη των καναλιών σε φθίνουσα σειρά αξιοπιστίας. Όσο για το βήμα (2), η τιμή του l μπορεί να υπολογιστεί με δυαδική αναζήτηση, αφού, από τον ορισμό του l, για κάθε $l' > l$, είναι $f_{l'+1} > \alpha_{l'}$ και, για κάθε $l' < l$, είναι $f_{l'+1} \leq a_{l'}$. Κάθε επανάληψη της δυαδικής αναζήτησης μπορεί να εκτελεστεί σε χρόνο $\mathcal{O}\big(m + \sum_{i \in M} \log(1/f_i)\big)$, επειδή

1. Η συνάρτηση $g(y) = (1-y)^{\ln(F_l)/\ln(y)}$ είναι γνήσια φθίνουσα ως προς τη μεταβλητή y, και

2. Αν και το α_l μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός, ο αλγόριθμος χρειάζεται να υπολογίσει σωστά μόνο τα πρώτα $\sum_{i=1}^{m}\lceil\log(1/f_i)\rceil$ δυαδικά του ψηφία, ώστε να εκτελεί σωστά τις συγκρίσεις που ακολουθούν.

□

Στη συνέχεια αυτού και στο επόμενο κεφάλαιο, γίνεται χρήση του πάνω φράγματος $(l + x_l)$ στον αριθμό των υποσυνόλων στα οποία μπορεί να διαμεριστεί ένα σύνολο καναλιών ίδιων χωρητικοτήτων, δεδομένου ενός περιορισμού αξιοπιστίας. Συγκεκριμένα, δεδομένων ενός συνόλου M από κανάλια ίδιων χωρητικοτήτων, και ενός περιορισμού αξιοπιστίας $(1-\epsilon)$, η ποσότητα ΙΠΦ$(M, 1-\epsilon) = l+x_l$ αποτελεί άνω φράγμα στον βέλτιστο αριθμό υποσυνόλων που προκύπτουν από την Αξιόπιστη Διαμέριση του στιγμιότυπου $(M, 1-\epsilon)$. Το φράγμα ΙΠΦ$(M, 1-\epsilon) = l + x_l$ συνίσταται από τον ακέραιο l, που συμβολίζει τον αριθμό των καναλιών με πλεόνασμα αξιοπιστίας, και τον πραγματικό x_l, που συμβολίζει τον βέλτιστο αριθμό μη-ακεραίων υποσυνόλων που μπορούν να δημιουργηθούν από το στιγμιότυπο $\left(M_r, \frac{1-\epsilon}{P_l}\right)$, όταν επιτρέπονται μη-ακέραιες αναθέσεις για τα κανάλια.

4.4 Αξιόπιστη Διαμέριση Διαφορετικών Χωρητικοτήτων

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε δύο αλγορίθμους πολυωνυμικού χρόνου για την προσέγγιση της βέλτιστης Αξιόπιστης Διαμέρισης καναλιών με διαφορετικές χωρητικότητες. Ο αλγόριθμος Ασφαλούς Διαμέρισης είναι εξαιρετικά απλός, γρήγορος και επιτυγχάνει λογαριθμικό λόγο προσέγγισης. Ο αλγόριθμος Διαμέρισης με Κλάσεις Χωρητικοτήτων χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο Επόμενου Ταιριάσματος με Φθίνουσα Αξιοπιστία, είναι αρκετά σύνθετος στο σχεδιασμό, την ανάλυση και την υλοποίησή, και επιτυγχάνει σταθερό λόγο προσέγγισης.

4.4.1 Ο Αλγόριθμος Ασφαλούς Διαμέρισης

Ο αλγόριθμος Ασφαλούς Διαμέρισης (ΑΔ – Safe Partition) απλά χωρίζει τα κανάλια, που είναι διατεταγμένα σε φθίνουσα σειρά χωρητικοτήτων, σε έναν αριθμό από υποσύνολα καθένα με αξιοπιστία τουλάχιστον $1 - \frac{\epsilon}{m}$. Δηλαδή, ο ΑΔ παράγει την πιο απλοϊκή $(1-\epsilon)$-αξιόπιστη διαμέριση.

Λήμμα 4.2. *Ο αλγόριθμος* Ασφαλούς Διαμέρισης – ΑΔ *(Σχήμα 4.2) είναι ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα της Αξιόπιστης Διαμέρισης καναλιών με διαφορετικές χωρητικότητες που επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης* $2\left\lceil\frac{\ln(|M|/\epsilon)}{\ln(1/f_{\max})}\right\rceil$, *όπου* $f_{\max} = \max_{i\in M}\{f_i\}$.

```
Αλγόριθμος Ασφαλούς Διαμέρισης – ΑΔ
Είσοδος: M = {(f_1, v_1) ..., (f_m, v_m)}, πιθανότητες αποτυχίας 1 > f_i > 0,
         χωρητικότητες v_i, v_1 ≥ ··· ≥ v_m.
         Περιορισμός αξιοπιστίας (1 − ε), 1 > ε ≥ ∏_{i∈M} f_i.
Έξοδος:  Μια (1 − ε)-αξιόπιστη διαμέριση του M σε ξένα υποσύνολα.

    j = 1; λ = 1; M_λ = ∅;
    while j ≤ m do
        if Pr[M_λ] = 1 − ∏_{i∈M_λ} f_i < 1 − ε/m then
            M_λ = M_λ ∪ {(f_j, v_j)};
        else
            λ = λ + 1; M_λ = {(f_j, v_j)};
        j = j + 1;
    end_while;
    if Pr[M_λ] < 1 − ε/m then λ = λ − 1;
    V(𝓜) = Σ_{l=1}^{λ} V(M_l) = Σ_{l=1}^{λ} min_{i∈M_l}{v_i};
    Έστω d ≥ 0 ο μεγαλύτερος ακέραιος ώστε ∏_{i=1}^{d} f_i > ε.
    If v_{d+1} ≥ V(𝓜) then return {{(f_1, v_1), ..., (f_{d+1}, v_{d+1})}};
    else return 𝓜 = {M_1, ..., M_λ};
```

Σχήμα 4.2: Ο Αλγόριθμος Ασφαλούς Διαμέρισης.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι η αξιοπιστία κάθε εξόδου του ΑΔ είναι τουλάχιστον $(1-\epsilon)$. Για όλα τα $l = 1, \ldots, \lambda+1$, έστω $m_l = |M_l|$, όπου $M_{\lambda+1} = M - \bigcup_{l=1}^{\lambda} M_l$. Για όλα τα $l = 1, \ldots, \lambda+1$, είναι $m_l \leq m^\star = \left\lceil \frac{\ln(|M|/\epsilon)}{\ln(1/f_{\max})} \right\rceil$, γιατί

$$1 - f_{\max}^{\left\lceil \frac{\ln(|M|/\epsilon)}{\ln(1/f_{\max})} \right\rceil} \geq 1 - \frac{\epsilon}{m}$$

Από την άλλη πλευρά, λόγω του ορισμού του d, καμία $(1-\epsilon)$-αξιόπιστη διαμέριση δεν μπορεί να έχει συνολική ενεργή χωρητικότητα περισσότερη από $\mathsf{Cap}(d+1) = \sum_{i=d+1}^{m} v_i$. Επιπλέον, για κάθε $l = 1, \ldots, \lambda$, είναι $m_{l+1} V(M_l) \geq \sum_{i \in M_{l+1}} v_i$, επειδή η ενεργός χωρητικότητα κάθε υποσυνόλου M_l είναι μεγαλύτερη από τη χωρητικότητα κάθε καναλιού του M_{l+1}. Ομοίως, $m_1 v_{d+1} \geq \sum_{i=d+1}^{m_1} v_i$. Ο λόγος προσέγγισης συνάγεται από την ακόλουθη ανισότητα:

$$m^\star \left(v_{d+1} + \sum_{l=1}^{\lambda} V(M_l) \right) \geq \mathsf{Cap}(d+1)$$

□

4.4.2 Ο Αλγόριθμος Διαμέρισης με Κλάσεις Χωρητικοτήτων

Ο αλγόριθμος Διαμέρισης με Κλάσεις Χωρητικοτήτων (ΔΚΧ – Capacity Class Partition) αρχικά διαιρεί το στιγμιότυπο εισόδου R σε κλάσεις I_j από κανάλια με σχεδόν ίδιες χωρητικότητες. Στη συνέχεια υπολογίζει την απόδοση που έχει ο ΕΤΦΑ όταν εφαρμοστεί σε αυτές τις κλάσεις με κατάλληλα επιλεγμένες τιμές του περιορισμού αξιοπιστίας $(1-\epsilon_i^j)$. Τελικά ο αλγόριθμος αναθέτει κλάσματα $\beta_j(i)$ του περιορισμού αξιοπιστίας στις κλάσεις I_j σύμφωνα με τη λύση ενός γενικευμένου Προβλήματος Σακιδίου (Knapsack). Η ανάλυση του αλγορίθμου βασίζεται στο τεχνικό Λήμμα 4.3 που εκφράζει ότι, υπάρχουν τιμές $\epsilon_{i^\star}^j$ με $\prod_j \epsilon_{i^\star}^j \leq \epsilon$, ώστε η ενεργός χωρητικότητα κάθε βέλτιστης λύσης να φράσσεται άνω από το άθροισμα των άνω φραγμάτων στις βέλτιστες ενεργές χωρητικότητες $\mathsf{I\Pi\Phi}\left(I_j, 1-\epsilon_{i^\star}^j\right)$.

Θεώρημα 4.2. *Για κάθε σταθερά $\delta > 0$, ο αλγόριθμος* Διαμέρισης με Κλάσεις Χωρητικοτήτων – ΔΚΧ *(Σχήμα 4.3) επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης $(8+\delta)$ για το πρόβλημα της Αξιόπιστης Διαμέρισης καναλιών με διαφορετικές χωρητικότητες. Ο χρόνος εκτέλεσης του* ΔΚΧ *είναι πολυωνυμικός στο μέγεθος της εισόδου και στο $\frac{1}{\delta}$.*

Απόδειξη. Αρχικά σημειώνουμε ότι πάντα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $v_i = v_{d+1}$, για όλους τους ακεραίους $i \leq d$, γιατί, από τον ορισμό του d, σε κάθε $(1-\epsilon)$-αξιόπιστη διαμέριση, τα κανάλια με $v_i > v_{d+1}$ τοποθετούνται μαζί με κάποια κανάλια

Αλγόριθμος Διαμέρισης με Κλάσεις Χωρητικοτήτων – ΔΚΧ
Είσοδος: $M = \{(f_1, v_1) \ldots, (f_m, v_m)\}$, πιθανότητες αποτυχίας $1 > f_i > 0$, χωρητικότητες v_i, $v_1 \geq \cdots \geq v_m$.
Περιορισμός αξιοπιστίας $(1-\epsilon)$, $1 > \epsilon \geq \prod_{i \in M} f_i$.
Έξοδος: Μια $(1-\epsilon)$-αξιόπιστη διαμέριση του M σε ξένα υποσύνολα.

1. Έστω $d \geq 0$ ο μεγαλύτερος ακέραιος ώστε $\prod_{i=1}^{d} f_i > \epsilon$, και $\psi = \lfloor \log v_{d+1} \rfloor$. Θέτουμε $v_i = v_{d+1}$, για όλα τα $i = 1, \ldots, d$, και δημιουργούμε τις κλάσεις χωρητικοτήτων $I_j = \{f_i : (f_i, v_i) \in M \wedge 2^j \leq v_i < 2^{j+1}\}$, για $j = 0, \ldots, \psi$.

2. Για κάθε κλάση I_j, υπολογίζουμε ένα σύνολο Γ_j από $(\kappa_j(i), \beta_j(i))$, όπου, για κάθε $i \geq 0$, $1 \geq \beta_j(i) \geq 0$, και $\kappa_j(i) = \mathsf{I\Pi\Phi}\big(I_j, (1-\epsilon)^{\beta_j(i)}\big)$. Κάθε σύνολο Γ_j πρέπει να περιέχει ζευγάρια $(\nu, \beta_j(i))$, για όλους τους ακέραιους $\nu = 0, 1, \ldots, \lfloor \mathsf{I\Pi\Phi}(I_j, 1-\epsilon) \rfloor$, και για όλα τα $i \geq 0$, πρέπει να ισχύει ότι $1 \geq \kappa_j(i) - \kappa_j(i+1) \geq 0$.

3. Για κάθε κλάση I_j, χρησιμοποιούμε τον ΕΤΦΑ για να υπολογίσουμε ένα σύνολο $\overline{\Gamma_j}$ από ζευγάρια $(\lambda_j(i), \beta_j(i))$, όπου $\lambda_j(i) = \mathsf{ET\Phi A}\big(I_j, (1-\epsilon)^{\beta_j(i)}\big)$.

4. Για κάθε κλάση I_j, επιλέγουμε ακριβώς ένα ζευγάρι $(\lambda_j(i_j^\star), \beta_j(i_j^\star))$ του $\overline{\Gamma_j}$ με αντικειμενικό στόχο να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση,
$$\sum_{j=0}^{\psi} 2^j \lambda_j(i_j) \quad , \quad \text{με τον περιορισμό} \quad \sum_{j=0}^{\psi} \beta_j(i_j) \leq 1 \ .$$

5. Αν $v_{d+1} \geq \sum_{j=0}^{\psi} 2^j \lambda_j(i_j^\star)$, τότε ο αλγόριθμος επιστρέφει μόνο το υποσύνολο $\{(f_1, v_1), \ldots, (f_{d+1}, v_{d+1})\}$. Διαφορετικά, επιστρέφει τη διαμέριση $\mathcal{M} = \bigcup_{j=0}^{\psi} \mathcal{M}^j$, όπου $\mathcal{M}^j = \{M_1^j, \ldots, M_{\lambda_j(i_j^\star)}^j\}$ είναι η διαμέριση που έχει παραχθεί από τον ΕΤΦΑ για το στιγμιότυπο $\Big(I_j, (1-\epsilon)^{\beta_j(i_j^\star)}\Big)$.

Σχήμα 4.3: Ο αλγόριθμος Διαμέρισης με Κλάσεις Χωρητικοτήτων.

με χωρητικότητα το πολύ v_{d+1}. Επομένως, η παραπάνω υπόθεση δεν μεταβάλει την ενεργό χωρητικότητα μιας βέλτιστης λύσης.
Ικανοποίηση περιορισμού αξιοπιστίας: Από τον ορισμό του d, στην περίπτωση που ο αλγόριθμος επιστρέφει ένα μοναδικό υποσύνολο με χωρητικότητα v_{d+1}, ισχύει ότι $\prod_{i=1}^{d+1} f_i \leq \epsilon$. Σε διαφορετική περίπτωση, επειδή κάθε διαμέριση $\mathcal{M}^j$ που παράγεται από τον ΕΤΦΑ έχει $\Pr[\mathcal{M}^j] \geq (1-\epsilon)^{\beta_j(i_j^\star)}$, είναι $\Pr[\mathcal{M}] = \prod_{j=0}^{\psi} \Pr[\mathcal{M}^j] \geq 1-\epsilon$, γιατί $\sum_{j=0}^{\psi} \beta_i(j_i^\star) \leq 1$.
Απόδοση: Για την ανάλυση της απόδοσης του αλγορίθμου θα υποθέσουμε ότι όλα τα κανάλια που περιλαμβάνονται στην κλάση I_j έχουν χωρητικότητα ακριβώς ίση με 2^j. Προφανώς, οι χωρητικότητες των καναλιών κάθε κλάσης I_j μπορούν πάντα να μειωθούν στο 2^j με ταυτόχρονη αύξηση του λόγου προσέγγισης κατά έναν παράγοντα 2.

Η ανάλυση της απόδοσης του ΕΤΦΑ βασίζεται στο ακόλουθο τεχνικό λήμμα, το οποίο υποδεικνύει ότι η παραλλαγή με διαφορετικές χωρητικότητες μπορεί να αναχθεί στην παραλλαγή με ίδιες χωρητικότητες, με κατάλληλη ανάθεση κλασμάτων $\beta_j^\star$ του περιορισμού αξιοπιστίας σε κάθε κλάση I_j.

Λήμμα 4.3. *Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $0 \leq \beta_j^\star \leq 1$, $j = 0, \ldots, \psi$, $\sum_{j=0}^{\psi} \beta_j^\star \leq 1$, ώστε η ενεργός χωρητικότητα μιας βέλτιστης διαμέρισης $V(\mathcal{M}^\star)$ να ικανοποιεί την ακόλουθη ανισότητα:*

$$V(\mathcal{M}^\star) \leq \sum_{j=0}^{\psi} 2^j \ \mathsf{I\Pi\Phi}\Big(I_j, (1-\epsilon)^{\beta_j^\star}\Big)$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{M}^\star = \{M_1^\star, \ldots, M_\kappa^\star\}$ η πλέον αξιόπιστη βέλτιστη λύση με ενεργό χωρητικότητα $V(\mathcal{M}^\star) = \sum_{i=1}^{\kappa} V(M_i^\star) = \sum_{i=1}^{\kappa} \min_{\nu \in M_i^\star}\{v_\nu\}$. Θα δείξουμε πως από την $\mathcal{M}^\star$ μπορούμε να υπολογίσουμε ένα σύνολο από $\psi+1$ αριθμούς β_j που ικανοποιούν τη διατύπωση του λήμματος.

Συγκεκριμένα, εξετάζουμε τη συνεισφορά των καναλιών κάθε κλάσης I_j στα υποσύνολα $M_i^\star$. Για κάθε υποσύνολο $M_i^\star$, υπολογίζουμε τη συνεισφορά c_j^i των καναλιών του I_j στην ποσότητα $F^i = \prod_{\nu \in M_i^\star} f_\nu = 1 - \Pr[M_i^\star]$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη συνεισφορά β_j^i των καναλιών του I_j στο κλάσμα $\beta^i = \log_{(1-\epsilon)} \Pr[M_i^\star]$ του περιορισμού αξιοπιστίας που έχει ανατεθεί στο υποσύνολο $M_i^\star$.

Για τεχνικούς λόγους, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Για τα υποσύνολα $M_i^\star$ που αποτελούνται μόνο από κανάλια μιας κλάσης I_j, οι συνεισφορές c_j^i και β_j^i αθροίζονται στις ποσότητες $c_j^{(1)}$ και $\beta_j^{(1)}$, οι οποίες αρχικά είναι 0. Για τα *μεικτά υποσύνολα*, δηλαδή τα $M_i^\star$ που περιλαμβάνουν κανάλια από περισσότερες από μία κλάσεις, οι συνεισφορές c_j^i και β_j^i αθροίζονται στις $c_j^{(2)}$ και $\beta_j^{(2)}$, οι οποίες επίσης έχουν αρχική τιμή 0. Τελικά, για κάθε κλάση I_j, οι αριθμοί β_j που ικανοποιούν το λήμμα προκύπτουν από το άθροισμα των $\beta_j^{(1)}$ και $\beta_j^{(2)}$.

Για κάθε υποσύνολο $M_i^\star$ που αποτελείται μόνο από κανάλια της κλάσης I_j, αυξάνουμε την ποσότητα $c_j^{(1)}$ κατά $c^i = c_j^i = 1$, και την ποσότητα $\beta_j^{(1)}$ κατά $\beta^i = \beta_j^i = \log_{(1-\epsilon)} \Pr[M_i^\star]$. Είναι φανερό ότι η συνεισφορά κάθε τέτοιου $M_i^\star$ στην ενεργό χωρητικότητα $V(\mathcal{M}^\star)$ είναι ακριβώς 2^j. Έστω I_j^1 το σύνολο όλων των καναλιών της I_j που ανήκουν σε υποσύνολα $M_i^\star \subseteq I_j$. Προφανώς, η ποσότητα $c_j^{(1)}$ δεν μπορεί να ξεπερνά τον βέλτιστο αριθμό υποσυνόλων κ_{j_1} στα οποία μπορεί να διαμεριστεί το I_j^1 με περιορισμό αξιοπιστίας $(1-\epsilon)^{\beta_j^{(1)}}$, γιατί το σύνολο των $M_i^\star$, που είναι $M_i^\star \subseteq I_j$, αποτελεί μια $\left((1-\epsilon)^{\beta_j^{(1)}}\right)$-αξιόπιστη διαμέριση του I_j^1 σε $c_j^{(1)}$ υποσύνολα. Μάλιστα, η ανάλυση του ΕΤΦΑ υποδεικνύει ότι,

$$c_j^{(1)} \leq \kappa_{j_1} \leq \mathsf{I\Pi\Phi}\left(I_j^1, (1-\epsilon)^{\beta_j^{(1)}}\right) \tag{4.3}$$

Το σύνολο $Z_j \subseteq \mathcal{M}^\star$ περιλαμβάνει όλα τα υποσύνολα $M_i^\star$ που περιέχουν αντικείμενα τόσο της κλάσης I_j, όσο και κάποιων άλλων κλάσεων, δηλ. $M_i^\star \cap I_j \neq \emptyset$, αλλά $M_i^\star \not\subseteq I_j$. Για κάθε $M_i^\star \in Z_j$, υπολογίζουμε τα $F^i = 1 - \Pr[M_i^\star]$ και $F_j^i = \prod_{\nu \in M_i^\star \cap I_j} f_\nu$. Έπειτα, αυξάνουμε την ποσότητα $c_j^{(2)}$ κατά $c_j^i = \log_{F^i} F_j^i$, και την ποσότητα β_j κατά $\beta_j^i = c_j^i(\log_{(1-\epsilon)} \Pr[M_i^\star]) = c_j^i \beta^i$. Προφανώς, η συνεισφορά κάθε υποσυνόλου $M_i^\star$ στην ενεργό χωρητικότητα της $\mathcal{M}^\star$ ικανοποιεί την ακολουθεί ανισότητα:

$$V(M_i^\star) \leq \sum_{j: I_j \cap M_i^\star \neq \emptyset} 2^j c_j^i \ .$$

Έστω I_j^2 το σύνολο των καναλιών του I_j που περιλαμβάνονται σε υποσύνολα $M_i^\star \in Z_j$. Θα δείξουμε ότι η ποσότητα $c_j^{(2)}$ δεν μπορεί να ξεπερνά το άνω φράγμα $\mathsf{I\Pi\Phi}\left(I_j^2, (1-\epsilon)^{\beta_j^{(2)}}\right)$ στο βέλτιστο αριθμό υποσυνόλων που μπορούν να προκύψουν από το I_j^2 με περιορισμό αξιοπιστίας $(1-\epsilon)^{\beta_j^{(2)}}$. Συγκεκριμένα θα υποθέσουμε ότι, για κάποια κλάση I_j, είναι $c_j^{(2)} > \mathsf{I\Pi\Phi}\left(I_j^2, (1-\epsilon)^{\beta_j^{(2)}}\right)$, και θα καταλήξουμε σε αντίφαση.

Έστω $F_{j_2} = \prod_{\nu \in I_j^2} f_\nu = \prod_{M_i^\star \in Z_j} \left((F^i)^{c_j^i}\right)$. Είναι φανερό ότι ο αριθμός $x \geq 0$ που ορίζεται από την εξίσωση

$$\left(1 - F_{j_2}^{1/x}\right)^x = (1-\epsilon)^{\beta_j^{(2)}} = (1-\epsilon)^{\sum_{M_i^\star \in Z_j} c_j^i \beta^i}$$

δεν μπορεί να είναι μικρότερος από την ποσότητα $c_j^{(2)}$, εξ' αιτίας της ακόλουθης ανισότητας (επίσης βλ. Πρόταση 4.1):

$$\left[1-\left(\prod_{M_i^\star\in Z_j}\left((F^i)^{c_j^i}\right)\right)^{1/c_j^{(2)}}\right]^{c_j^{(2)}} \geq \prod_{M_i^\star\in Z_j}\left(1-F^i\right)^{c_j^i} = (1-\epsilon)^{\sum_{M_i^\star\in Z_j} c_j^i\beta^i} \tag{4.4}$$

Επομένως, πρέπει να ισχύει ότι $c_j^{(2)} > l^{j_2} > 0$, όπου l^{j_2} ο ακέραιος αριθμός των καναλιών του I_j^2 που παρουσιάζουν πλεόνασμα αξιοπιστίας ως προς τον περιορισμό $(1-\epsilon)^{\beta_j^{(2)}}$. Σε αυτή την περίπτωση, η ανάλυση του ΕΤΦΑ υποδεικνύει ότι πρέπει να υπάρχει υποσύνολο $M_{z_1}^\star \in Z_j$ και κανάλι $f_{z_1} \in M_{z_1}^\star \cap I_j^2$, τέτοια ώστε $f_{z_1} < F_{j_2}^{1/x}$. Συνεπώς, επειδή $x \geq c_j^{(2)}$, ισχύει ότι

$$1-f_{z_1} > 1-F_{j_2}^{1/x} = (1-\epsilon)^{\beta_j^{(2)}/x} \geq (1-\epsilon)^{\beta_j^{(2)}/c_j^{(2)}} \quad .$$

Επιπλέον, από τον ορισμό των ποσοτήτων $c_j^{(2)} = \sum_{M_i^\star\in Z_j} c_j^i$ και $\beta_j^{(2)} = \sum_{M_i^\star\in Z_j} c_j^i\beta^i$, όπου $\beta^i = \log_{(1-\epsilon)}\Pr[M_i^\star]$, πρέπει να υπάρχει κάποιο άλλο υποσύνολο $M_{z_2}^\star \in Z_j$ με αξιοπιστία

$$\Pr[M_{z_2}^\star] \leq (1-\epsilon)^{\beta_j^{(2)}/c_j^{(2)}} \quad .$$

Έστω $\mathcal{M}'$ η διαμέριση που σχηματίζεται από την $\mathcal{M}^\star$ αλλάζοντας το υποσύνολο $M_{z_1}^\star$ με το $M'_{z_1} = \{f_{z_1}\}$, και το υποσύνολο $M_{z_2}^\star$ με το $M'_{z_2} = M_{z_2}^\star \cup M_{z_1}^\star - \{f_{z_1}\}$. Αφού $1-f_{z_1} > \Pr[M_{z_2}^\star]$, ένα επιχείρημα όμοιο με αυτό που χρησιμοποιείται στην ανάλυση του ΕΤΦΑ, φανερώνει ότι η αξιοπιστία της $\mathcal{M}'$ είναι αυστηρά μεγαλύτερη από την αξιοπιστία της $\mathcal{M}^\star$. Επίσης, είναι εύκολο να δει κανείς ότι $V(M'_{z_1}) + V(M'_{z_2}) \geq V(M_{z_1}^\star) + V(M_{z_2}^\star)$. Το γεγονός αυτό αντιβαίνει στην επιλογή της $\mathcal{M}^\star$ σαν την πλέον αξιόπιστη βέλτιστη διαμέριση. Επομένως, πάντα υπάρχει μια βέλτιστη λύση που, για όλες τις κλάσεις I_j, ικανοποιεί την ανισότητα:

$$c_j^{(2)} \leq \mathsf{I\Pi\Phi}\left(I_j^2, (1-\epsilon)^{\beta_j^{(2)}}\right) \tag{4.5}$$

Επειδή τα σύνολα I_j^1 και I_j^2 είναι ξένα μεταξύ τους, και $I_j^1 \cup I_j^2 \subseteq I_j$, οι ανισότητες (4.3) και (4.5) υποδεικνύουν ότι $c_j = c_j^{(1)} + c_j^{(2)} \leq \mathsf{I\Pi\Phi}\big(I_j, (1-\epsilon)^{\beta_j}\big)$. Συνεπώς, επειδή, για όλα τα $j = 0, \ldots, \psi$, $\sum_{i=1}^{\kappa} c_j^i = c_j^{(1)} + c_j^{(2)}$, η ακόλουθη ανισότητα ισχύει για τους πραγματικούς αριθμούς $\beta_j = \beta_j^{(1)} + \beta_j^{(2)}$:

$$\sum_{i=1}^{\kappa} V(M_i^\star) \leq \sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=0}^{\psi} c_j^i 2^j = \sum_{j=0}^{\psi} 2^j\left(c_j^{(1)} + c_j^{(2)}\right) \leq \sum_{j=0}^{\psi} 2^j\ \mathsf{I\Pi\Phi}\big(I_j, (1-\epsilon)^{\beta_j}\big) \quad .$$

Επίσης, από τον τρόπο υπολογισμού των β_j και την $(1-\epsilon)$-αξιοπιστία της διαμέρισης $\mathcal{M}^\star$, συνάγεται ότι $\beta_j \geq 0$, και

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \beta^i = \sum_{i=1}^{\kappa} \sum_{j=0}^{\psi} \beta_j^i = \sum_{j=0}^{\psi} \beta_j \leq 1 \ ,$$

επειδή $\Pr[\mathcal{M}^\star] \geq 1-\epsilon$. $\square$

Επειδή οι αριθμοί $\lambda_j(i)$ υπολογίζονται από τον ΕΤΦΑ, για κάθε $i \geq 0$, ισχύει ότι $\lambda_j(i) \geq \frac{\lfloor \kappa_j(i) \rfloor}{2}$. Συνεπώς, για τη βέλτιστη συλλογή ζευγαριών $(\lambda_j(i_j^\star), \beta_j(i_j^\star)) \in \overline{\Gamma_j}$, ισχύει ότι

$$\sum_{j=0}^{\psi} 2^j \lambda_j(i_j^\star) \geq \sum_{j=0}^{\psi} 2^j \frac{\lfloor \kappa_j(i_j^\star) \rfloor}{2} \ .$$

Επίσης, από τον τρόπο υπολογισμού του συνόλου Γ_j, το ζευγάρι $(\kappa_j(i), \beta_j(i)) \in \Gamma_j$ με την μεγαλύτερη τιμή $\beta_j(i)$ που δεν ξεπερνά το $\beta_j^\star$, ικανοποιεί την $\lfloor \kappa_j(i) \rfloor \geq \mathsf{I\Pi\Phi}\Big(I_j, (1-\epsilon)^{\beta_j^\star}\Big) - 1$. Επομένως,

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{j=0}^{\psi} 2^j \lambda_j(i_j^\star) & \geq & \sum_{j=0}^{\psi} 2^j \ \frac{\mathsf{I\Pi\Phi}\Big(I_j, (1-\epsilon)^{\beta_j^\star}\Big) - 1}{2} \\
& \geq & \frac{1}{2}\left(V(\mathcal{M}^\star) - \sum_{j=0}^{\psi} 2^j \right) \\
& \geq & \frac{(V(\mathcal{M}^\star)}{2} - v_{d+1} \ \Rightarrow \\
V(\mathcal{M}^\star) & \leq & 2 \sum_{j=0}^{\psi} 2^j \lambda_j(i_j^\star) + 2 v_{d+1}
\end{array}$$

Απομένει το πρόβλημα του υπολογισμού των ζευγαριών $(\lambda_j(i_j^\star), \beta_j(i_j^\star)) \in \overline{\Gamma_j}$, $j = 0, \ldots, \psi$, το οποίο αντιστοιχεί στην ακόλουθη γενίκευση του Προβλήματος Σακιδίου: Δεδομένων $\psi+1$ συνόλων $\overline{\Gamma_j}$, όπου κάθε αντικείμενο του $\overline{\Gamma_j}$ έχει κέρδος $\overline{\lambda_j}(i) = 2^j \lambda_j(i)$ και μέγεθος $\beta_j(i)$, και $(0,0) \in \overline{\Gamma_j}$, ζητείται η επιλογή ακριβώς ενός αντικειμένου i_j από κάθε σύνολο $\overline{\Gamma_j}$ ώστε να μεγιστοποιηθεί το άθροισμα $\sum_{j=0}^{\psi} \overline{\lambda_j}(i_j)$, με τον περιορισμό $\sum_{j=0}^{\psi} \beta_j(i_j) \leq 1$. Προφανώς, σαν γενίκευση του Προβλήματος Σακιδίου, το παραπάνω πρόβλημα είναι $\mathcal{NP}$-πλήρες.

Ένας τυπικός ορισμός και μια λεπτομερής διερεύνηση της προσεγγισιμότητας του Γενικευμένου Προβλήματος Σακιδίου γίνεται στη συνέχεια (βλ. Λήμματα 4.4 και 4.5). Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ένα Σχήμα Προσέγγισης Πλήρως Πολυωνυμικού Χρόνου (ΣΠΠΠΧ – FPTAS) για το Γενικευμένο Πρόβλημα Σακιδίου. Αυτό το ΣΠΠΠΧ βασίζεται σε ένα ακριβή αλγόριθμο ψευδο-πολυωνυμικού χρόνου, και αποτελεί γενίκευση του ΣΠΠΠΧ για το απλό Πρόβλημα Σακιδίου (βλ. την Ενότητα 9.3 του [82]).

Επομένως, η διαμέριση που παράγεται από τον ΔΚΧ έχει ενεργό χωρητικότητα όχι λιγότερη από τις ποσότητες v_{d+1} και $\frac{1}{1+\delta}\sum_{j=0}^{\psi} 2^j \lambda_j(i_j^\star)$, και, για κάθε σταθερά $\delta > 0$, ο αλγόριθμος ΔΚΧ επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης $(4+\delta)$, όταν όλες οι χωρητικότητες είναι δυνάμεις του 2. Συνεπώς, για κάθε σταθερά $\delta > 0$, ο ΔΚΧ επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης $(8+\delta)$ για το πρόβλημα της Αξιόπιστης Διαμέρισης καναλιών με διαφορετικές χωρητικότητες, που μπορούν να έχουν οποιεσδήποτε τιμές.

Πολυπλοκότητα: Τα βήματα (1)-(3) του αλγορίθμου μπορούν να εκτελεστεί σε χρόνο πολυωνυμικό στο μέγεθος της εισόδου (βλ. Σχήμα 4.4 και σχετική ανάλυση). Επίσης, το βήμα (4) μπορεί να εκτελεστεί σε χρόνο πολυωνυμικό στο μέγεθος της εισόδου και στην ποσότητα $\frac{1}{\delta}$, για κάθε $\delta > 0$.

Για την πολυπλοκότητα του ΔΚΧ είναι σημαντικό ότι τα $(\kappa_j(i), \beta_j(i)) \in \Gamma_j$ χρησιμοποιούνται μόνο για τη δημιουργία μιας κατάλληλης συλλογής στιγμιοτύπων $\left(I_j, (1-\epsilon)^{\beta_j(i)}\right)$, για τα οποία θα υπολογιστεί η απόδοση του ΕΤΦΑ. Επομένως, ένας πολυωνυμικά μεγάλος αριθμός δυαδικών ψηφίων αρκεί για την αποθήκευση των ποσοτήτων $(1-\epsilon)^{\beta_j(i)}$, αφού ο ΕΤΦΑ μόνο θα συγκρίνει αυτές τις τιμές του περιορισμού αξιοπιστίας με κάποιους ρητούς αριθμούς.

Μια άλλη σημαντική παρατήρηση έχει να κάνει με τις τιμές $\beta_j(i)$ που χρησιμοποιούνται στην επίλυση του Γενικευμένου Προβλήματος Σακιδίου. Έστω $\mathcal{M}^j(i)$ η διαμέριση που παράγεται από τον ΕΤΦΑ με είσοδο $\left(I_j, (1-\epsilon)^{\beta_j(i)}\right)$. Επειδή μπορούμε να προσεγγίσουμε το Γενικευμένο Πρόβλημα Σακιδίου μέχρι οποιαδήποτε σταθερά $(1+\delta)$ σε χρόνο πολυωνυμικό στο $\frac{1}{\delta}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε προσεγγιστικές τιμές $\hat{\beta}_j(i) \approx \log_{(1-\epsilon)} \Pr[\mathcal{M}^j(i)]$ αυξάνοντας αντίστοιχα την ακρίβεια του ΣΠΠΠΧ. Με αυτό τον τρόπο δεν επηρεάζεται η συνολική απόδοση του αλγορίθμου. Επίσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ακριβείς τιμές αντικαθιστώντας τα $\beta_j(i)$ με τους αντίστοιχους ρητούς αριθμούς $\Pr[\mathcal{M}^j(i)]$, που μπορούν να αποθηκευτούν το πολύ σε $\sum_{\nu \in I_j} \log(1/f_\nu)$ δυαδικά ψηφία. Σε αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμος για το Γενικευμένο Πρόβλημα Σακιδίου πρέπει να χειρίζεται τα γινόμενα $\prod \Pr[\mathcal{M}^j(i)]$ αντί των αθροισμάτων $\sum \beta_j(i)$. □

Απόδειξη της Πρότασης 4.1

Στην απόδειξη του Λήμματος 4.3, στην ανισότητα (4.4), χρησιμοποιήσαμε την ακόλουθη ανισότητα που ισχύει λόγω κυρτότητας.

Πρόταση 4.1. *Για όλα τα F_i, $1 > F_i > 0$, και c_i, $c_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:*

$$\left[1 - \left(\prod_{i=1}^{n} F_i^{c_i}\right)^{1/C}\right]^C \geq \prod_{i=1}^{n} (1 - F_i)^{c_i} \ , \tag{4.6}$$

όπου $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$.

Απόδειξη. Η απόδειξη χρησιμοποιεί επαγωγή στον αριθμό των όρων n. Για $n = 1$, η ανισότητα (4.6) καθίσταται τετριμμένη. Για $n = 2$, έστω $F = (F_1^{c_1} F_2^{c_2})^{1/c_1+c_2}$, $z_1 = \ln(F_1)$, $z_2 = \ln(F_2)$, και

$$z = \ln(F) = \frac{c_1 z_1 + c_2 z_2}{c_1 + c_2} \ .$$

Η συνάρτηση $g(y) = \ln(1 - e^y)$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $(-\infty, 0)$, επειδή $g''(y) = -e^y(1 - e^y)^{-2} < 0$, για κάθε $y < 0$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \ln(1-F) = \ln(1-e^z) = g(z) &\geq \frac{c_1 g(z_1) + c_2 g(z_2)}{c_1 + c_2} \\ &= \frac{c_1 \ln(1 - e^{z_1}) + c_2 \ln(1 - e^{z_2})}{c_1 + c_2} \\ &= \frac{c_1 \ln(1 - F_1) + c_2 \ln(1 - F_2)}{c_1 + c_2} \ . \end{aligned}$$

Η παραπάνω ανισότητα υποδεικνύει ότι,

$$\left[1 - (F_1^{c_1} F_2^{c_2})^{1/(c_1+c_2)}\right]^{c_1+c_2} = (1-F)^{c_1}(1-F)^{c_2} \geq (1-F_1)^{c_1}(1-F_2)^{c_2} \ .$$

Επαγωγικά υποθέτουμε ότι η ανισότητα (4.6) ισχύει για κάποιο ακέραιο $n \geq 2$, και θα την αποδείξουμε για $n + 1$. Έστω $C(n) = \sum_{i=1}^{n} c_i$, και $F(n) = (\prod_{i=1}^{n} F_i^{c_i})^{1/C(n)}$. Χρησιμοποιώντας την (4.6) για $n = 2$ και την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} \left[1 - \left(\prod_{i=1}^{n+1} F_i^{c_i}\right)^{1/\sum_{i=1}^{n+1} c_i}\right]^{\sum_{i=1}^{n+1} c_i} &= \left[1 - \left(F(n)^{C(n)} F_{n+1}^{c_{n+1}}\right)^{\frac{1}{C(n)+c_{n+1}}}\right]^{C(n)+c_{n+1}} \\ &\geq (1 - F(n))^{C(n)}(1 - F_{n+1})^{c_{n+1}} \\ &\geq \prod_{i=1}^{n+1}(1 - F_i)^{c_i} \ . \end{aligned}$$

□

Τα Βήματα (2) και (3) του Αλγορίθμου ΔΚΧ

Ορθότητα: Αρχικά θα δείξουμε ότι τα σύνολα Γ_j και $\overline{\Gamma_j}$ που υπολογίζονται από τον αλγόριθμο του Σχήματος 4.4 έχουν τις ιδιότητες που απαιτούνται από τον αλγόριθμο ΔΚΧ.

1. Υπολόγισε το $\mathsf{I\Pi\Phi}(I_j, 1-\epsilon) = l^j + x_l^j$.
   Αρχικοποίησε $\beta_j(0) = 1$, $\kappa_j(0) = \mathsf{I\Pi\Phi}(I_j, 1-\epsilon)$, $x_j(0) = x_l^j$, $l = l^j$, $i = 0$, $m_j = |I_j|$.
   Αρχικοποίησε $\lambda_j(0) = \mathsf{ET\Phi A}(I_j, 1-\epsilon)$.
2. Ενόσω $\kappa_j(i) > 1$ εκτέλεσε τα ακόλουθα:
   (α) $i = i+1$.
   Αν το $x_j(i-1)$ είναι ακέραιος, $x_j(i) = x_j(i-1) - 1$.
   Διαφορετικά, $x_j(i) = \lfloor x_j(i-1) \rfloor$.
   (β) Υπολόγισε το $\beta_j(i)$ από την ακόλουθη εξίσωση:
   $$F_l = \prod_{\nu=l+1}^{m_j} f_\nu \ , \ P_l = \prod_{\nu=1}^{l} (1 - f_\nu) \ , \ \left(1 - F_l^{1/x_j(i)}\right)^{x_j(i)} = \frac{(1-\epsilon)^{\beta_j(i)}}{P_l}$$
   (γ) Αν $l = 0$, $\kappa_j(i) = x_j(i)$, $\lambda_j(i) = \mathsf{ET\Phi A}\big(I_j, (1-\epsilon)^{\beta_j(i)}\big)$, και πήγαινε στο (2).
   (δ) Υπολόγισε το $\mathsf{I\Pi\Phi}\big(I_j, (1-\epsilon)^{\beta_j(i)}\big) = l^j + x_l^j$.
   (ε) Αν $l = l^j$, $\kappa_j(i) = l + x_j(i)$, $\lambda_j(i) = \mathsf{ET\Phi A}\big(I_j, (1-\epsilon)^{\beta_j(i)}\big)$, και πήγαινε στο (2).
   (στ) Αν $l > l^j$, $\kappa_j(i) = \mathsf{I\Pi\Phi}\big(I_j, (1-\epsilon)^{\beta_j(i)}\big)$, $x_j(i) = x_l^j$, $l = l^j$, $\lambda_j(i) = \mathsf{ET\Phi A}\big(I_j, (1-\epsilon)^{\beta_j(i)}\big)$.
   (ζ) Αν $\kappa_j(i) < \kappa_j(i-1)$ πήγαινε στο (2).
   (η) Διαφορετικά, βρες το μικρότερο ακέραιο $i \geq t \geq 0$, τέτοιον ώστε $\kappa_j(i) > \kappa_j(t)$ και $\kappa_j(t-1) \geq \kappa_j(i)$. Κατόπιν, $\kappa_j(t) = \kappa_j(i)$, $x_j(t) = x_j(i)$, $\beta_j(t) = \beta_j(i)$, $\lambda_j(t) = \lambda_j(i)$, $i = t$, και πήγαινε στο (2).
3. Υπολόγισε το $\beta_j(i+1) = \log_{(1-\epsilon)}\big(1 - \prod_{\nu=1}^{m_j} f_\nu\big)$.
   (α) Αν $\beta_j(i+1) < 1$, $\kappa_j(i+1) = 1$, $\lambda_j(i+1) = 1$, $\kappa_j(i+2) = 0$, $\lambda_j(i+2) = 0$, $\beta_j(i+2) = 0$.
   (β) Διαφορετικά, $\kappa_j(i+1) = 0$, $\lambda_j(i+1) = 0$, $\beta_j(i+1) = 0$.

Σχήμα 4.4: Μια υλοποίηση των βημάτων (2) και (3) του ΔΚΧ.

Σε κάθε επανάληψη, η μεταβλητή l αναπαριστά τον αριθμό των υποσυνόλων που αποτελούνται από ένα μόνο κανάλι το οποίο έχει πλεόνασμα αξιοπιστίας για την τρέχουσα τιμή $(1-\epsilon)^{\beta_j(i)}$ του περιορισμού αξιοπιστίας. Επίσης, η μεταβλητή $x_j(i)$ αναπαριστά τον αριθμό των υποσυνόλων που υπολογίζεται μοιράζοντας ισομερώς το γινόμενο των πιθανοτήτων αποτυχίας των υπόλοιπων καναλιών F_l, ώστε να ικανοποιηθεί ο περιορισμός αξιοπιστίας $(1-\epsilon)^{\beta_j(i)}$. Προφανώς, καθώς η τιμή $(1-\epsilon)^{\beta_j(i)}$ του περιορισμού αξιοπιστίας αυξάνει προς τη μονάδα, η τιμή του l είτε μένει σταθερή είτε μειώνεται.

Από τη μέθοδο υπολογισμού γίνεται φανερό ότι $1 \geq \beta_j(i) \geq 0$. Θα δείξουμε ότι, για όλα τα $i \geq 0$, είναι $\kappa_j(i) \geq \kappa_j(i-1) - 1$. Τα βήματα (2.γ) - (2.ε) χειρίζονται την περίπτωση που η τιμή του l δεν μειώνεται για τη νέα τιμή του $\beta_j(i)$. Εφόσον το l δεν μειώνεται, η αρχική εκτίμηση $l+x_j(i)$ είναι ίση με το πάνω φράγμα $\mathsf{I\Pi\Phi}\big(I_j,(1-\epsilon)^{\beta_j(i)}\big)$ για τη νέα τιμή του $\beta_j(i)$. Επιπλέον, αν το $\kappa_j(i-1)$ είναι ακέραιος, τότε $\kappa_j(i) = \kappa_j(i-1)-1$. Διαφορετικά, είναι $\kappa_j(i) = \lfloor \kappa_j(i-1) \rfloor \geq \kappa_j(i)-1$.

Στην περίπτωση που η τιμή του l μειώνεται σαν αποτέλεσμα της μείωσης του $\beta_j(i)$, κάποια από l πιο αξιόπιστα κανάλια παύουν να έχουν πλεόνασμα αξιοπιστίας. Συνεπώς, μια διαμέριση σε τουλάχιστον $l+x_j(i)$ υποσύνολα μπορεί να σχηματισθεί αν χειριστούμε αυτά τα κανάλια όπως τα υπόλοιπα κανάλια $f_{l+1},\ldots,f_{m_j}$, $m_j = |I_j|$, που δεν παρουσιάζουν πλεόνασμα αξιοπιστίας. Επομένως, το αντίστοιχο άνω φράγμα $\kappa_j(i) = \mathsf{I\Pi\Phi}\big(I_j,(1-\epsilon)^{\beta_j(i)}\big)$ δεν μπορεί να είναι μικρότερο από την αρχική εκτίμηση $l+x_j(i)$, η οποία είναι ίση είτε με $\lfloor \kappa_j(i-1) \rfloor$, είτε με $\kappa_j(i-1)-1$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το σωστό δείκτη t, ώστε οι τιμές $\kappa_j(i)$ να συγκροτούν μία φθίνουσα ακολουθία.

Από τα παραπάνω, συνάγεται ότι το Γ_j περιέχει ζευγάρια $(\nu,\beta_j(i))$, για όλους τους ακεραίους $\nu = 0,1,\ldots,\lfloor \mathsf{I\Pi\Phi}(I_j,1-\epsilon) \rfloor$. Ακόμη, αφού για κάθε τιμή του $\beta_j(i)$, είναι $\kappa_j(i) = \mathsf{I\Pi\Phi}\big(I_j,(1-\epsilon)^{\beta_j(i)}\big)$, η ανάλυση του $\mathsf{ET\Phi A}$ υποδεικνύει ότι $\lambda_j(i) \geq \frac{\lfloor \kappa_j(i) \rfloor}{2}$.

Πολυπλοκότητα: Σε οποιοδήποτε σημείο της εκτέλεσης του αλγορίθμου, κανένα από τα l και $x_j(i)$ δεν μπορεί να ξεπερνά το $m_j = |I_j|$. Επίσης, σε κάθε επανάληψη, εκτός ενδεχομένως από τις επαναλήψεις που ακολουθούν μια μείωση του l, είτε το l είτε το $x_j(i)$ μειώνονται κατά 1. Συνεπώς ο αλγόριθμος τερματίζει μετά από το πολύ m_j^2 επαναλήψεις. Η ανάλυση του $\mathsf{ET\Phi A}$ υποδεικνύει ότι κάθε επανάληψη μπορεί να εκτελεστεί σε πολυωνυμικό χρόνο.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο αλγόριθμος δεν χρειάζεται να υπολογίσει τις τιμές των $\beta_j(i)$, αφού χρησιμοποιεί μόνο τις αντίστοιχες τιμές $(1-\epsilon)^{\beta_j(i)}$ του περιορισμού αξιοπιστίας. Μάλιστα, αφού ο αλγόριθμος $\mathsf{\Delta KX}$ χρησιμοποιεί μόνο τις τιμές $\lambda_j(i)$ που υπολογίζονται από τον $\mathsf{ET\Phi A}$ για κατάλληλα επιλεγμένες τιμές του περιορισμού αξιοπιστίας, αρκεί να αποθηκευτούν τα $\sum_{\nu=1}^{m} \log(1/f_\nu)$ πιο σημαντικά δυαδικά ψηφία για κάθε τιμή $(1-\epsilon)^{\beta_j(i)}$.

Μεγιστοποίησε το	$\sum_{j=0}^{\psi}\sum_{i=0}^{\gamma_j} y_{ji}\overline{\lambda_j}(i)$	
Με τους περιορισμούς	$\sum_{j=0}^{\psi}\sum_{i=0}^{\gamma_j} y_{ji}\beta_j(i) \leq 1$	
	$\sum_{i=0}^{\gamma_j} y_{ji} = 1$	$j = 0, \ldots, \psi$
	$y_{ji} \geq 0$	$j = 0, \ldots, \psi, \ i = 0, \ldots, \gamma_j$

Σχήμα 4.5: Μια χαλάρωση του Γενικευμένου Προβλήματος Σακιδίου

Το Γενικευμένο Πρόβλημα Σακιδίου

Σε αυτή την παράγραφο μελετάμε την προσεγγισιμότητα του Γενικευμένου Προβλήματος Σακιδίου (Generalized Knapsack), το οποίο είναι $\mathcal{NP}$-πλήρες σαν γενίκευση του απλού Προβλήματος Σακιδίου.

Ορισμός 4.2. (Γενικευμένο Πρόβλημα Σακιδίου)
ΕΙΣΟΔΟΣ: Σύνολα $\overline{\Gamma_j} = \{(\overline{\lambda_j}(0), \beta_j(0)), \ldots, (\overline{\lambda_j}(\gamma_j), \beta_j(\gamma_j))\}$, $j = 0, \ldots, \psi$, με ακέραιες τιμές για τα $\overline{\lambda_j}(i) \geq 0$, και ρητές τιμές για τα $1 \geq \beta_j(i) \geq 0$, $i = 0, \ldots, \gamma_j$. Κάθε $\overline{\Gamma_j}$ περιέχει το ζευγάρι $(0, 0)$.
ΛΥΣΗ: Μια συλλογή από ακριβώς ένα ζευγάρι $(\overline{\lambda_j}(i_j), \beta_j(i_j))$ για κάθε σύνολο $\overline{\Gamma_j}$, ώστε $\sum_{j=0}^{\psi} \beta_j(i_j) \leq 1$.
ΣΤΟΧΟΣ: Μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους $\sum_{j=0}^{\psi} \overline{\lambda_j}(i_j)$.

Λήμμα 4.4. *Υπάρχει ένας 2-προσεγγιστικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για το Γενικευμένο Πρόβλημα Σακιδίου.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την προφανή χαλάρωση (relaxation) του Γενικευμένου Προβλήματος Σακιδίου σε μορφή Γραμμικού Προγράμματος (Linear Program) που φαίνεται στο Σχήμα 4.5. Κάθε βασική αποδεκτή λύση (basic feasible solution) αυτού του γραμμικού προγράμματος έχει την ιδιότητα ότι ο αριθμός των μεταβλητών που έχουν θετικές τιμές είναι το πολύ ίσος με τον αριθμό των περιορισμών. Δηλαδή, σε κάθε βέλτιστη λύση το πολύ $\psi + 2$ μεταβλητές y_{ji} έχουν θετικές τιμές. Επομένως, αφού για κάθε σύνολο $\overline{\Gamma_j}$ υπάρχει τουλάχιστον μία μεταβλητή με θετική τιμή, υπάρχει το πολύ ένα σύνολο $\overline{\Gamma_\mu}$ με δύο μεταβλητές με θετική τιμή $0 < y_{\mu i_1}, y_{\mu i_2} < 1$, για κάποια $0 \leq i_1, i_2 \leq \gamma_\mu$. Προφανώς, για όλα τα υπόλοιπα $j \neq \mu$ υπάρχει ακριβώς μία μεταβλητή $y_{ji_j^\star} = 1$, και οι υπόλοιπες μεταβλητές y_{ji} έχουν τιμή 0.

Υποθέτουμε ότι $\beta_\mu(i_1) < \beta_\mu(i_2)$ και θέτουμε $i_\mu^\star = i_1$, $\hat{y}_{\mu i_\mu^\star} = 1$, και $\hat{y}_{\mu i_2} = 0$. Προφανώς, αφού $\beta_\mu(i_1) \leq y_{\mu i_1}\beta_\mu(i_1) + y_{\mu i_2}\beta_\mu(i_2)$, η λύση που προκύπτει είναι αποδεκτή. Αν

$$\sum_{j=0}^{\psi} \overline{\lambda_j}(i_j^\star) > \overline{\lambda_\mu}(i_2) \ ,$$

ο αλγόριθμος επιλέγει το αντικείμενο $i_j^\star$, για κάθε σύνολο $\overline{\Gamma_j}$, $j = 0, \ldots, \psi$. Διαφορετικά, ο αλγόριθμος επιλέγει να συμπεριλάβει στο σακίδιο το αντικείμενο με το μεγαλύτερο κέρδος $\overline{\lambda}_{\max} = \max_{j,i}\{\overline{\lambda_j}(i)\}$ για το σύνολο στο οποίο αυτό το αντικείμενο ανήκει, και τα αντικείμενα $(0,0)$ για όλα τα υπόλοιπα σύνολα. Αυτή η διαδικασία αποτελεί έναν 2-προσεγγιστικό αλγόριθμο, γιατί η ποσότητα $\overline{\lambda}_{\max} + \sum_{j=0}^{\psi} \lambda_j(i_j^\star)$ δεν μπορεί να είναι μικρότερη από το κέρδος της βέλτιστης λύσης του γραμμικού προγράμματος του Σχήματος 4.5. □

Λήμμα 4.5. *Υπάρχει ένα Σχήμα Προσέγγισης Πλήρως Πολυωνυμικού Χρόνου (ΣΠΠΠΧ – FPTAS) για το Γενικευμένο Πρόβλημα Σακιδίου. Το ΣΠΠΠΧ βασίζεται σε έναν ακριβή αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού που εκτελείται σε ψευδο-πολυωνυμικό χρόνο.*

Απόδειξη. Το ΣΠΠΠΧ αποτελεί μια γενίκευση του ΣΠΠΠΧ για το απλό Πρόβλημα Σακιδίου. Στη συνέχεια υιοθετούμε την παρουσίαση της Ενότητας 9.3 του [82].

Έστω $\mathsf{Vol}_j(\Lambda)$ το μικρότερο μέγεθος σακιδίου που μπορεί να χωρέσει αντικείμενα που έχουν κέρδος ακριβώς Λ και ανήκουν μόνο στα σύνολα με δείκτες $\{0, \ldots, j\}$. Αφού όλα τα σύνολα $\overline{\Gamma_j}$ περιέχουν το αντικείμενο $(0,0)$, μπορούμε να αρχικοποιήσουμε τα $\mathsf{Vol}_j(0) = 0$, για όλα τα $j = 0, \ldots, \psi$. Ο αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού βασίζεται στην ακόλουθη αναδρομική σχέση:

$$\mathsf{Vol}_j(\Lambda) = \min_{0 \leq i \leq \gamma_j} \{\mathsf{Vol}_{j-1}(\Lambda - \overline{\lambda_j}(i)) + \beta_j(i)\} \ ,$$

η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των τιμών $\mathsf{Vol}_j(\cdot)$ αυξάνοντας τις τιμές του κέρδους Λ. Ο αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού επιστρέφει τη λύση που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη τιμή του κέρδους Λ για την οποία είναι $\mathsf{Vol}_\psi(\Lambda) \leq 1$.

Συγκεκριμένα, έστω $\Lambda^\star$ η βέλτιστη τιμή, και έστω $2\overline{\Lambda}$, $2\Lambda^\star \geq 2\overline{\Lambda} \geq \Lambda^\star$, το άνω φράγμα στη βέλτιστη τιμή που υπολογίζεται από τον 2-προσεγγιστικό αλγόριθμο του Λήμματος 4.4. Επαναληπτικά, για $\Lambda = 1, \ldots, 2\overline{\Lambda}$, υπολογίζουμε το $\mathsf{Vol}_j(\Lambda)$, για όλα τα $j = 0, \ldots, \psi$. Έστω $\Gamma = \sum_{j=0}^{\psi} |\overline{\Gamma_j}| = \sum_{j=0}^{\psi}(\gamma_j + 1)$. Επειδή για κάθε τιμή του Λ ο χρόνος υπολογισμού όλων των $\mathsf{Vol}_j(\Lambda)$ είναι $\mathcal{O}(\Gamma)$, ο αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού χρειάζεται χρόνο $\mathcal{O}(\Gamma\Lambda^\star)$ για να υπολογίσει τη βέλτιστη λύση.

Το ΣΠΠΠΧ προκύπτει από τον αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού με το τέχνασμα της μείωσης των τιμών του κέρδους. Συγκεκριμένα, δεδομένης μιας σταθεράς $\delta > 0$, για να υπολογίσουμε μια λύση με κέρδος $\tilde{\Lambda} \geq \frac{\Lambda^\star}{1+\delta}$, διαιρούμε τις τιμές του κέρδους με t, $\tilde{\lambda}_j(i) = \left\lfloor \frac{\overline{\lambda_j}(i)}{t} \right\rfloor$, όπου $t \geq 1$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν ξεπερνά την ποσότητα $\frac{\delta\overline{\Lambda}}{(\psi+1)(1+\delta)} \leq \frac{\delta\Lambda^\star}{(\psi+1)(1+\delta)}$. Αυτός ο υπολογισμός του t συνεπάγεται ότι $\tilde{\Lambda} \geq \Lambda^\star - t(\psi+1) \geq \frac{\Lambda^\star}{1+\delta}$, για κάθε σταθερά $\delta > 0$. Επιπλέον, αν $T(\overline{\Lambda})$ είναι ο χρόνος εκτέλεσης για τον υπολογισμό μιας 2-προσεγγιστικής λύσης με κέρδος $\overline{\Lambda}$, ο συνολικός χρόνος για την εκτέλεση του αλγορίθμου είναι $\mathcal{O}\Big(\frac{\Gamma\overline{\Lambda}}{t} + T(\overline{\Lambda})\Big) = \mathcal{O}\Big(\frac{\Gamma(\psi+1)}{\delta} + T(\overline{\Lambda})\Big)$, δηλαδή πολυωνυμικός τόσο στο μέγεθος της εισόδου όσο και στην ποσότητα $\frac{1}{\delta}$.

Επίσης, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι βελτιώσεις που έχουν προταθεί από τους Ibarra και Kim [84], και Lawler [104] για το απλό Πρόβλημα Σακιδίου για το σχεδιασμό ενός πιο αποτελεσματικού ΣΠΠΠΧ. □

4.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάστηκαν αλγόριθμοι πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα της Αξιόπιστης Διαμέρισης καναλιών με ίδιες και διαφορετικές χωρητικότητες. Συγκεκριμένα, αποδείξαμε ότι στην περίπτωση των καναλιών ίδιων χωρητικοτήτων, το πρόβλημα της Αξιόπιστης Διαμέρισης μπορεί να προσεγγιστεί σε λόγο 2 από μια κατάλληλη παραλλαγή του γνωστού αλγορίθμου Επόμενου Ταιριάσματος. Στην περίπτωση των καναλιών διαφορετικών χωρητικοτήτων, παρουσιάσαμε έναν απλό αλγόριθμο με λογαριθμικό λόγο προσέγγισης, και ένα πιο σύνθετο με σταθερό λόγο προσέγγισης.

Ο χαρακτηρισμός της προσεγγισιμότητας του προβλήματος της Αξιόπιστης Διαμέρισης τόσο για κανάλια ίδιας χωρητικότητας, όσο και για κανάλια διαφορετικής χωρητικότητας, είναι μια ενδιαφέρουσα ερευνητική κατεύθυνση. Για το πρόβλημα της Κάλυψης Κουτιών υπάρχουν οι αλγόριθμοι First Fit Decreasing και Lowest Fit Decreasing με λόγο προσέγγισης 3/2 και 4/3 αντίστοιχα [15], και παραμένει άγνωστο αν υπάρχει ένα Ασυμπτωτικό Σχήμα Προσέγγισης Πολυωνυμικού Χρόνου (Asymptotic Polynomial Time Approximation Scheme). Μάλιστα, όπως παρατηρείται στην [15], ο σχεδιασμός ενός αλγορίθμου προσέγγισης για την Κάλυψη Κουτιών με λόγο καλύτερο από 2 δεν ήταν καθόλου απλή υπόθεση.

Το γεγονός ότι στην Αξιόπιστη Διαμέριση υπάρχουν αποδεκτές (και μάλιστα βέλτιστες) λύσεις με υποσύνολα που παρουσιάζουν έλλειμμα αξιοπιστίας, καθιστά το πρόβλημα δυσκολότερο από την Κάλυψη Κουτιών, από την οπτική γωνία του σχεδιασμού αλγορίθμων προσέγγισης. Αν και ιδέες αντίχτοιχες με αυτές των First Fit Decreasing και Lowest Fit Decreasing μπορούν να εφαρμοστούν στο πρόβλημα της Αξιόπιστης Διαμέρισης για κανάλια ίδιας χωρητικότητας, δεν φαίνεται εύκολη η προσαρμογή των βασικών επιχειρημάτων για την ανάλυση αυτών των αλγορίθμων. Επομένως, είναι ενδιαφέρον ανοικτό πρόβλημα αν η Αξιόπιστη Διαμέριση καναλιών ίδιων χωρητικοτήτων προσεγγίζεται σε λόγο μικρότερο του 2.

Η κατάσταση είναι πολύ δυσκολότερη όσον αφορά στην προσεγγισιμότητα της Αξιόπιστης Διαμέρισης καναλιών με διαφορετικές χωρητικότητες. Για την αντίστοιχη παραλλαγή της Κάλυψης Κουτιών, όπου τα αντικείμενα έχουν και κέρδος εκτός από μέγεθος, μπορούμε να δείξουμε ότι ο αντίστοιχος του αλγορίθμου Ασφαλούς Διαμέρισης επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης 2. Από την άλλη πλευρά, χρειάστηκε ο σύνθετος και χρονοβόρος αλγόριθμος Διαμέρισης με Κλάσεις Χωρητικοτήτων για την προσέγγιση σε κάποιο σταθερό λόγο της Αξιόπιστης Διαμέρισης διαφορετικών χωρητικοτήτων. Σε αυτή την παραλλαγή του προβλήματος, το ανοικτό ζήτημα δεν είναι τόσο η βελτίωση του λόγου προσέγγισης, αλλά ο σχεδιασμός ενός απλούστερου και ταχύτερου αλγορίθμου που να επιτυγχάνει σταθερό λόγο προσέγγισης.

Στο επόμενο κεφάλαιο οι αλγόριθμοι ΕΤΦΑ και ΑΔ χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση του προβλήματος της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης για κανάλια με ίδιες και διαφορετικές χωρητικότητες. Για την προσέγγιση της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης χρειάζεται η απόδειξη κάτω φραγμάτων, τα οποία ουσιαστικά σχετίζονται με το χαρακτηρισμό των πλέον αξιόπιστων αναθέσεων.

Κεφάλαιο 5

Αξιόπιστες Αναθέσεις Ελάχιστης Συμφόρησης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε το πρόβλημα της αποδοτικής κατασκευής προσεγγιστικών αξιόπιστων αναθέσεων ελάχιστης συμφόρησης. Σε αυτό το πρόβλημα θεωρούμε ένα σύνολο μηνυμάτων που πρέπει να μεταφερθούν μέσω ενός συνόλου από παράλληλα ελαττωματικά κανάλια επικοινωνίας. Κάθε κανάλι επικοινωνίας έχει μια δεδομένη χωρητικότητα, και τίθεται εκτός λειτουργίας ανεξάρτητα και με τυχαίο τρόπο. Υποθέτουμε ότι τα κανάλια που τίθενται εκτός λειτουργίας δεν παραδίδουν κανένα μήνυμα στον κόμβο προορισμού, και ότι η ανάθεση/δρομολόγηση των μηνυμάτων στα κανάλια πρέπει να γίνει εφάπαξ, με βάση την πιθανότητα αποτυχίας κάθε καναλιού. Η αξιοπιστία μιας ανάθεσης είναι η πιθανότητα όλα τα μηνύματα να φθάσουν στον κόμβο προορισμού, ή ισοδύναμα, η πιθανότητα κάθε μήνυμα να έχει δρομολογηθεί σε τουλάχιστον ένα λειτουργικό κανάλι. Θεωρούμε αποδεκτές μόνο τις αναθέσεις με αξιοπιστία τουλάχιστον $(1-\epsilon)$. Ο φόρτος που επιφέρει η μεταφορά ενός μηνύματος μέσω ενός συγκεκριμένου καναλιού επικοινωνίας είναι ανάλογος του μεγέθους του μηνύματος και αντιστρόφως ανάλογος της χωρητικότητας του καναλιού.

Από την περιγραφή του προβλήματος, είναι φανερό ότι ενδεχομένως απαιτείται η εισαγωγή πλεονασμού στη μετάδοση των μηνυμάτων, ώστε να επιτευχθεί η ζητούμενη αξιοπιστία. Από την άλλη πλευρά, η εισαγωγή πλεονασμού επιφέρει αύξηση της συμφόρησης, δηλαδή του μέγιστου φόρτου που μεταδίδεται από κάποιο κανάλι.

Όπως στα περισσότερα προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης, υπάρχουν δύο αντικρουόμενοι στόχοι: η μεγιστοποίηση της αξιοπιστίας, και η ελαχιστοποίηση της συμφόρησης. Από αυτούς τους στόχους, θεωρούμε ότι η ελαχιστοποίηση της συμφόρησης αποτελεί το κριτήριο βελτιστοποίησης, ενώ η αξιοπιστία της ανάθεσης, δηλαδή η πιθανότητα κάθε μήνυμα να έχει αντίγραφο σε τουλάχιστον ένα λειτουργικό κανάλι, αποτελεί τον περιορισμό του προβλήματος. Επομένως, σαν αποδεκτές (feasible) αναθέσεις θεωρούνται μόνο αυτές με αξιοπιστία τουλάχιστον $(1-\epsilon)$. Ο περιορισμός στην ελάχιστη αποδεκτή αξιοπιστία των αναθέσεων θέτει τα πλαίσια για το βαθμό πλεονασμού που απαιτείται για τη δημιουργία μιας αποδεκτής ανάθεσης. Επιπλέον, ο βαθμός πλεονασμού σχετίζεται άμεσα με την ελάχιστη συμφόρηση που μία $(1-\epsilon)$-αξιόπιστη ανάθεση μπορεί να επιφέρει.

Το κεντρικό ζήτημα που θα μας απασχολήσει σε αυτό το κεφάλαιο είναι ότι, εκτός από το βαθμό πλεονασμού, η δομή μιας πλεονάζουσας ανάθεσης (redundant assignment), δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο τα πλεονάζοντα αντίγραφα των μηνυμάτων κατανέμονται στα κανάλια, επηρεάζει σε σημαντικό βαθμός την αξιοπιστία της. Δηλαδή, δύο διαφορετικές πλεονάζουσες αναθέσεις με διαφορετικό βαθμό πλεονασμού μπορεί να έχουν περίπου την ίδια αξιοπιστία, επειδή η λιγότερο πλεονάζουσα αξιοποιεί με καλύτερο τρόπο τα πλεονάζοντα αντίγραφα.

Επομένως, η δομή της πιο αξιόπιστης ανάθεσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ελαχιστοποίηση του βαθμού πλεονασμού, και επομένως της συμφόρησης. Το βασικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου είναι ότι, για κανάλια με ίδιες χωρητικότητες και για συγκεκριμένες παραμέτρους, η ανάθεση που προκύπτει από τη διαμέριση των καναλιών σε ξένα υποσύνολα είναι η πλέον αξιόπιστη από όλες τις αναθέσεις που επιφέρουν την ίδια συμφόρηση. Επομένως, οι αλγόριθμοι για το πρόβλημα της Αξιόπιστης Διαμέρισης του Κεφαλαίου 4 μπορούν να εφαρμοστούν σε συνδυασμό με έναν αλγόριθμο δρομολόγησης, για την προσέγγιση της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης.

5.1 Εισαγωγή

Στο πρόβλημα της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης (Minimum Fault-Tolerant Congestion), η είσοδος αποτελείται από ένα σύνολο M από παράλληλα, ελαττωματικά κανάλια επικοινωνίας, ένα σύνολο J από μηνύματα που πρέπει να μεταδοθούν μέσω του M, και έναν περιορισμό αξιοπιστίας $(1-\epsilon)$. Κάθε κανάλι $i \in M$ έχει χωρητικότητα v_i, για κάποιον ακέραιο $v_i \geq 1$, και σφάλει/τίθεται εκτός λειτουργίας ανεξάρτητα και με πιθανότητα f_i, για κάποιο ρητό αριθμό $1 > f_i > 0$. Όταν ένα κανάλι τεθεί εκτός λειτουργίας δεν μεταδίδει κανένα μήνυμα στον κόμβο προορισμού. Κάθε μήνυμα $j \in J$ έχει μέγεθος s_j, για κάποιον ακέραιο $s_j \geq 1$, και, όταν ανατεθεί σε ένα κανάλι $i \in M$ με χωρητικότητα v_i, επιφέρει φόρτο s_j/v_i.

Το ζητούμενο είναι μία πλεονάζουσα ανάθεση $\phi : J \mapsto 2^M$, η οποία, με πιθανότητα τουλάχιστον $(1-\epsilon)$, αναθέτει κάθε μήνυμα σε τουλάχιστον ένα λειτουργικό κανάλι, και ελαχιστοποιεί την συμφόρηση των καναλιών $\mathsf{Cong}(\phi)$, δηλαδή το μέγιστο φόρτο που η ϕ αναθέτει σε κάποιο κανάλι. Όπως και στην περίπτωση της Αξιόπιστης Διαμέρισης, διακρίνουμε τις περιπτώσεις των καναλιών με ίδια χωρητικότητα, όπου όλες οι χωρητικότητες v_i είναι ίσες, και των καναλιών με διαφορετικές χωρητικότητες, όπου οι χωρητικότητες v_i μπορούν να είναι οποιοιδήποτε ακέραιοι αριθμοί.

Όσον αφορά στην πολυπλοκότητα, το πρόβλημα της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης είναι προφανώς $\mathcal{NP}$-δύσκολο, αφού το πρόβλημα της δρομολόγησης σε ίδιες παράλληλες μηχανές με στόχο την ελαχιστοποίηση του μέγιστου φόρτου (scheduling on identical machines to minimize makespan) είναι $\mathcal{NP}$-πλήρες. Όμως, ο έλεγχος αποδοχής μιας υποψήφιας λύσης ϕ, δηλαδή η επιβεβαίωση ότι η αξιοπιστία της ϕ είναι τουλάχιστον $(1-\epsilon)$, προϋποθέτει τον υπολογισμό μιας $\#\mathcal{P}$-πλήρους συνάρτησης. Επομένως, το πρόβλημα της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης δεν φαίνεται να ανήκει στην κλάση $\mathcal{NP}$. Από την άλλη πλευρά, η κλάση πολυπλοκότητας που ορίζεται ώστε να περιλαμβάνει την Ελάχιστη Αξιόπιστη Συμφόρηση μπορεί να αποδειχθεί ότι περιλαμβάνει ολόκληρη την Πολυωνυμική Ιεραρχία $\mathcal{PH}$ (π.χ. βλ. [114]).

Δεν έχουμε υπόψη μας άλλες ερευνητικές εργασίες, που να παρουσιάζουν αλγορίθμους προσέγγισης για παρόμοια προβλήματα βελτιστοποίησης, όπου περιορισμοί αξιοπιστίας τίθενται για τη διατήρηση μιας ιδιότητας σε συνδυαστικές δομές που υπόκεινται σε τυχαία και ανεξάρτητα σφάλματα. Επίσης δεν έχουμε υπόψη μας κάποιες εργασίες που να ορίζουν και να μελετούν κάποιο πρόβλημα παρόμοιο με την Ελάχιστη Αξιόπιστη Συμφόρηση.

Στον ορισμό της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης δεν τίθεται άνω φράγμα στον αριθμό των μη λειτουργικών καναλιών. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα κάθε μη τετριμμένο κάτω φράγμα στην Ελάχιστη Αξιόπιστη Συμφόρηση να προϋποθέτει τον χαρακτηρισμό των πλέον αξιόπιστων αναθέσεων.

Αξίζει να αναφερθεί η μοναδική εργασία που έχουμε υπόψη μας και αφορά στο χαρακτηρισμό των πλέον αξιόπιστων και αναξιόπιστων γραφημάτων και υπεργραφημάτων, που υπόκεινται σε τυχαία και ανεξάρτητα σφάλματα ακμών, ως προς την ιδιότητα της συνεκτικότητας [109].

Το πρόβλημα της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης διαφέρει από τα on-line προβλήματα δρομολόγησης σε μη αξιόπιστες παράλληλες μηχανές (π.χ. [90, 91]), γιατί είναι ένα off-line πρόβλημα βελτιστοποίησης, και μπορεί πάντα να λυθεί με βέλτιστο τρόπο από έναν αλγόριθμο με αρκούντως μεγάλη υπολογιστική ισχύ.

Ο off-line υπολογισμός βέλτιστων αξιόπιστων λύσεων έχει μελετηθεί για κάποια άλλα προβλήματα διαδρόμησης (routing) με περιορισμούς χειρότερης περίπτωσης ως προς την ανοχή σε λάθη. Σε αυτό το είδος περιορισμών, η συνδυαστική δομή πρέπει να αντέχει οποιονδήποτε (δηλ. με πιθανότητα 1) συνδυασμό από το πολύ $f \cdot m$ λάθη. Για παράδειγμα, στην [64], παρουσιάζονται αλγόριθμοι προσέγγισης για το πρόβλημα της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης για πλεονάζουσες διατάξεις Ιδεατών Μονοπατιών (Virtual Path layouts) σε πλήρη ATM δίκτυα. Στην [64], τα βασικά αποτελέσματα αφορούν στην αξιοπιστία με βάση το μοντέλο χειρότερης περίπτωσης, ενώ μόνο ένα τετριμμένο λογαριθμικό πάνω φράγμα δίνεται για το μοντέλο τυχαίων και ανεξάρτητων λαθών.

5.1.1 Ορισμοί

Έστω M ένα σύνολο από ελαττωματικά παράλληλα κανάλια, καθένα από τα οποία έχει μια ακέραιη χωρητικότητα $v_i \geq 1$ και τίθεται εκτός λειτουργίας ανεξάρτητα με πιθανότητα f_i, για κάποιο ρητό αριθμό $1 > f_i > 0$. Δεδομένου ενός υποσυνόλου $M' \subseteq M$, το $\Pr[M']$ συμβολίζει την αξιοπιστία του M', δηλαδή την πιθανότητα ένα τουλάχιστον κανάλι του M' να είναι λειτουργικό,

$$\Pr[M'] = 1 - \prod_{i \in M'} f_i \ .$$

Επίσης, το $f_{\max} = \max_{i \in M}\{f_i\}$ συμβολίζει την πιθανότητα σφάλματος του λιγότερο αξιόπιστου καναλιού του M, και το $\overline{M} = \sum_{i=1}^{m}(1-f_i)$ συμβολίζει τον μέσο αριθμό λειτουργικών καναλιών.

Έστω $J = \{1, \ldots, n\}$ ένα σύνολο από μηνύματα που πρέπει να μεταδοθούν μέσω του M. Κάθε μήνυμα $j \in J$ έχει ένα ακέραιο μέγεθος $s_j \geq 1$, το $S_{\text{tot}} = \sum_{j \in J} s_j$ συμβολίζει το συνολικό μέγεθος των μηνυμάτων του J, και το $s_{\max} = \max_{j \in J}\{s_j\}$ συμβολίζει το μέγεθος του μεγαλύτερου μηνύματος.

Μια πλεονάζουσα ανάθεση $\phi : J \mapsto 2^M$ είναι μια συνάρτηση που αναθέτει κάθε μήνυμα $j \in J$ σε ένα μη κενό σύνολο καναλιών $\phi(j) \subseteq M$. Μια ανάθεση ϕ είναι εφικτή (feasible) για κάποιο σύνολο καναλιών $M' \subseteq M$, αν, για κάθε μήνυμα $j \in J$, το M' περιέχει ένα κανάλι στο οποίο το j έχει ανατεθεί, δηλαδή, για όλα τα $j \in J$, $\phi(j) \cap M' \neq \emptyset$. Δεδομένης μιας ανάθεσης ϕ, το $\Pr[\phi]$ συμβολίζει την αξιοπιστία της ϕ, δηλαδή την πιθανότητα η ανάθεση ϕ να είναι εφικτή με βάση την κατανομή διαθεσιμότητας καναλιών που οι πιθανότητες f_i ορίζουν. Προφανώς,

$$\Pr[\phi] = \sum_{\substack{M' \subseteq M \\ \phi \text{ είναι εφικτή για το } M'}} \left(\prod_{i \in M'} (1 - f_i) \prod_{i \in M - M'} f_i \right)$$

Δεδομένης μιας πλεονάζουσας ανάθεσης $\phi : J \mapsto 2^M$, *μικρότερο εφικτό σύνολο καναλιών για τη ϕ* (minimal feasible set) καλείται κάθε υποσύνολο $M' \subseteq M$, τέτοιο ώστε η ϕ είναι εφικτή για το M', και δεν είναι εφικτή για κανένα γνήσιο υποσύνολό του $M'' \subset M'$. *Ελάχιστο εφικτό σύνολο καναλιών για τη ϕ* (minimum feasible set) καλείται κάθε μικρότερο εφικτό σύνολο για τη ϕ που περιέχει τα λιγότερα κανάλια. Το $\mathsf{MF}(\phi)$ συμβολίζει τον πληθικό αριθμό ενός ελάχιστου εφικτού συνόλου καναλιών για τη ϕ.

Δεδομένης μιας ανάθεσης ϕ η οποία είναι εφικτή για το σύνολο M, το $\mathsf{Cong}(\phi)$ συμβολίζει τη συμφόρηση, δηλαδή το μέγιστο φόρτο που η ανάθεση ϕ προκαλεί στα κανάλια του M,

$$\mathsf{Cong}(\phi) = \max_{i \in M}\left\{ \sum_{j : i \in \phi(j)} \frac{s_j}{v_i} \right\}$$

Ορισμός 5.1. (Ελάχιστη Αξιόπιστη Συμφόρηση)
Εισοδος: Ένα σύνολο $M = \{(f_1, v_1), \ldots, (f_m, v_m)\}$ από ελαττωματικά παράλληλα κανάλια. Κάθε κανάλι $i \in M$ έχει μια ακέραιη χωρητικότητα $v_i \geq 1$ και τίθεται εκτός λειτουργίας ανεξάρτητα και με πιθανότητα f_i, για κάποιο ρητό $1 > f_i > 0$.
Ένα σύνολο από μηνύματα $J = \{s_1, \ldots, s_n\}$ που πρέπει να μεταδοθούν πάνω από το M. Κάθε μήνυμα $j \in J$ έχει μέγεθος s_j, για κάποιον ακέραιο $s_j \geq 1$.
Ένας περιορισμός αξιοπιστίας $(1 - \epsilon)$, για κάποιο ρητό $1 > \epsilon \geq \prod_{i=1}^{m} f_i$.
Λυση: Μια $(1 - \epsilon)$-αξιόπιστη πλεονάζουσα ανάθεση $\phi : J \mapsto 2^M$, δηλαδή μια ανάθεση κάθε μηνύματος $j \in J$ σε ένα μη κενό σύνολο καναλιών $\phi(j) \subseteq M$, ώστε $\Pr[\phi] \geq 1 - \epsilon$.
Στοχος: Ελαχιστοποίηση της συμφόρησης

$$\mathsf{Cong}(\phi) = \max_{i \in M} \left\{ \sum_{j : i \in \phi(j)} \frac{s_j}{v_i} \right\} .$$

Στη συνέχεια, διακρίνουμε τις περιπτώσεις των ίδιων χωρητικοτήτων, όπου όλα τα κανάλια έχουν μοναδιαία χωρητικότητα (δηλ. $v_i = 1$), και των διαφορετικών χωρητικοτήτων, όπου κάθε κανάλι μπορεί να έχει οποιαδήποτε ακέραια χωρητικότητα. Στην περίπτωση των διαφορετικών χωρητικοτήτων, υποθέτουμε ότι τα κανάλια έχουν διαταχθεί σε φθίνουσα σειρά των χωρητικοτήτων τους, δηλαδή $v_1 \geq \cdots \geq v_m \geq 1$.

Οι αλγόριθμοι για το πρόβλημα της Αξιόπιστης Συμφόρησης που θα παρουσιαστούν σε αυτό το κεφάλαιο, βασίζονται στην ακόλουθη στρατηγική για την κατασκευή $(1 - \epsilon)$-αξιόπιστων πλεοναζουσών αναθέσεων ϕ.

(1) Υπολόγισε μια $(1-\epsilon)$-αξιόπιστη διαμέριση $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_\kappa\}$ ενός $M' \subseteq M$.

(2) Χρησιμοποίησε έναν κατάλληλο αλγόριθμο για τη δρομολόγηση των μηνυμάτων του J στα αξιόπιστα παράλληλα κανάλια του $\mathcal{M}$ με στόχο την ελαχιστοποίηση του μέγιστου φόρτου (makespan).

(3) Για κάθε μήνυμα $j \in J$, αν το j έχει ανατεθεί στο $M_l \in \mathcal{M}$ από τη δρομολόγηση του βήματος (2), θέσε $\phi(j) = M_l$.

Προφανώς, κάθε δρομολόγηση ϕ που δημιουργείται με αυτό τον τρόπο είναι $(1 - \epsilon)$-αξιόπιστη. Στη συνέχεια, όλες οι πλεονάζουσες αναθέσεις που μπορούν να δημιουργηθούν με αυτή τη διαδικασία καλούνται αναθέσεις διαμέρισης. Συγκεκριμένα, μια ανάθεση $\phi : J \mapsto 2^M$ καλείται *ανάθεση κ-διαμέρισης* (κ-partition assignment) αν, για κάθε ζευγάρι μηνυμάτων $j_1, j_2 \in J$, είτε $\phi(j_1) = \phi(j_2)$, είτε $\phi(j_1) \cap \phi(j_2) = \emptyset$, και η ϕ αναθέτει τα μηνύματα του J σε ακριβώς κ ξένα υποσύνολα $\{M_1, \ldots, M_\kappa\}$ του M.

Το βήμα (1) ουσιαστικά καθορίζει ένα άνω φράγμα στο βαθμό πλεονασμού που απαιτείται για την ικανοποίηση του περιορισμού αξιοπιστίας από μια πλεονάζουσα ανάθεση. Επιπλέον, αν η χωρητικότητα/ταχύτητα $V(M_l)$ κάθε ενεργού καναλιού/μηχανής M_l είναι ίση με την ελάχιστη χωρητικότητα των καναλιών που ανήκουν στο M_l, $V(M_l) = \min_{i \in M_l}\{v_i\}$, τότε ο μέγιστος φόρτος της (μη-πλεονάζουσας) δρομολόγησης του J στο $\mathcal{M}$ (βήμα (2)) ισούται με τη συμφόρηση της αντίστοιχης ανάθεσης διαμέρισης ϕ (βήμα (3)).

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκαν αλγόριθμοι προσέγγισης πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα της Αξιόπιστης Διαμέρισης, που αντιστοιχεί στο βήμα (1) της παραπάνω διαδικασίας. Προφανώς, αυτοί οι αλγόριθμοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό με έναν κατάλληλο αλγόριθμο δρομολόγησης (π.χ. βλ. Κεφάλαιο 1 του [82]), για την κατασκευή $(1-\epsilon)$-αξιόπιστων πλεοναζουσών αναθέσεων. Σε αυτό το κεφάλαιο επικεντρώνουμε στην εύρεση κάτω φραγμάτων για την Ελάχιστη Αξιόπιστη Συμφόρηση, ώστε να υπολογίσουμε το λόγο προσέγγισης για τις αναθέσεις που παράγονται από αυτή τη διαδικασία.

5.1.2 Αποτελέσματα

Κατ' αρχήν, προσπαθώντας να καθορίζουμε την πολυπλοκότητα του προβλήματος της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης, ορίζουμε την φυσιολογική κλάση πολυπλοκότητας που περιέχει αυτό το πρόβλημα, και αποδεικνύουμε ότι αυτή η κλάση περιέχει ολόκληρη την Πολυωνυμική Ιεραρχία $\mathcal{PH}$.

Όσον αφορά στην προσεγγισιμότητα της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης, στην περίπτωση των καναλιών ίδιων χωρητικοτήτων, αποδεικνύουμε ότι σχεδόν βέλτιστες αναθέσεις μπορούν να κατασκευαστούν από μια βέλτιστη Αξιόπιστη Διαμέριση του M. Η απόδειξη βασίζεται σε ένα τεχνικό λήμμα ιδιαίτερου ενδιαφέροντος, το οποίο φράσσει άνω την αξιοπιστία κάθε πλεονάζουσας ανάθεσης. Με βάση αυτή την ιδιότητα, αποδεικνύουμε ότι οι πλεονάζουσες αναθέσεις που κατασκευάζονται σε πολυωνυμικό χρόνο από την εφαρμογή του ΕΤΦΑ και της δρομολόγησης λίστας (list scheduling) προσεγγίζουν σε λόγο 4 τη βέλτιστη Αξιόπιστη Συμφόρηση.

Για την περίπτωση των καναλιών διαφορετικών χωρητικοτήτων, εστιάζουμε σε μηνύματα μοναδιαίου μεγέθους, και αποδεικνύουμε ότι η εφαρμογή του ΑΔ οδηγεί σε έναν $2\left\lceil \frac{\ln(|M|/\epsilon)}{\ln(1/f_{\max})} \right\rceil$-προσεγγιστικό αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου.

5.2 Η Πολυπλοκότητα της Αξιόπιστης Συμφόρησης

Είναι γνωστό ότι ο καθορισμός του ελάχιστου μέγιστου φόρτου για τη δρομολόγηση εργασιών σε παράλληλες μηχανές μοναδιαίας ταχύτητας (scheduling on identical machines to minimize makespan) αποτελεί πλήρες πρόβλημα για την κλάση $\mathcal{NP}$ (π.χ. βλ. [62]). Συνεπώς, είναι $\mathcal{NP}$-δύσκολος ο καθορισμός της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης, ακόμα και για στιγμιότυπα που αποτελούνται από κανάλια με ίδια χωρητικότητα και πιθανότητα σφάλματος.

Από την άλλη πλευρά, το πρόβλημα της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης δεν φαίνεται να ανήκει στην κλάση $\mathcal{NP}$, τουλάχιστον για την περίπτωση των καναλιών με διαφορετικές χωρητικότητες. Η πεποίθησή αυτή βασίζεται στο γεγονός ότι ο ακριβής υπολογισμός της αξιοπιστίας των αναθέσεων ϕ αποτελεί πλήρες πρόβλημα για την κλάση $\#\mathcal{P}$. Συγκεκριμένα, δεδομένου ενός συνόλου καναλιών M, που καθένα τίθεται εκτός λειτουργίας με πιθανότητα $f = \frac{1}{2}$, ενός συνόλου J με n μηνύματα μοναδιαίου μεγέθους, και μιας αυθαίρετης πλεονάζουσας ανάθεσης $\phi : J \mapsto 2^M$, το πρόβλημα του ακριβούς υπολογισμού της $\Pr[\phi]$ είναι το ίδιο με το πρόβλημα #Monotone-SAT, δηλαδή τη μέτρηση των αναθέσεων αλήθειας που ικανοποιούν (satisfying truth assignments) μια λογική πρόταση σε συζευκτική κανονική μορφή (Conjuctive Normal Form, CNF). Το #Monotone-SAT ήταν ένα από τα προβλήματα που αποδείχθηκε $\#\mathcal{P}$-πλήρες από τον Valiant στην [129].

Η ομοιότητα των δύο προβλημάτων γίνεται εύκολα φανερή όταν αντιστοιχίσουμε μια Boolean μεταβλητή y_i σε κάθε κανάλι $i \in M$, και έναν όρο (clause) $\pi_j = \bigvee_{i \in \phi(j)} y_i$ σε κάθε μήνυμα $j \in J$. Προφανώς, η λογική πρόταση $F_\phi = \bigwedge_{j \in J} \pi_j$ ικανοποιείται από μια ανάθεση αλήθειας A ανν η πλεονάζουσα ανάθεση ϕ είναι εφικτή για το σύνολο καναλιών $M_A = \{i \in M : A(y_i) = \text{TRUE}\}$. Επομένως, η αξιοπιστία της ϕ πολλαπλασιασμένη με $2^{|M|}$, $\Pr[\phi]2^{|M|}$, είναι ακριβώς ίση με τον αριθμό των αναθέσεων αλήθειας που ικανοποιούν την πρόταση F_ϕ.

Είναι επίσης εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς ότι η Ελάχιστη Αξιόπιστη Συμφόρηση ανήκει στην κλάση $\mathcal{PSPACE}$, που περιλαμβάνει όλα τα προβλήματα που λύνονται με χρήση πολυωνυμικού αριθμού θέσεων μνήμης, αλλά δεν γνωρίζουμε αν η Ελάχιστη Αξιόπιστη Συμφόρηση ανήκει σε κάποια βαθμίδα της Πολυωνυμικής Ιεραρχίας $\mathcal{PH}$ (π.χ. βλ. [114] για τον ορισμό και τις ιδιότητες της $\mathcal{PH}$). Από την άλλη πλευρά, η Ελάχιστη Αξιόπιστη Συμφόρηση μπορεί να συμπεριληφθεί στην κλάση που περιλαμβάνει όλες τις γλώσσες L, οι οποίες μπορούν να αποφασισθούν από μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing T πολυωνυμικού χρόνου, η οποία ανάγει την L σε μία μόνο κλήση μιας συνάρτησης $g \in \#\mathcal{P}$. Επιπλέον, μετά την κλήση της συνάρτησης/χρησμού (oracle) g, το μοναδικό βήμα υπολογισμού που χρειάζεται να εκτελέσει η μηχανή T είναι μια αριθμητική σύγκριση που εμπλέκει την απάντηση της g.

Στη συνέχεια συμβολίζουμε αυτή την κλάση με $\mathcal{NP}^{\#\mathcal{P}[1,\text{comp}]}$. Τυπικά, η κλάση πολυπλοκότητας $\mathcal{NP}^{\#\mathcal{P}[1,\text{comp}]}$ περιορίζει τη λειτουργίας της μη ντετερμινιστικής μηχανής Turing T ως εξής:

(α) Αρχικά, δεδομένης μιας εισόδου x, η μηχανή T μπορεί να εκτελέσει έναν οποιονδήποτε μη ντετερμινιστικό υπολογισμό πολυωνυμικού μήκους. Ο υπολογισμός αυτός καταλήγει στην κατασκευή μιας έγκυρης εισόδου y_x για μια συνάρτηση $g \in \#\mathcal{P}$, και ενός ακεραίου αριθμού N.

(β) Κατόπιν, η μηχανή T είτε απορρίπτει το x, είτε καλεί τη συνάρτηση/χρησμό $g(y_x)$, και αποθηκεύει το αποτέλεσμα $n = g(y_x)$.

(γ) Ο μόνος υπολογισμός που η T μπορεί να κάνει, ύστερα από την αποθήκευση του n, είναι να συγκρίνει το n με το N. Το ακριβές είδος της σύγκρισης (π.χ.

ισότητα, μεγαλύτερο) δεν έχει σημασία. Τελικά, η μηχανή T αποδέχεται το x ανν η σύγκριση των n και N επιτύχει.

Όσο έχουμε υπόψη μας, η κλάση $\mathcal{NP}^{\#\mathcal{P}[1,\mathrm{comp}]}$ δεν έχει οριστεί και μελετηθεί μέχρι τώρα. Εκτός από την Ελάχιστη Αξιόπιστη Συμφόρηση, μια στοχαστική παραλλαγή του προβλήματος Σακιδίου (Stochastic Knapsack) που ορίζεται και μελετάται στην [101] ανήκει σε αυτή την κλάση. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι η κλάση $\mathcal{NP}^{\#\mathcal{P}[1,\mathrm{comp}]}$ περιέχει ολόκληρη την Πολυωνυμική Ιεραρχία $\mathcal{PH}$.

Λήμμα 5.1. $\mathcal{PH} \subseteq \mathcal{NP}^{\#\mathcal{P}[1,\mathrm{comp}]}$.

Απόδειξη. Δεδομένης μια γλώσσας $L \in \mathcal{PH}$, μπορούμε να αποφασίσουμε αν μια είσοδος x ανήκει στην L καλώντας μια μόνο φορά μια κατάλληλη συνάρτηση της κλάσης $\#\mathcal{PH}$. Επειδή, $\#\mathcal{PH} \subseteq \mathcal{FP}^{\#\mathcal{P}[1]}$ [127], υπάρχει μια μηχανή Turing T_d πολυωνυμικού χρόνου, η οποία για κάθε είσοδο x, υπολογίζει το όρισμα y_x μιας συνάρτησης $g \in \#\mathcal{P}$, καλεί την $g(y_x)$, και εκτελεί ένα ντετερμινιστικό υπολογισμό πολυωνυμικού χρόνου που χρησιμοποιεί το $n = g(y_x)$ για να αποφασίζει αν το $x \in L$.

Θα δείξουμε ότι κάθε τέτοια γλώσσα L ανήκει στην κλάση $\mathcal{NP}^{\#\mathcal{P}[1,\mathrm{comp}]}$, δηλαδή ότι υπάρχει μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing T πολυωνυμικού χρόνου, η οποία ανάγει την L σε μια συνάρτηση $g \in \#\mathcal{P}$ και ικανοποιεί τους περιορισμούς (α) - (γ). Συγκεκριμένα, η μη ντετερμινιστική μηχανή Turing T εκτελεί τα ακόλουθα βήματα.

1. Προσομοιώνει τον υπολογισμό της μηχανής T_d εικάζοντας μια τιμή $\hat{n}$ σαν αποτέλεσμα της κλήσης $g(y_x)$.

2. Αν η μηχανή T_d απορρίπτει την είσοδο x όταν το αποτέλεσμα της κλήσης $g(y_x)$ είναι $\hat{n}$, τότε η μηχανή T επίσης απορρίπτει το x. Διαφορετικά, η T καλεί τη συνάρτηση $g \in \#\mathcal{P}$ και αποθηκεύει το αποτέλεσμα $n = g(y_x)$.

3. Η μηχανή T αποδέχεται το x ανν $n = \hat{n}$.

Είναι φανερό ότι η μηχανή T ικανοποιεί τους περιορισμούς (α) - (γ) και αποδέχεται την είσοδο x αν και μόνο αν η μηχανή T_d αποδέχεται την είσοδο x. □

Επιπλέον, μια απλή εφαρμογή του Θεωρήματος του S. Cook [33] (επίσης βλ. την Ενότητα 17.2 του [114]) υποδεικνύει ότι το ακόλουθο πρόβλημα είναι πλήρες για την κλάση $\mathcal{NP}^{\#\mathcal{P}[1,\mathrm{comp}]}$:

Δεδομένης μιας λογικής πρότασης $F(X_1, X_2)$, όπου οι Boolean μεταβλητές χωρίζονται σε δύο ξένα σύνολα X_1 και X_2, υπάρχει μια μερική ανάθεση αλήθειας A για τις μεταβλητές του X_1, ώστε η λογική πρόταση που απομένει $F(A(X_1), X_2)$ να ικανοποιείται από τουλάχιστον $(1-\epsilon)2^{|X_2|}$ αναθέσεις αλήθειας για τις μεταβλητές του X_2 ;

5.3 Αξιόπιστες Αναθέσεις σε Ίδιες Χωρητικότητες

Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε ότι η ανάθεση διαμέρισης που παράγεται από την εφαρμογή των αλγορίθμων ΕΤΦΑ και δρομολόγησης λίστας (list scheduling) προσεγγίζει σε λόγο 4 την Ελάχιστη Αξιόπιστη Συμφόρηση. Συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος ΕΤΦΑ χρησιμοποιείται για την κατασκευή μιας Αξιόπιστης Διαμέρισης $\mathcal{M}$ του συνόλου καναλιών M σε λ ξένα μεταξύ τους υποσύνολα $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_\lambda\}$, ώστε $\Pr[\mathcal{M}] = \prod_{l=1}^{\lambda} \Pr[M_l] \geq 1 - \epsilon$. Κατόπιν, ο αλγόριθμος δρομολόγησης λίστας [71] χρησιμοποιείται για την κατασκευή μιας προσεγγιστικής δρομολόγησης ϕ' των μηνυμάτων του J σε λ αξιόπιστα παράλληλα κανάλια μοναδιαίας χωρητικότητας. Τελικά, για κάθε μήνυμα $j \in J$, αν το j έχει ανατεθεί στο ενεργό κανάλι l από την ϕ', θέτουμε $\phi(j) = M_l$, $1 \leq l \leq \lambda$. Προφανώς, $\Pr[\phi] = \Pr[\mathcal{M}] \geq 1 - \epsilon$, και $\mathsf{Cong}(\phi) = \mathsf{Makespan}(\phi')$.

Για την απόδειξη του λόγου προσέγγισης αυτού του αλγορίθμου χρειάζεται ένα σχετικό κάτω φράγμα στην τιμή της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης. Το κάτω φράγμα συνάγεται από το ακόλουθο τεχνικό λήμμα το οποίο έχει εφαρμογή σε όμοια κανάλια (δηλαδή κανάλια με ίδια χωρητικότητα και πιθανότητα σφάλματος). Το λήμμα διατυπώνει ότι η αξιοπιστία της πλέον αξιόπιστης πλεονάζουσας ανάθεσης κ-διαμέρισης ϕ_κ φράσσει άνω την αξιοπιστία οποιασδήποτε πλεονάζουσας ανάθεσης ϕ, $\mathsf{Cong}(\phi) \leq \nu$, $\nu\kappa$ μηνυμάτων μοναδιαίου μεγέθους σε τουλάχιστον $\kappa\mu$ όμοια κανάλια.

Λήμμα 5.2. *Για οποιουσδήποτε ακεραίους $\kappa, \nu \geq 1$, έστω ϕ μια οποιαδήποτε πλεονάζουσα ανάθεση $\nu\kappa$ μηνυμάτων μοναδιαίου μεγέθους σε ένα σύνολο M όμοιων καναλιών, που το καθένα τίθεται εκτός λειτουργίας με πιθανότητα f. Αν κάθε μήνυμα ανατίθεται σε ακριβώς μ κανάλια, $|M| \geq \kappa\mu$, και $\mathsf{Cong}(\phi) \leq \nu$, τότε $\Pr[\phi] \leq (1 - f^\mu)^\kappa = \Pr[\phi_\kappa]$.*

Απόδειξη. Προφανώς, η πιο αξιόπιστη πλεονάζουσα ανάθεση κ-διαμέρισης ϕ_κ προκύπτει από τη διαμέριση $\kappa\mu$ καναλιών σε κ υποσύνολα με μ κανάλια το καθένα, και την ανάθεση των ίδιων ν μηνυμάτων σε όλα τα κανάλια κάθε υποσυνόλου. Η αξιοπιστία αυτής της ανάθεσης είναι $\Pr[\phi_k] = (1 - f^\mu)^\kappa$. Κατόπιν, θα δείξουμε ότι η ανάθεση ϕ_κ είναι τουλάχιστον τόσο αξιόπιστη όσο οποιαδήποτε άλλη ανάθεση ϕ. Αρχικά θα υποθέσουμε ότι ο πληθάριθμος του ελάχιστου εφικτού συνόλου καναλιών για τη ϕ είναι κ, $\mathsf{MF}(\phi) = \kappa$.

Για τεχνικούς λόγους, υιοθετούμε μια χρονικά εξελισσόμενη (time-evolving) αναπαράσταση τυχαίων υποσυνόλων του M. Παρόμοιες χρονικά εξελισσόμενες αναπαραστάσεις τυχαίων υποσυνόλων ακμών έχουν χρησιμοποιηθεί στις [109, 92] για την απόδειξη κάτω φραγμάτων στην πιθανότητα ένα γράφημα υποκείμενο σε τυχαία και ανεξάρτητα σφάλματα ακμών να παραμείνει συνεκτικό.

Εισάγουμε λοιπόν την μεταβλητή $t \geq 0$ που αναπαριστά το χρόνο, και ορίζουμε ένα χρονικά εξελισσόμενο τυχαίο υποσύνολο $M(t) \subseteq M$, το οποίο αναπαριστά τα κανάλια που έχουν καταστεί λειτουργικά μέχρι τη χρονική στιγμή t. Αρχικά είναι

$M(0) = \emptyset$. Κάθε κανάλι έχει μια ανεξάρτητη, εκθετικά κατανεμημένη χρονική στιγμή άφιξης με μέση τιμή 1. Κάθε κανάλι προστίθεται στο $M(t)$ ακριβώς τη χρονική στιγμή άφιξής του. Πιο συγκεκριμένα, κάθε κανάλι $i \in M$ προστίθεται στο $M(t)$ τη χρονική στιγμή t_i, η οποία επιλέγεται ανεξάρτητα για κάθε κανάλι με κατανομή πιθανότητας $\Pr[t_i \leq t] = 1 - e^{-t}$.

Κάθε φορά που κάποιο κανάλι $i \in M$ προστίθεται στο $M(t)$, όλα τα πλεονάζοντα αντίγραφα των μηνυμάτων που έχουν ανατεθεί στο i απομακρύνονται από το σύνολο των καναλιών $M - M(t)$ που έχουν απομείνει. Αυτό συμβαίνει επειδή, αφού το σύνολο $M(t)$ περιέχει τα κανάλια που έχουν ήδη καταστεί λειτουργικά, η μετάδοση αυτών των μηνυμάτων έχει ήδη εξασφαλιστεί από το κανάλι i. Με βάση τα παραπάνω, το $\phi(t)$ συμβολίζει την ανάθεση ϕ όπως έχει διαμορφωθεί τη χρονική στιγμή t. Η ανάθεση $\phi(t)$ προκύπτει από τη ϕ με την απομάκρυνση όλων των αντιγράφων των μηνυμάτων που έχουν ανατεθεί σε κάποιο κανάλι του $M(t)$. Επίσης, όλα τα κανάλια του $M - M(t)$, στα οποία η $\phi(t)$ δεν αναθέτει κανένα μήνυμα, προστίθενται στο $M(t)$, επειδή η μελλοντική άφιξή τους δεν επηρεάζει σε τίποτα την τρέχουσα ανάθεση. Στο εξής το $m(t) = |M - M(t)|$ συμβολίζει τον αριθμό των καναλιών των οποίων η άφιξη επηρεάζει την τρέχουσα ανάθεση $\phi(t)$, δηλαδή τον αριθμό των καναλιών στα οποία η $\phi(t)$ αναθέτει ένα ή περισσότερα μηνύματα.

Η τυχαία μεταβλητή $T_r(\phi)$, $r = 1, \ldots, \kappa$, ορίζεται σαν η χρονική στιγμή t κατά την οποία ο πληθικός αριθμός του ελάχιστου εφικτού συνόλου για την ανάθεση $\phi(t)$ γίνεται $r - 1$ για πρώτη φορά. Δηλαδή, η τυχαία μεταβλητή $T_r(\phi)$ δηλώνει τη χρονική στιγμή t που η άφιξη ενός καναλιού προκαλεί τη μείωση της παραμέτρου $\mathsf{MF}(\phi(t))$ από r σε $r - 1$. Θα δείξουμε ότι η τυχαία μεταβλητή $T_1(\phi)$ στοχαστικά επικρατεί (stochastically dominates) της $T_1(\phi_\kappa)$, δηλαδή

$$\forall t \geq 0, \quad \Pr[T_1(\phi) \geq t] \geq \Pr[T_1(\phi_k) \geq t] \ .$$

Είναι φανερό ότι ο ισχυρισμός του λήμματος συνάγεται από αυτή τη σχέση, γιατί $\Pr[T_1(\phi) \leq t]$ είναι η πιθανότητα η ανάθεση ϕ να καταστεί εφικτή μέχρι τη χρονική στιγμή t.

Έστω $T_{\kappa+1}(\phi) = 0$. Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές $\theta_r(\phi) = T_r(\phi) - T_{r+1}(\phi)$, $r = 1, \ldots, \kappa$, που συμβολίζουν το μήκος του χρονικού διαστήματος για το οποίο η ανάθεση $\phi(t)$ έχει πληθικό αριθμό ελάχιστου εφικτού συνόλου $\mathsf{MF}(\phi(t))$ ίσο με r. Δηλαδή, η τυχαία μεταβλητή $\theta_r(\phi)$ δηλώνει το χρονικό διάστημα που χρειάζεται για να μειωθεί το $\mathsf{MF}(\phi(t))$ από r σε $r - 1$. Μάλιστα, αφού η άφιξη ενός καναλιού μπορεί να προκαλέσει τη μείωση του $\mathsf{MF}(\phi(t))$ το πολύ κατά μια μονάδα, ισχύει ότι $T_1(\phi) = \sum_{r=1}^{\kappa} \theta_r(\phi)$.

Εξ' αιτίας της ιδιότητας της αμνησίας (memoryless property) που έχει η εκθετική κατανομή, το χρονικό διάστημα μέχρι την άφιξη του επόμενου καναλιού είναι πάντα ανεξάρτητο από τις προηγούμενες αφίξεις (δηλαδή το σύνολο $M(t)$), και τη χρονική στιγμή t. Επομένως, έχοντας υποθέσει μια συγκεκριμένη τιμή για το $M(t)$ (condition on the value of $M(t)$), ο χρόνος για την άφιξη του επόμενου καναλιού έχει συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $1 - e^{-m(t)t}$. Στην [92] αποδεικνύεται ότι, επειδή η χρονική στιγμή της επόμενης άφιξης δεν έχει καμία επίδραση στην ταυτότητα του καναλιού που θα αφιχθεί, το χρονικό διάστημα είναι πάντα εκθετικά κατανεμημένο με μέση τιμή $1/m(t) = 1/|M - M(t)|$, ανεξάρτητα από την τιμή του $M(t)$ που υποθέσαμε.

Ο Lomonosov στην [109] παρατηρεί ότι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το $M(t) = M_\sigma$ αντιστοιχεί σε μια κατάσταση (state) σ μιας αλυσίδας Markov διακριτών καταστάσεων (discrete Markov chain) που ορίζεται στο 2^M. Από την κατάσταση σ, μπορούμε να μεταβούμε μόνο στις καταστάσεις ρ που αντιστοιχούν σε σύνολα M_ρ, τα οποία προκύπτουν από το M_σ με την προσθήκη ενός μόνο στοιχείου. Δηλαδή, από την κατάσταση σ μπορούμε να μεταβούμε σε μια κατάσταση ρ με $M_\rho = M_\sigma \cup \{i\}$, για κάποιο κανάλι $i \in M - M_\sigma$. Οι μεταβάσεις (transitions) αυτές γίνονται με πιθανότητα $1/m_\sigma$, $m_\sigma = |M - M_\sigma| = m(t)$. Επομένως, θεωρούμε ότι πρώτα διαλέγουμε ένα μονοπάτι ω της αλυσίδας Markov με πιθανότητες μετάβασης (transition probabilities) $1/m_\sigma$ από κάθε κατάσταση σ. Στη συνέχεια διασχίζουμε το μονοπάτι έχοντας χρόνο παραμονής (sojourn time) σε κάθε κατάσταση σ εκθετικά κατανεμημένο με μέση τιμή $1/m_\sigma$. Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $D_\omega(t)$ του χρόνου που απαιτείται για να διασχίζουμε το μονοπάτι ω προκύπτει από τη συνέλιξη (convolution) των εκθετικών κατανομών με μέσες τιμές $1/m_{\sigma_0} < 1/m_{\sigma_1} < \cdots < 1/m_{\sigma_{l-1}}$, όπου l είναι το μήκος του μονοπατιού. Συγκεκριμένα,

$$D_\omega(t) = \Pr[\theta_\omega \leq t] = \sum_{j=0}^{l-1} \big(1 - e^{-m_{\sigma_j} t}\big) \prod_{0 \leq i \leq l-1, i \neq j} \frac{m_{\sigma_i}}{m_{\sigma_i} - m_{\sigma_j}}$$

Επομένως, η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας για κάθε τυχαία μεταβλητή $\theta_r(\phi)$ είναι

$$D_r(\phi, t) = \sum_\omega p_\omega D_\omega(t) \ \ ,$$

όπου ω είναι ένα μονοπάτι/ακολουθία από αφίξεις καναλιών που προκαλεί τη μείωση του $\mathsf{MF}(\phi(t))$ από r σε $r-1$, και p_ω είναι η πιθανότητα να συμβεί αυτή η ακολουθία. Οι τυχαίες μεταβλητές $\theta_r(\phi)$, $r = 1, \ldots, \kappa$, είναι αμοιβαία ανεξάρτητες, γιατί είναι βεβαρημένα αθροίσματα ξένων μεταξύ τους συνόλων τυχαίων μεταβλητών. Είναι γνωστό ότι, αν X_1, X_2, Y_1, Y_2 είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, η X_1 επικρατεί της Y_1, και η X_2 επικρατεί της Y_2, τότε η τυχαία μεταβλητή $X_1 + X_2$ επίσης επικρατεί της $Y_1 + Y_2$. Επομένως, για να αποδείξουμε το λήμμα, αρκεί να δείξουμε ότι, για όλα τα $r = 1, \ldots, \kappa$, οι τυχαίες μεταβλητές $\theta_r(\phi)$ στοχαστικά επικρατούν των $\theta_r(\phi_\kappa)$.

Ενδεχομένως να υπάρχουν χρονικές στιγμές t, κατά τις οποίες η στοχαστική διαδικασία που έχουμε περιγράψει βρίσκεται σε μια κατάσταση σ με $m(t) = m_\sigma > r\mu$ και $\mathsf{MF}(\sigma) = r$ (δηλ. ο πληθικός αριθμός του ελάχιστου εφικτού συνόλου για την τρέχουσα ανάθεση $\phi(t)$ που αντιστοιχεί στην κατάσταση σ είναι ίσος με r). Μια κατάσταση ρ της στοχαστικής διαδικασίας καλείται *ανεπιθύμητη*, όταν $\mathsf{MF}(\rho) = r$ και η άφιξη περισσότερων από $r\mu$ καναλιών προκαλεί μετάβαση σε καταστάσεις ρ' που είτε είναι ανεπιθύμητες είτε έχουν $\mathsf{MF}(\rho') = r-1$. Στο εξής χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα υποθέσουμε ότι η μετάβαση σε μια ανεπιθύμητη κατάσταση ρ με $\mathsf{MF}(\rho) = r$ ισοδυναμεί με απευθείας μετάβαση σε μία κατάσταση ρ' με $\mathsf{MF}(\rho') = r-1$. Αυτή η υπόθεση απλοποιεί τη μελέτη παραλείποντας μεταβάσεις μεταξύ ανεπιθύμητων καταστάσεων με τον ίδιο πληθικό αριθμό ελάχιστου εφικτού συνόλου. Μια κατάσταση σ της στοχαστικής διαδικασίας καλείται *επιθυμητή*, όταν $\mathsf{MF}(\sigma) = r$ και η άφιξη το πολύ $r\mu$ καναλιών προκαλεί μετάβαση σε καταστάσεις ρ' που είτε είναι ανεπιθύμητες, είτε έχουν $\mathsf{MF}(\rho') = r-1$.

Έστω σ μια οποιαδήποτε κατάσταση, $m_\sigma > r\mu$, κατά τη μετάβαση στην οποία το $\mathsf{MF}(\phi(t))$ παίρνει την τιμή r για πρώτη φορά (δηλ. η μετάβαση στην m_σ συνοδεύεται από μείωση του $\mathsf{MF}(\phi(t))$ σε r). Παρατηρούμε ότι για όλες αυτές τις καταστάσεις σ υπάρχει ένα μονοπάτι $\omega = (\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_x)$, ώστε $\mathsf{MF}(\sigma) = \mathsf{MF}(\sigma_1) = \cdots = \mathsf{MF}(\sigma_x) = r$ και $m_{\sigma_x} \leq r\mu$. Το μονοπάτι ω αντιστοιχεί στην άφιξη ενός συνόλου καναλιών $M_{\mathrm{good}} \subseteq M - M(t)$, $|M_{\mathrm{good}}| \geq m_\sigma - r\mu$, τα οποία δεν μεταβάλουν την τιμή του $\mathsf{MF}(\phi(t))$, ενώ μειώνουν την τιμή του $m(t)$ σε $r\mu$ ή λιγότερο. Σε κάθε περίπτωση που όλες οι επόμενες αφίξεις είναι κανάλια του συνόλου M_{good}, η στοχαστική διαδικασία μεταβαίνει στην κατάσταση σ_x, ανεξαρτήτως της συγκεκριμένης σειράς αφίξεων. Επειδή η κατάσταση σ_x είναι επιθυμητή, όλες οι καταστάσεις $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{x-1}$ είναι επίσης επιθυμητές. Συνεπώς, για όλα τα $r = 1, \ldots, \kappa$, όλες οι καταστάσεις, για τις οποίες το $\mathsf{MF}(\phi(t))$ παίρνει την τιμή r για πρώτη φορά, είναι επιθυμητές.

Έστω r, $1 \leq r \leq \kappa$, ένας οποιοσδήποτε ακέραιος. Υποθέτουμε ότι η άφιξη ενός καναλιού έχει μόλις προκαλέσει τη μείωση του $\mathsf{MF}(\phi(t))$ από $r+1$ σε r. Επομένως, η αντίστοιχη κατάσταση σ είναι επιθυμητή. Θα δείξουμε ότι η τυχαία μεταβλητή $\theta_r(\phi)$ επικρατεί στοχαστικά μιας εκθετικά κατανεμημένης τυχαίας μεταβλητής με μέση τιμή $1/r\mu$. Ένα ενδεχόμενο για την επιθυμητή κατάσταση σ είναι να έχει το πολύ $r\mu$ κανάλια με μη μηδενικό φόρτο στη $\phi(t)$, $m(t) = m_\sigma \leq r\mu$. Σε αυτή την περίπτωση, ο χρόνος παραμονής στην κατάσταση σ είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή τουλάχιστον $1/r\mu$, και επομένως, η $\theta_r(\phi)$ επικρατεί μιας εκθετικά κατανεμημένης τυχαίας μεταβλητής με μέση τιμή $1/r\mu$.

Το άλλο ενδεχόμενο είναι η σ να έχει περισσότερα από $r\mu$ κανάλια με μη μηδενικό φόρτο στη $\phi(t)$, $m(t) = m_\sigma > r\mu$. Επειδή η σ είναι επιθυμητή κατάσταση, με πιθανότητα το πολύ $\frac{r\mu}{m_\sigma}$, η στοχαστική διαδικασία μεταβαίνει σε μια κατάσταση ρ με $\mathsf{MF}(\rho) = r-1$, ενώ με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - \frac{r\mu}{m_\sigma}$, μεταβαίνει σε μια άλλη επιθυμητή κατάσταση σ'. Υπενθυμίζουμε ότι κάθε μετάβαση σε μια ανεπιθύμητη κατάσταση $\hat{\rho}$ με $\mathsf{MF}(\hat{\rho}) = r$ θεωρείται σαν απευθείας μετάβαση σε μια κατάσταση ρ με $\mathsf{MF}(\rho) = r-1$. Ο χρόνος που η στοχαστική διαδικασία παραμένει στην κατάσταση σ (δηλ. ο χρόνος που απαιτείται για να γίνει η μετάβαση) δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη μετάβαση, και είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή $1/m_\sigma$.

Σε περίπτωση μετάβασης σε επιθυμητή κατάσταση, το παραπάνω σενάριο επαναλαμβάνεται μέχρι να γίνει $m_{\sigma'} \leq r\mu$, όποτε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το $\mathsf{MF}(\phi(t))$ μειώνεται σε $r-1$ με πιθανότητα 1. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι η τυχαία μεταβλητή $\theta_r(\sigma')$, που δηλώνει το χρόνο που απαιτείται για τη μετάβαση από μια επιθυμητή κατάσταση σ' σε μια κατάσταση ρ' με $\mathsf{MF}(\rho')) = r - 1$, επικρατεί στοχαστικά μιας εκθετικά κατανεμημένης τυχαίας μεταβλητής με μέση τιμή $1/r\mu$. Επομένως, επειδή

$$\frac{m_\sigma - r\mu}{m_\sigma}\left(1 + \frac{r\mu}{m_\sigma - r\mu}e^{-m_\sigma t} - \frac{m_\sigma}{m_\sigma - r\mu}e^{-r\mu t}\right) + \frac{r\mu}{m_\sigma}(1 - e^{-m_\sigma t}) = 1 - e^{-r\mu t} \ ,$$

για κάθε επιθυμητή κατάσταση σ με $\mathsf{MF}(\sigma) = r$, η $\theta_r(\sigma)$ επίσης επικρατεί στοχαστικά μιας εκθετικά κατανεμημένης τυχαίας μεταβλητής με μέση τιμή $1/r\mu$.

Η εξέλιξη της στοχαστικής διαδικασίας για την ανάθεση κ-διαμέρισης ϕ_κ είναι απλούστερη. Όταν $\mathsf{MF}(\phi_\kappa(t)) = r$, $r = 1, \ldots, \kappa$, τότε η αντίστοιχη κατάσταση σ_κ έχει πάντα $m_{\sigma_\kappa} = r\mu$, δηλαδή ακριβώς $r\mu$ κανάλια με μη μηδενικό φόρτο. Μάλιστα ο φόρτος κάθε τέτοιου καναλιού είναι ακριβώς ν. Επειδή για καθένα από τα $r\mu$ κανάλια, υπάρχουν άλλα $\mu - 1$ που περιέχουν ακριβώς τα ίδια αντικείμενα, η επομένη άφιξη καναλιού προκαλεί τη μείωση του $\mathsf{MF}(\phi_\kappa(t))$ σε $r - 1$, και τη μείωση του αριθμού των καναλιών με μη μηδενικό φόρτο σε $(r - 1)\mu$. Συνεπώς, για κάθε $r = 1, \ldots, \kappa$, η τυχαία μεταβλητή $\theta_r(\phi_\kappa)$ είναι εκθετικά κατανεμημένη με μέση τιμή $1/r\mu$, και η τυχαία μεταβλητή $\theta_r(\phi)$ επικρατεί στοχαστικά της $\theta_r(\phi_\kappa)$.

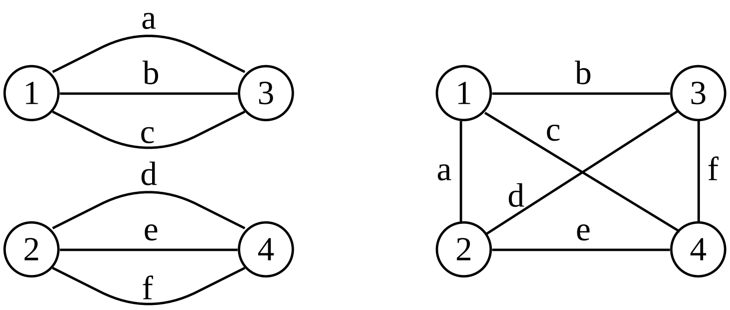
Αξίζει να σημειωθεί ότι οι καταστάσεις σ στην πραγματικότητα αναπαριστούν όλες τις καταστάσεις/επιμέρους αναθέσεις που δημιουργούνται από την άφιξη ενός από τα m_σ διαφορετικά κανάλια της σ με μη μηδενικό φόρτο. Όμως, επειδή η εκθετική κατανομή επιτρέπει να διαφοροποιούμε τις καταστάσεις μόνο με βάση τις παραμέτρους $\mathsf{MF}(\sigma)$ και m_σ (δηλαδή τον πληθικό αριθμό του ελάχιστου εφικτού συνόλου και τον αριθμό των καναλιών με μη μηδενικό φόρτο), απλοποιούμε την ανάλυση χρησιμοποιώντας τις σ σαν απλές καταστάσεις.

Η απόδειξη ολοκληρώνεται θεωρώντας μια πλεονάζουσα ανάθεση ϕ', η οποία ικανοποιεί την υπόθεση του λήμματος και έχει $\mathsf{MF}(\phi') > \kappa$. Είναι φανερό ότι η ϕ' δεν μπορεί να είναι πιο αξιόπιστη από μια ανάθεση ϕ με $\mathsf{MF}(\phi) = \kappa$, γιατί η στοχαστική διαδικασία για τη ϕ' πρέπει επίσης να διέρχεται από μια επιθυμητή κατάσταση σ με $\mathsf{MF}(\sigma) = \kappa$. □

Παρατήρηση. Το Λήμμα 5.2 έχει εφαρμογή στην πιθανότητα μη εμφάνισης απομονωμένων κόμβων (isolated nodes) σε ένα (όχι απαραίτητα συνεκτικό) υπεργράφημα (hypergraph) με $\kappa\mu$ ελαττωματικές υπερακμές (hyperedges) πληθικού αριθμού ν. Έστω $|M| = \mu\kappa$, και η ϕ αναθέτει κάθε μήνυμα σε ακριβώς μ κανάλια. Από μια τέτοια πλεονάζουσα ανάθεση ϕ, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα υπεργράφημα $H_\phi(N, E)$, όπου το N αποτελείται από $\nu\kappa$ κόμβους (nodes) που αντιστοιχούν στα μηνύματα, και το E αποτελείται από $\mu\kappa$ υπερακμές που αντιστοιχούν στα κανάλια του M. Κάθε υπερακμή $e \in E$ περιλαμβάνει όλα τα μηνύματα που έχουν ανατεθεί από τη ϕ στο αντίστοιχο κανάλι του M. Επομένως, ο πληθικός αριθμός κάθε υπερακμής $e \in E$ είναι ακριβώς ν. Ο βαθμός κάθε κόμβου $v \in N$ είναι $\deg_{H_\phi}(v) = |\{e \in E(H_\phi) : v \in e\}|$.

3	3	3	4	4	4
1	1	1	2	2	2
a	b	c	d	e	f

2	3	4	3	4	4
1	1	1	2	2	3
a	b	c	d	e	f



Σχήμα 5.1: Δύο αναθέσεις 4 μηνυμάτων σε 6 όμοια κανάλια ($\nu = 2$).

Είναι προφανές ότι μια ανάθεση ϕ είναι εφικτή για κάποιο $M' \subseteq M$, ανν η απομάκρυνση των υπερακμών που αντιστοιχούν στο $M - M'$ δεν προκαλεί την εμφάνιση απομονωμένων κόμβων (δηλ. κόμβων με μηδενικό βαθμό) στο H_ϕ. Το Λήμμα 5.2 συνεπάγεται ότι το υπεργράφημα Π_κ που αντιστοιχεί στην πιο αξιόπιστη ανάθεση κ-διαμέρισης ϕ_κ έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να μην εμφανίσει απομονωμένους κόμβους, όταν οι υπερακμές του σβήνονται με ανεξάρτητο και τυχαίο τρόπο.

Το Σχήμα 5.1 απεικονίζει δύο διαφορετικές αναθέσεις από 4 μηνύματα μοναδιαίου μεγέθους, $J = \{1, 2, 3, 4\}$, σε 6 όμοια κανάλια, $M = \{a, b, c, d, e, f\}$, για $\kappa = 2$ και $\nu = 2$. Επίσης, απεικονίζει τα αντίστοιχα γραφήματα. Αν κάθε κανάλι τίθεται εκτός λειτουργίας με πιθανότητα f, $1 > f > 0$, τότε η πιθανότητα αποτυχίας της ανάθεσης 2-διαμέρισης ϕ_2 είναι $2f^3 - f^6$, ενώ η πιθανότητα αποτυχίας της ανάθεσης κλίκας ϕ είναι $4f^3 - 6f^5 + 3f^6$. Είναι φανερό ότι $4f^3 - 6f^5 + 3f^6 > 2f^3 - f^6$, για όλα τα $1 > f > 0$. Επίσης, η συνάρτηση κατανομής πιθανότητα για την τυχαία μεταβλητή $T_1(\phi)$ είναι $D(\phi, t) = 1 - 3e^{-6t} + 6e^{-5t} - 4e^{-3t}$, ενώ η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας για την $T_1(\phi_2)$ είναι $D(\phi_2, t) = 1 + e^{-6t} - 2e^{-3t}$. $\square$

Η ακόλουθη πρόταση είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 5.2 και αφορά την πιο γενική περίπτωση που ο συνολικός αριθμός πλεοναζόντων αντιγράφων για τα $\nu\kappa$ μηνύματα είναι $\nu\kappa\mu$.

Πόρισμα 5.1. *Για οποιουσδήποτε ακεραίους $\kappa, \nu \geq 1$, έστω ϕ μια οποιαδήποτε πλεονάζουσα ανάθεση $\nu\kappa$ μηνυμάτων μοναδιαίου μεγέθους σε ένα σύνολο M όμοιων καναλιών, που το καθένα τίθεται εκτός λειτουργίας με πιθανότητα f. Αν κάθε* *μήνυμα j, $j = 1, \ldots, \nu\kappa$, ανατίθεται σε ακριβώς μ_j κανάλια ώστε $\sum_{j=1}^{\nu\kappa} \mu_j = \nu\kappa\mu$, $|M| \geq \kappa\mu$, και $\mathsf{Cong}(\phi) \leq \nu$, τότε $\Pr[\phi] \leq (1 - f^{\mu})^{\kappa} = \Pr[\phi_\kappa]$.*

Απόδειξη. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς (π.χ. με χρήση του τύπου εγκλεισμού-αποκλεισμού) ότι πάντα υπάρχει μια πλεονάζουσα ανάθεση ϕ' για $\nu\kappa$ μηνύματα μοναδιαίου μεγέθους στο M, ώστε η ϕ' να αναθέτει κάθε μήνυμα σε ακριβώς μ κανάλια, και να έχει $\mathsf{Cong}(\phi') = \mathsf{Cong}(\phi)$, και $\Pr[\phi] \leq \Pr[\phi']$. □

Αυτό το πόρισμα χρησιμοποιείται για την απόδειξη ενός μη τετριμμένου κάτω φράγματος για την Ελάχιστη Αξιόπιστη Συμφόρηση.

Λήμμα 5.3. *Για κάθε σύνολο καναλιών με ίδιες χωρητικότητες $M = \{f_1, \ldots, f_m\}$, n μηνύματα μοναδιαίου μεγέθους, και περιορισμό αξιοπιστίας $(1 - \epsilon)$, η Ελάχιστη Αξιόπιστη Συμφόρηση $\mathsf{Cong}^\star$ δεν μπορεί να είναι μικρότερη από $\frac{n}{\lceil \mathsf{\Pi\Phi}(M, 1-\epsilon) \rceil}$.*

Απόδειξη. Έστω ϕ μια οποιαδήποτε $(1 - \epsilon)$-αξιόπιστη πλεονάζουσα ανάθεση n μηνυμάτων μοναδιαίου μεγέθους στο σύνολο καναλιών μοναδιαίας χωρητικότητας M. Αρχικά υποθέτουμε ότι ο αριθμός l των καναλιών που εμφανίζουν πλεόνασμα αξιοπιστίας στο στιγμιότυπο $(M, 1 - \epsilon)$ του προβλήματος Αξιόπιστης Διαμέρισης είναι μηδέν. Έστω $\kappa = \lceil \mathsf{\Pi\Phi}(M, 1 - \epsilon) \rceil = \lceil x \rceil$, όπου ο πραγματικός αριθμός x ορίζεται από τη σχέση

$$\left(1 - F^{1/x}\right)^x = 1 - \epsilon \ , \quad F = \prod_{i=1}^{m} f_i \ .$$

Επομένως, το στιγμιότυπο $(M, 1-\epsilon)$ μπορεί να διαμεριστεί το πολύ σε κ υποσύνολα, καθένα με αξιοπιστία το πολύ $1 - F^{1/x}$.

Για να χειριστούμε τις διαφορετικές πιθανότητες σφάλματος που έχουν τα κανάλια του M, επιλέγουμε έναν αρκούντως μικρό πραγματικό αριθμό δ, και αντικαθιστούμε κάθε κανάλι i με πιθανότητα σφάλματος f_i με μια "δέσμη" από $m_i = \left\lceil \frac{-\ln f_i}{\delta} \right\rceil$ παράλληλα κανάλια, καθένα από τα οποία τίθεται εκτός λειτουργίας με πιθανότητα $f = 1-\delta$ (επίσης βλ. [92]). Όλα τα μηνύματα που έχουν ανατεθεί στο κανάλι i ανατίθενται σε όλα τα m_i παράλληλα κανάλια της δέσμης. Επομένως, η δέσμη των m_i παράλληλων καναλιών περιέχει ένα τουλάχιστον λειτουργικό κανάλι με πιθανότητα

$$1 - (1 - \delta)^{\left\lceil \frac{-\ln f_i}{\delta} \right\rceil} \ .$$

Επειδή η παραπάνω πιθανότητα τείνει στο f_i καθώς το $\delta \to 0$, η αξιοπιστία της ανάθεσης $\hat{\phi}$, που προκύπτει από τις αντικαταστάσεις των καναλιών του M με δέσμες όμοιων καναλιών, τείνει στην $\Pr[\phi]$.

Το Πόρισμα 5.1 υποδεικνύει ότι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε μια πλεονάζουσα ανάθεση ϕ που αναθέτει κάθε μήνυμα j σε ένα σύνολο καναλιών M_j με αξιοπιστία $\Pr[M_j] = 1 - F^{1/x}$. Επομένως, για αρκούντως μικρό

$\delta > 0$, η $\hat{\phi}$ αναθέτει κάθε μήνυμα στον ίδιο αριθμό μ καναλιών. Το Λήμμα 5.2 υποδεικνύει ότι, αν $\mathsf{Cong}(\phi) = \mathsf{Cong}(\hat{\phi}) < \frac{n}{\kappa}$, τότε $\Pr[\hat{\phi}] < 1 - \epsilon$.

Σε περίπτωση που ο αριθμός l των καναλιών που εμφανίζουν πλεόνασμα αξιοπιστίας στο $(M, 1-\epsilon)$ είναι μεγαλύτερος του μηδενός, όπως στην ανάλυση του ΕΤΦΑ υποθέτουμε ότι τα κανάλια έχουν διαταχθεί σε φθίνουσα σειρά αξιοπιστίας. Συνεπώς, η αξιοπιστία των πρώτων l πιο αξιόπιστων καναλιών είναι μεγαλύτερη από την αξιοπιστία $1 - F_l^{1/x_l}$ των υπόλοιπων x_l υποσυνόλων, όπου $F_l = \prod_{i=l+1}^{m} f_i$ (βλ. την ανάλυση του ΕΤΦΑ για τους ακριβείς ορισμούς των l και x_l). Μπορούμε λοιπόν χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρήσουμε ότι η ϕ αναθέτει κάθε μήνυμα j είτε σε ακριβώς ένα από τα l πιο αξιόπιστα κανάλια, είτε σε ένα υποσύνολο M_j του $M_r = M - \bigcup_{i=1}^{l}\{f_i\}$ με αξιοπιστία $\Pr[M_j] = 1 - F_l^{1/x_l}$. Αν $\mathsf{Cong}(\phi) < \frac{n}{l + \lceil x_l \rceil} = \frac{n}{\lceil \mathsf{I\Pi\Phi}(M, 1-\epsilon) \rceil}$, τότε η αξιοπιστία της μερικής ανάθεσης στο σύνολο M_r θα είναι αυστηρά μικρότερη του $\frac{1-\epsilon}{P_l}$, όπου $P_l = \prod_{i=1}^{l}(1 - f_i)$. □

Το ακόλουθο ολοκληρώνει την ανάλυση του αλγορίθμου για την προσέγγιση της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης σε κανάλια ίδιων χωρητικοτήτων, και αποτελεί συνδυασμό του Θεωρήματος 4.1, του Λήμματος 5.3, και της ανάλυσης του αλγορίθμου δρομολόγησης λίστας.

Θεώρημα 5.1. *Η πλεονάζουσα ανάθεση ϕ που παράγεται σε πολυωνυμικό χρόνο από την εφαρμογή των* ΕΤΦΑ *και δρομολόγησης λίστας επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης 4 για την Ελάχιστη Αξιόπιστη Συμφόρηση.*

Απόδειξη. Έστω ένα στιγμιότυπο $(M, J, 1-\epsilon)$ για το πρόβλημα της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης, και έστω κ ο βέλτιστος αριθμός υποσυνόλων για το αντίστοιχο στιγμιότυπο $(M, 1-\epsilon)$ του προβλήματος Αξιόπιστης Διαμέρισης. Επομένως, κάθε διαμέριση του M σε $\kappa + 1$ ή περισσότερα υποσύνολα θα πρέπει να είναι λιγότερο αξιόπιστη από $(1-\epsilon)$. Συνεπώς, το Λήμμα 5.3 υποδεικνύει ότι κάθε βέλτιστη $(1-\epsilon)$-αξιόπιστη ανάθεση πρέπει να έχει συμφόρηση $\mathsf{Cong}^\star \geq \max\left\{\frac{S_{\rm tot}}{\kappa+1}, s_{\max}\right\}$.

Προφανώς, αν $\kappa = 1$, ο συνδυασμός των ΕΤΦΑ και δρομολόγησης λίστας δίνει μία βέλτιστη λύση. Για όλα τα $\kappa \geq 2$, επειδή $\mathsf{ET\Phi A}(M, 1-\epsilon) \geq \frac{\kappa}{2}$, η ανάλυση του αλγορίθμου δρομολόγησης λίστας [71] υποδεικνύει ότι

$$\mathsf{Cong}(\phi) \leq \frac{2S_{\rm tot}}{\kappa} + s_{\max} \leq \frac{3S_{\rm tot}}{\kappa+1} + s_{\max} \leq 4\mathsf{Cong}^\star$$

□

Το ακόλουθο πόρισμα δηλώνει ότι η συμφόρηση της πλεονάζουσας αξιόπιστης ανάθεσης που παράγεται από τον ΕΤΦΑ και τη δρομολόγηση λίστας είναι, με μεγάλη πιθανότητα, το πολύ κατά ένα λογαριθμικό παράγοντα μεγαλύτερη από τον βέλτιστο μέγιστο φόρτο (makespan) που μπορεί να πετύχει μια (μη πλεονάζουσα) δρομολόγηση, που γνωρίζει εκ των προτέρων τα λειτουργικά κανάλια.

Πόρισμα 5.2. *Αν $\ln(\overline{M}/\epsilon) > 0$, η πλεονάζουσα ανάθεση ϕ που παράγεται από τον* ΕΤΦΑ *και τη δρομολόγηση λίστας έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(α) $\mathsf{Cong}(\phi) \leq \frac{4S_{\text{tot}}\ln(\overline{M}/\epsilon)}{\overline{M}} + s_{\max}$.

(β) Για κάθε σταθερά $c > 1$, με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - m^{-c}$, το $\mathsf{Cong}(\phi)$ *είναι κατά έναν παράγοντα $\mathcal{O}(\ln(\overline{M}/\epsilon))$ μεγαλύτερη από τον βέλτιστο μέγιστο φόρτο που μπορεί να επιτευχθεί αν τα λειτουργικά κανάλια είναι γνωστά εκ των προτέρων.*

Απόδειξη. Έστω κ ο βέλτιστος αριθμός υποσυνόλων που παράγεται από το στιγμιότυπο $(M, 1-\epsilon)$ για το πρόβλημα της Αξιόπιστης Διαμέρισης. Επειδή ισχύει ότι $\mathsf{Cong}(\phi) \leq S_{\text{tot}}$, αν $\frac{\overline{M}}{\ln(\overline{M}/\epsilon)} \leq 4$, τότε η ιδιότητα (α) είναι τετριμμένη. Επομένως, πρέπει να αποδείξουμε το (α) μόνο στην περίπτωση που $\frac{\overline{M}}{\ln(\overline{M}/\epsilon)} > 4$. Σε αυτή την περίπτωση το (α) συνάγεται από το $\kappa \geq \frac{\overline{M}}{2\ln(\overline{M}/\epsilon)}$, διότι $\mathsf{Cong}(\phi) \leq \frac{2S_{\text{tot}}}{\kappa} + s_{\max}$.

Θεωρούμε ένα στιγμιότυπο για το πρόβλημα της Κάλυψης Κουτιών (Bin Covering) που περιλαμβάνει αντικείμενα με μεγέθη $z_i = 1 - f_i$, $i = 1, \ldots, m$, και ελάχιστο όριο κάλυψης για κάθε κουτί $T = \ln(\overline{M}/\epsilon) > 0$. Έστω $\hat{y}$ ο βέλτιστος αριθμός κουτιών που μπορούν να καλυφθούν σε αυτό το στιγμιότυπο. Αφού ο μέσος αριθμός λειτουργικών καναλιών είναι $\overline{M} = \sum_{i=1}^{m} z_i$, από την ανάλυση του αλγορίθμου Επόμενου Ταιριάσματος [15] συνάγεται ότι $\frac{\overline{M}}{\ln(\overline{M}/\epsilon)} \geq \hat{y} \geq \frac{\overline{M}}{2\ln(\overline{M}/\epsilon)}$. Επιπλέον, κάθε αποδεκτή κάλυψη y κουτιών $M_1, \ldots, M_y$ για αυτό το στιγμιότυπο της Κάλυψης Κουτιών αντιστοιχεί σε μια αποδεκτή λύση για το στιγμιότυπο $(M, 1-\epsilon)$ της Αξιόπιστης Διαμέρισης, διότι

$$
\begin{aligned}
\Pr[M_1 \wedge \ldots \wedge M_y] &\geq \prod_{j=1}^{y}\left(1 - e^{-\sum_{i \in M_j}(1-f_i)}\right) \\
&\geq \left(1 - e^{-\ln(\overline{M}/\epsilon)}\right)^{\frac{\overline{M}}{\ln(\overline{M}/\epsilon)}} \\
&= \left(1 - \frac{\epsilon}{\overline{M}}\right)^{\frac{\overline{M}}{\ln(\overline{M}/\epsilon)}} \\
&\geq 1 - \frac{\epsilon}{\ln(\overline{M}/\epsilon)} \geq 1 - \epsilon
\end{aligned}
$$

Επομένως, ο βέλτιστος αριθμός των υποσυνόλων για το στιγμιότυπο $(M, 1-\epsilon)$ της Αξιόπιστης Διαμέρισης είναι $\kappa \geq \hat{y} \geq \frac{\overline{M}}{2\ln(\overline{M}/\epsilon)}$.

Όσον αφορά στο (β), από την εφαρμογή των φραγμάτων Chernoff (Chernoff bounds) (π.χ., βλ. [113]) συνάγεται ότι, για κάθε σταθερά $c > 1$, υπάρχει μια σταθερά γ_c, ώστε, με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - m^{-c}$, ο αριθμός των λειτουργικών καναλιών να είναι το πολύ $(1+\gamma_c)\overline{M}$. Συνεπώς, η συμφόρηση/μέγιστος φόρτος (makespan) που μπορεί να επιτευχθεί από μια βέλτιστη μη πλεονάζουσα ανάθεση, εφόσον τα λειτουργικά κανάλια είναι γνωστά εκ των προτέρων, δεν μπορεί να είναι λιγότερη από

$$\max\left\{\frac{S_{\mathrm{tot}}}{(1+\gamma_c)\overline{M}}, s_{\max}\right\} \geq \frac{1}{8(1+\gamma_c)\ln(\overline{M}/\epsilon)}\mathsf{Cong}(\phi)$$

□

5.4 Αξιόπιστες Αναθέσεις σε Διαφορετικές Χωρητικότητες

Στην περίπτωση των καναλιών με διαφορετικές χωρητικότητες εστιάζουμε στις αναθέσεις μηνυμάτων μοναδιαίου μεγέθους. Σε αυτή την ενότητα χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο Ασφαλούς Διαμέρισης για την προσέγγιση της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης σε ένα λογαριθμικό παράγοντα.

Θεώρημα 5.2. *Η πλεονάζουσα ανάθεση διαμέρισης ϕ που κατασκευάζεται σε πολυωνυμικό χρόνο, δρομολογώντας με βέλτιστο τρόπο n μηνύματα μοναδιαίου μεγέθους στα αξιόπιστα κανάλια που παράγονται από τον αλγόριθμο* Ασφαλούς Διαμέρισης, *επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης $2\left\lceil\frac{\ln(|M|/\epsilon)}{\ln(1/f_{\max})}\right\rceil$ για το πρόβλημα της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης σε κανάλια με διαφορετικές χωρητικότητες.*

Απόδειξη. Από την ανάλυση του αλγορίθμου ΑΔ συνάγεται ότι κάθε ανάθεση ϕ που κατασκευάζεται με αυτό τον τρόπο είναι $(1-\epsilon)$-αξιόπιστη.

Έστω $d \geq 0$ ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο $\prod_{i=1}^{d} f_i > \epsilon$ (βλ. ανάλυση του ΑΔ). Είναι φανερό ότι σε κάθε $(1-\epsilon)$-αξιόπιστη ανάθεση, κάθε μήνυμα πρέπει να έχει ένα τουλάχιστον αντίγραφο σε κάποιο κανάλι με δείκτη τουλάχιστον $d+1$. Έστω ϕ' μια βέλτιστη, μη πλεονάζουσα δρομολόγηση n μηνυμάτων μοναδιαίου μεγέθους στα κανάλια με χωρητικότητες $\{v_{d+1},\ldots,v_m\}$, και έστω $\mathsf{Makespan}(\phi') = B \geq \frac{n}{\mathsf{Cap}(d+1)}$. Προφανώς, το B αποτελεί ένα κάτω φράγμα στην Ελάχιστη Αξιόπιστη Συμφόρηση $\mathsf{Cong}^\star$.

Υπενθυμίζεται ότι ο αλγόριθμος ΑΔ επιστρέφει είτε μόνο το υποσύνολο $\{v_1,\ldots,v_{d+1}\}$, είτε μια διαμέριση $\mathcal{M}=\{M_1,\ldots,M_\lambda\}$, και ότι $m^\star = \left\lceil\frac{\ln(|M|/\epsilon)}{\ln(1/f_{\max})}\right\rceil$. Αρχικά εξετάζουμε το ενδεχόμενο να είναι $v_{d+1} \geq V(\mathcal{M})$, και ο αλγόριθμος ΑΔ να επιστρέφει ένα μοναδικό ενεργό κανάλι με χωρητικότητα v_{d+1}. Σε αυτή την περίπτωση το σύνολο των μηνυμάτων που ανατίθενται στα κανάλια $\{v_{d+1},\ldots,v_{m^\star-1}\}$ από τη ϕ' μπορούν να δημιουργήσουν φόρτο το πολύ $m^\star B$, αν ανατεθούν σε ένα κανάλι χωρητικότητας v_{d+1}. Έστω $b=\left\lceil\frac{|M|}{m^\star}\right\rceil$, και, για κάθε $j=0,\ldots,m^\star-1$, ορίζουμε το σύνολο $M^{(j)} = \{(f_i, v_i) \in M : i = ym^\star + j, y = 1, \ldots, b-1\}$. Επειδή $|\mathcal{M}| = \lambda \geq b-1$, από την ανάλυση του ΑΔ συνάγεται ότι, για όλα τα $j = 0, \ldots, m^\star - 1$, ισχύει ότι $v_{d+1} \geq V(\mathcal{M}) \geq \sum_{i \in M^{(0)}} v_i \geq \sum_{i \in M^{(j)}} v_i$. Επομένως, αφού υπάρχουν ακριβώς $m^\star$ διαφορετικά σύνολα $M^{(j)}$, και

$$\bigcup_{j=0}^{m^\star-1} M^{(j)} = \{v_{m^\star}, \ldots, v_m\} \ ,$$

το σύνολο των μηνυμάτων που ανατίθενται στα κανάλια $\{v_{m^\star}, \ldots, v_m\}$ από τη ϕ' μπορούν να δημιουργήσουν φόρτο το πολύ $m^\star B$, αν ανατεθούν σε ένα κανάλι χωρητικότητας v_{d+1}. Επομένως, αν $v_{d+1} \geq V(\mathcal{M})$, είναι $\mathsf{Cong}(\phi) \leq 2m^\star B$.

Στη συνέχεια εξετάζουμε το ενδεχόμενο να είναι $V(\mathcal{M}) > v_{d+1}$, και ο ΑΔ να επιστρέφει τη διαμέριση $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_\lambda\}$, όπου κάθε M_l έχει ενεργό χωρητικότητα $V(M_l) = \min_{i \in M_l}\{v_i\}$. Από την ανάλυση του ΑΔ συνάγεται ότι, για κάθε $l = 1, \ldots, \lambda$, είναι $m^\star V(M_l) \geq \sum_{i \in M_{l+1}} v_i$, όπου $M_{\lambda+1} = M - \bigcup_{l=1}^{\lambda} M_l$. Συνεπώς, το σύνολο των μηνυμάτων που ανατίθενται στα κανάλια του υποσυνόλου M_{l+1} από τη ϕ' μπορούν να δημιουργήσουν φόρτο το πολύ $m^\star B$, αν ανατεθούν σε ένα κανάλι χωρητικότητας $V(M_l)$. Επιπλέον, επειδή θεωρούμε μόνο μηνύματα μοναδιαίου μεγέθους, για κάθε $i = d+1, \ldots, m_1$, $m_1 = |M_1| \leq m^\star$, τα μηνύματα που ανατίθενται στο κανάλι v_i από τη ϕ' μπορούν να ανατεθούν στο σύνολο καναλιών $\mathcal{M}$ με συνολική χωρητικότητα $V(\mathcal{M}) > v_i$, χωρίς να προκαλέσουν φόρτο μεγαλύτερο από B. Επομένως, σε κάθε περίπτωση η πλεονάζουσα ανάθεση ϕ έχει $\mathsf{Cong}(\phi) \leq 2m^\star B$. □

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.2, ο περιορισμός του μοναδιαίου μεγέθους για τα μηνύματα χρησιμοποιείται μόνο για το άνω φράγμα στο φόρτο που προκαλείται, όταν τα μηνύματα που δρομολογούνται στα κανάλια $\{v_{d+1}, \ldots, v_{m_1}\}$ από τη ϕ', ανατίθενται στα ενεργά κανάλια $\{M_1, \ldots, M_\lambda\}$. Επειδή αυτό το άνω φράγμα συνάγεται από τη σχέση $\sum_{l=1}^{\lambda} V(M_l) > v_i$, $i = d+1, \ldots, m_1$, αν και μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον περιορισμό για μοναδιαίο μέγεθος μηνυμάτων με ένα πιο γενικό περιορισμό στη σχέση του μεγέθους των μηνυμάτων με τις χωρητικότητες, δεν έχουμε υπόψη μας πώς να αποφύγουμε τελείως κάποιον τέτοιου είδους περιορισμό.

Πρέπει να σημειωθεί επίσης ότι οι διαμερίσεις που παράγονται από τον αλγόριθμο ΔΚΧ αναμένεται να έχουν στην πράξη μεγαλύτερη συνολική ενεργό χωρητικότητα από τις αντίστοιχες διαμερίσεις του ΑΔ. Όμως δεν μπορούμε να αναλύσουμε το λόγο προσέγγισης που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τον ΑΔ με τον ΔΚΧ, γιατί δεν μπορούμε να τεκμηριώσουμε κάποια σχέση της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης είτε με την ενεργό χωρητικότητα μιας βέλτιστης διαμέρισης $V(\mathcal{M}^\star)$, είτε με το άνω φράγμα που χρησιμοποιείται στην ανάλυση του ΔΚΧ, δηλαδή με τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $\sum_{j=0}^{\psi} 2^j\ \mathsf{ΙΠΦ}\Big(I_j, (1-\epsilon)^{\beta_j^\star}\Big)$, όπου $\sum_{j=0}^{\psi} \beta_j^\star \leq 1$.

5.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετήσαμε την προσεγγισιμότητα της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης. Συγκεκριμένα, για την περίπτωση καναλιών με ίδιες χωρητικότητες, παρουσιάσαμε έναν 4-προσεγγιστικό αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου, και για την περίπτωση των καναλιών με διαφορετικές χωρητικότητες και μηνύματα μοναδιαίου μεγέθους παρουσιάσαμε έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου που επιτυγχάνει λογαριθμικό λόγο προσέγγισης. Η ανάλυση του πρώτου αλγορίθμου βασίζεται σε ένα τεχνικό λήμμα ιδιαίτερου ενδιαφέροντος, το οποίο φράσσει άνω την αξιοπιστία κάθε πλεονάζουσας ανάθεσης, και υποδεικνύει ότι, για συγκεκριμένες παραμέτρους, οι αναθέσεις διαμέρισης είναι οι πλέον αξιόπιστες. Το λήμμα αυτό φράσσει επίσης την πιθανότητα ένα όχι απαραίτητα συνεκτικό υπεργράφημα να μην εμφανίσει απομονωμένους κόμβους, όταν οι ακμές του διαγράφονται με τυχαίο και ανεξάρτητο τρόπο.

Το πλέον σημαντικό ανοικτό ζήτημα είναι ο χαρακτηρισμός της πολυπλοκότητας της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης. Το γεγονός ότι ο ακριβής υπολογισμός της αξιοπιστίας μιας ανάθεσης είναι $\#\mathcal{P}$-πλήρες πρόβλημα αποτελεί ένδειξη ότι η Ελάχιστη Αξιόπιστη Συμφόρηση δεν ανήκει στην κλάση $\mathcal{NP}$, τουλάχιστον για κανάλια με διαφορετικές χωρητικότητες. Είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον ερώτημα αν το πρόβλημα της Ελάχιστης Αξιόπιστης Συμφόρησης, ειδικότερα στην περίπτωση των καναλιών με διαφορετικές χωρητικότητες, είναι πλήρες για την κλάση $\mathcal{NP}^{\#\mathcal{P}[1,\mathrm{comp}]}$, η οποία περιέχει ολόκληρη την Πολυωνυμική Ιεραρχία $\mathcal{PH}$.

Μια άλλη ερευνητική κατεύθυνση είναι η απόδειξη ενός μη τετριμμένου κάτω φράγματος για την Ελάχιστη Αξιόπιστη Συμφόρηση καναλιών διαφορετικών χωρητικοτήτων. Ένα τέτοιο κάτω φράγμα θα πρέπει να βασίζεται σε μια γενίκευση του Λήμματος 5.2, και ενδεχομένως να συνδυάζεται με τον αλγόριθμο ΔΚΧ για το σχεδιασμό ενός αλγορίθμου σταθερού λόγου προσέγγισης για την Ελάχιστη Αξιόπιστη Συμφόρηση καναλιών διαφορετικών χωρητικοτήτων.

Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε σαν ευρύτερη ερευνητική κατεύθυνση τη μελέτη άλλων θεμελιωδών προβλημάτων βελτιστοποίησης με περιορισμούς ανοχής σε τυχαία και ανεξάρτητα σφάλματα. Για παράδειγμα, το Ελάχιστο Αξιόπιστα Συνεκτικό Υπογράφημα (Minimum Reliable Subgraph) αποτελεί ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς αξιοπιστίας. Σε αυτό το πρόβλημα, δεδομένου ενός γραφήματος $G(V,E)$ του οποίου κάθε ακμή e διαγράφεται ανεξάρτητα και με πιθανότητα f_e, και ενός περιορισμού αξιοπιστίας $(1-\epsilon)$, ζητείται το γενετικό υπογράφημα $G'(V,E')$, $E' \subseteq E$, με τον ελάχιστο αριθμό ακμών, που παραμένει συνεκτικό με πιθανότητα τουλάχιστον $(1-\epsilon)$.

Κεφάλαιο 6

Επαναχρησιμοποίηση Τυχαίων Δυαδικών Ψηφίων

Η τυχαιότητα παίζει έναν ζωτικό ρόλο σχεδόν σε όλες τις περιοχές της Επιστήμης των Υπολογιστών. Οι πιθανοτικοί αλγόριθμοι (randomized algorithms) είναι συνήθως απλούστεροι στο σχεδιασμό, την ανάλυση και την υλοποίηση, και γρηγορότεροι στην εκτέλεση από τους αντίστοιχους ντετερμινιστικούς για το ίδιο πρόβλημα. Για μερικά προβλήματα, οι πιθανοτικοί αλγόριθμοι είναι οι μόνοι γνωστοί αλγόριθμοι (π.χ. έλεγχος πρώτων αριθμών, αλγόριθμοι προσέγγισης για $\#P$-πλήρη προβλήματα), ενώ για άλλα, οι πιθανοτικοί αλγόριθμοι είναι οι μόνοι που μπορούν να παραλληλοποιηθούν με αποδοτικό τρόπο (βλ. [113]).

Όπως παρατηρείται στην [87], στην πράξη το κόστος πρόσβασης σε πραγματικά τυχαία δυαδικά ψηφία (truly random bits) είναι ιδιαίτερα σημαντικό. Για αυτό το λόγο, γίνεται χρήση γεννητριών ψευδο-τυχαίων δυαδικών ψηφίων (pseudo-random bit generators), οι οποίες είναι ντετερμινιστικές διαδικασίες που επεκτείνουν μια πραγματικά τυχαία ακολουθία (seed) σε μια πολύ μεγαλύτερη ακολουθία. Τέτοιου είδους γεννήτριες χρησιμοποιούνται στην πράξη με την προσδοκία ότι η ακολουθία που παράγεται έχει παρόμοια αποτελέσματα με μια πραγματικά τυχαία ακολουθία.

Εκτός από τις πρακτικές εφαρμογές, το ζήτημα της οικονομίας στη χρήση πραγματικά τυχαίων δυαδικών ψηφίων αποτελεί το αντικείμενο σημαντικής ερευνητικής δραστηριότητας στην περιοχή της θεωρίας υπολογιστικής πολυπλοκότητας. Σε αυτή την περίπτωση το κυρίαρχο ζήτημα είναι κατά πόσο οι πιθανοτικοί αλγόριθμοι, των οποίων η εκτέλεση εξαρτάται από την έξοδο μιας γεννήτριας τυχαίων ψηφίων, είναι ισχυρότεροι (δηλαδή μπορούν να αναγνωρίσουν περισσότερες γλώσσες) από τους ντετερμινιστικούς αλγορίθμους που ανήκουν στην ίδια κατηγορία πολυπλοκότητας χρόνου εκτέλεσης.

Τόσο η πρακτική όσο και η θεωρητική μελέτη του θέματος στοχεύουν στο σχεδιασμό και την ανάλυση μεθόδων για τη μείωση του αριθμού των πραγματικά τυχαίων δυαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούνται από πιθανοτικούς αλγορίθμους. Ένας κεντρικός στόχος είναι η εξάλειψη της ανάγκης χρήσης πραγματικά τυχαίων δυαδικών ψηφίων (εξάλειψη τυχαιότητας – derandomization) για όλους τους αλγορίθμους που ανήκουν σε συγκεκριμένες κλάσεις πολυπλοκότητας. Για παράδειγμα, όσον αφορά στους πιθανοτικούς αλγορίθμους πολυωνυμικού χρόνου, αυτό υπονοεί την ύπαρξη μιας ντετερμινιστικής διαδικασίας, που επίσης θα εκτελείται σε πολυωνυμικό χρόνο, και θα προσομοιώνει πιστά τη λειτουργία του πιθανοτικού αλγορίθμου.

Μια κεντρική ιδέα σε αυτή την ερευνητική κατεύθυνση είναι η επαναχρησιμοποίηση τυχαίων δυαδικών ψηφίων (random bit recycling). Η επαναχρησιμοποίηση αναφέρεται στη χρήση μικρών πραγματικά τυχαίων ακολουθιών για την παραγωγή μεγάλων ακολουθιών δυαδικών ψηφίων, που είναι μεν τυχαία ως προς την κατανομή, αλλά δεν είναι τελείως ανεξάρτητα μεταξύ τους. Όλες οι γεννήτριες ψευδο-τυχαίων δυαδικών ψηφίων βασίζονται στην ιδέα της επαναχρησιμοποίησης.

Μια γεννήτρια ψευδο-τυχαίων δυαδικών ψηφίων πρέπει να παράγει όσο το δυνατόν μεγαλύτερες ακολουθίες που θα εκλαμβάνονται σαν πραγματικά τυχαίες από οποιονδήποτε πιθανοτικό αλγόριθμο με συγκεκριμένη υπολογιστική ισχύ (π.χ. πολυωνυμικού χρόνου). Δηλαδή, μια τέτοια γεννήτρια πρέπει να κάνει τον πιθανοτικό αλγόριθμο να συμπεριφέρεται όπως θα συμπεριφερόταν αν η ακολουθία ήταν πραγματικά τυχαία. Αυτό σημαίνει ότι η γεννήτρια λειτουργεί με τρόπο που δεν επιτρέπει στον πιθανοτικό αλγόριθμο να διαγνώσει την εξάρτηση της ψευδο-τυχαίας ακολουθίας. Βέβαια αυτό σχετίζεται άμεσα με τους πόρους που ο αλγόριθμος έχει στη διάθεση του, αφού αν ο τελευταίος έχει μεγάλη υπολογιστική ισχύ, τότε είναι δύσκολο (ίσως αδύνατο) να μην "αντιληφθεί" την εξάρτηση των ψευδο-τυχαίων ψηφίων.

Αυτή τη διάσταση επισήμαναν για πρώτη φορά οι Yao [130], και Blum και Micali [26], που εισήγαγαν την ιδέα της κατασκευής μιας γεννήτριας ψευδο-τυχαίων δυαδικών ψηφίων από κρυπτογραφικά ασφαλείς μονόδρομες μεταθέσεις (cryptographically secure one-way permutations). Από τότε έχουν προταθεί πολλές μέθοδοι για την εξάλειψη της τυχαιότητας που βασίζονται σε υποθέσεις για τη δυσκολία συγκεκριμένων προβλημάτων ("hardness" assumptions). Ο Impagliazzo στην [85] δίνει μια εξαιρετική επισκόπηση αυτής της ερευνητικής κατεύθυνσης. Ένα από τα βασικά εργαλεία που χρησιμοποιείται σε αυτή την κατεύθυνση είναι τα σύνολα επιτυχίας (hitting sets).

Εκτός από το σχεδιασμό γενικών τεχνικών, μια άλλη προσέγγιση στην εξάλειψη της τυχαιότητας είναι ο προσδιορισμός συγκεκριμένων ιδιοτήτων πιθανοτικών συστημάτων, για τα οποία μπορούν να εφαρμοστούν συγκεκριμένες τεχνικές. Αυτή η ερευνητική κατεύθυνση ακολουθήθηκε στην [20], όπου μελετήθηκαν ζητήματα σχετικά με τη μείωση του αριθμού των τυχαίων δυαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούνται στα παιχνίδια Arthur-Merlin. Επίσης, στην [46] αποδεικνύεται ότι υπάρχουν φυσιολογικά συστήματα Αλληλεπιδραστικών Αποδείξεων (Interactive Proof systems) για τα οποία η επαναληπτική κλήση με πραγματικά τυχαίες ακολουθίες μπορεί να κάνει την πιθανότητα λάθους πολυωνυμικά μικρή, ενώ η επαναληπτική κλήση με ψευδοτυχαίες ακολουθίες δεν μπορεί να κάνει την πιθανότητα λάθος μικρότερη από μια συγκεκριμένη σταθερά.

Σε αυτό το κεφάλαιο αποδεικνύουμε ότι οι τυχαίοι περίπατοι σε γραφήματα-επεκτατές (expander graphs) αποφεύγουν συγκεκριμένα υποσύνολα από ακολουθίες που οδηγούν τον πιθανοτικό αλγόριθμο σε λάθος απόφαση, χρησιμοποιώντας λιγότερα τυχαία δυαδικά ψηφία. Στη συνέχεια, καταλήγουμε σε ένα σύνολο από γενικές επαρκείς συνθήκες για την μείωση του αριθμού των πραγματικά τυχαίων δυαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούνται από πιθανοτικούς αλγορίθμους απλής κατεύθυνσης λάθους (one-side error randomized algorithms) [53]. Η βασική ιδέα των τεχνικών αυτών παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στην [52], όπου χρησιμοποιήθηκε για να δείξουμε ότι, υπό συγκεκριμένες υποθέσεις, αν $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{PCP}(\mathrm{poly}(\mathrm{loglog}\, n), \mathrm{poly}(\mathrm{loglog}\, n))$, τότε η κλάση $\mathcal{NP}$ περιέχεται στην κλάση $\mathcal{DTIME}\big(n^{\mathrm{poly}(\mathrm{loglog}\, n)}\big)$. Σε αυτό το κεφάλαιο, με απλούστερες τεχνικές, αποδεικνύουμε ότι, αν $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{PCP}(\mathrm{o}(\log n), \mathrm{o}(\log n))$, τότε $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. Επίσης εφαρμόζουμε αυτές τις τεχνικές σε $\mathcal{PCP}$ συστήματα για την κλάση $\mathcal{NP}$ αποδεικνύοντας μια μη τετριμμένη σχέση της πολυπλοκότητας ντετερμινιστικού χρόνου ολόκληρης της κλάσης $\mathcal{NP}$ με τις παραμέτρους αποτελεσματικότητας αυτών των τεχνικών.

6.1 Εισαγωγή

Το μεγαλύτερο μέρος των τεχνικών που θα περιγραφούν σε αυτό το κεφάλαιο βασίζεται στην ανάλυση της πιθανότητας που έχει ένας τυχαίος περίπατος σε ένα γράφημα-επεκτατή να αποφύγει ένα συγκεκριμένο υποσύνολο κορυφών (hitting properties of random walks on expander graphs). Αυτή η ιδέα χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά στην [1]. Από τότε η τεχνική των τυχαίων περιπάτων σε γραφήματα-επεκτατές χρησιμοποιήθηκε εκτενώς για τη μείωση της πιθανότητας λάθους πιθανοτικών αλγορίθμων [31, 87, 113], και συστημάτων αλληλεπιδραστικών αποδείξεων [20], χωρίς μεγάλη αύξηση της πολυπλοκότητας τυχαίων δυαδικών ψηφίων (random bit complexity). Πιο πρόσφατα [52], υιοθετήθηκε η αναδρομική εφαρμογή αυτής της τεχνικής για τη μείωση της τυχαιότητας υποθετικών πιθανοτικών συστημάτων που πληρούν συγκεκριμένες ιδιότητες.

Οι ιδιότητες των τυχαίων περιπάτων σε γραφήματα-επεκτατές μοιάζουν με τις ιδιότητες των συνόλων επιτυχίας (hitting sets), τα οποία αποτελούν μία από τις βασικές συνδυαστικές δομές που έχουν χρησιμοποιηθεί για εξάλειψη της τυχαιότητας (π.χ. [108, 4]). Δεδομένου ενός συνόλου/σύμπαντος S και ενός υποσυνόλου σωστών απαντήσεων $S' \subseteq S$, ένα σύνολο H καλείται σύνολο επιτυχίας για το S' (H is hitting for S') αν $S' \cap H \neq \emptyset$. Διαφορετικά, το H είναι σύνολο επιτυχίας για το S', αν τουλάχιστον ένα στοιχείο του H αποφεύγει το συμπλήρωμα του S', $\overline{S'} = S - S'$. Η ομοιότητα με τους πιθανοτικούς αλγορίθμους απλής κατεύθυνσης λάθους είναι φανερή. Το H είναι σύνολο επιτυχίας για έναν πιθανοτικό αλγόριθμο απλής κατεύθυνσης λάθους A, αν το H περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο που οδηγεί τον A σε σωστό συμπέρασμα. Επομένως κάθε Γεννήτρια Συνόλων Επιτυχίας (ΓΣΕ – Hitting Set Generator, HSG) πολυωνυμικού χρόνου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για εξάλειψη της τυχαιότητας της κλάσης των πιθανοτικών αλγορίθμων πολυωνυμικού χρόνου με απλή κατεύθυνση λάθους ($\mathcal{RP}$). Πρόσφατα, αποδείχθηκε ότι τα σύνολα επιτυχίας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για εξάλειψη της τυχαιότητας της κλάσης των πιθανοτικών αλγορίθμων πολυωνυμικού χρόνου με διπλή κατεύθυνση λάθους ($\mathcal{BPP}$) [3].

Η ύπαρξη Γεννητριών Συνόλων Επιτυχίας για την εξάλειψη τυχαιότητας στις κλάσεις $\mathcal{RP}$ και $\mathcal{BPP}$ αποτελεί ένα από τα μεγαλύτερα ανοικτά ζητήματα της θεωρίας υπολογιστικής πολυπλοκότητας. Μια επιτυχία σε αυτόν τον τομέα είναι η ντετερμινιστική κατασκευή ενός συνόλου επιτυχίας για συνδυαστικά ορθογώνια (combinatorial rectangles) διάστασης d [108]. Για θετικούς ακέραιους d και m, ένα συνδυαστικό ορθογώνιο R για ένα σύνολο $S = [m]^d$ ορίζεται σαν $R = R_1 \times \cdots \times R_d$, όπου, για κάθε $i \in [d]$, $R_i \subseteq [m]$. Ο όγκος (volume) του R είναι $m^{-d} \prod_{i \in [d]} |R_i|$.

Μια άλλη συνδυαστική κατασκευή που χρησιμοποιείται για την μείωση της τυχαιότητας στην κλάση $\mathcal{RP}$ είναι τα γραφήματα-διασκορπιστές (disperser graphs). Στην [120], παρουσιάζεται μια αναλυτική κατασκευή γραφημάτων-διασκορπιστών, τα οποία χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση πολυωνυμικού χρόνου οποιουδήποτε αλγορίθμου της κλάσης $\mathcal{RP}$. Η προσομοίωση βασίζεται την έξοδο μιας ασθενούς πηγής τυχαιότητας (weak random source) ελάχιστης εντροπίας (min-entropy) r^γ. Μια ασθενής πηγή τυχαιότητας έχει ελάχιστη εντροπία r^γ, αν, όταν παράγει ακολουθίες δυαδικών ψηφίων μήκους r, καμιά συγκεκριμένη ακολουθία δεν έχει πιθανότητα να παραχθεί μεγαλύτερη από 2^{r^γ} [29]. Τα γραφήματα-διασκορπιστές μπορούν να θεωρηθούν σαν το ανάλογο των συνόλων επιτυχίας, όταν, αντί για πλήρη εξάλειψη της τυχαιότητας, επιδιώκεται η χρήση ασθενών πηγών τυχαιότητας για την προσομοίωση πιθανοτικών αλγορίθμων. Στην [4] παρουσιάζεται μία προσομοίωση πολυωνυμικού χρόνου οποιουδήποτε αλγορίθμου της κλάσης $\mathcal{BPP}$ από μία ασθενή πηγή τυχαιότητας ελάχιστης εντροπίας 2^{r^γ}. Η προσομοίωση βασίζεται στις ιδιότητες των συνόλων επιτυχίας που χρησιμοποιούνται για την εξάλειψη της τυχαιότητας στην κλάση $\mathcal{BPP}$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι από κανένα από τα παραπάνω αποτελέσματα δεν συνάγεται η δυνατότητα εξάλειψης της τυχαιότητας για κάποια από τις κλάσεις $\mathcal{RP}$ ή $\mathcal{BPP}$. Στην πραγματικότητα, τόσο αυτά όσο και πολλά άλλα παρόμοια αποτελέσματα (π.χ. βλ. [85]) βασίζονται σε αναπόδεικτες υποθέσεις που αφορούν στη δυσκολία συγκεκριμένων προβλημάτων ή κλάσεων προβλημάτων (π.χ. υπάρχει συνάρτηση $f \in \mathcal{EXP}$ με πολυπλοκότητα λογικού κυκλώματος (circuit complexity) $2^{\Omega(n)}$ [86]). Επομένως, όλα τα σχετικά αποτελέσματα πρέπει να ειδωθούν σαν μαρτυρίες υπέρ (ή κάποιες φορές εναντίον) της εικασίας $\mathcal{P} = \mathcal{BPP}$, και σαν διεξοδική μαθηματική μελέτη της σύνδεσης της δυσκολίας κάποιων προβλημάτων με την ανάγκη χρήσης τυχαιότητας ("hardness" vs. "randomness") [130, 26]. Προς το παρόν, η βασική ερευνητική κατεύθυνση παραμένει η εξιχνίαση αυτής της σχέσης με την καταγραφή και τη σε βάθος μελέτη υποθέσεων δυσκολίας που μπορούν να μειώσουν ή και να εξαλείψουν την τυχαιότητα. Σαν αποτελέσματα παράγονται νέες επαρκείς συνθήκες για τη μείωση ή και την εξάλειψη της τυχαιότητας, η σημασία των οποίων εξαρτάται από το βαθμό που η ερευνητική κοινότητα πιστεύει σε αυτές.

Το κεφάλαιο που ακολουθεί εντάσσεται σε αυτό το ερευνητικό πλαίσιο έχοντας σαν στόχο τη διατύπωση νέων τεχνικών και επαρκών συνθηκών για τη μείωση της τυχαιότητας σε πιθανοτικά συστήματα απλής κατεύθυνσης λάθους. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε τυχαίους περιπάτους σε γραφήματα-επεκτατές μικρού σχετικά μεγέθους (υπο-εκθετικού στην πολυπλοκότητα τυχαίων δυαδικών ψηφίων), ώστε ταυτόχρονα να μειωθεί η πολυπλοκότητα τυχαίων δυαδικών ψηφίων του αλγορίθμου και να αποφευχθούν συγκεκριμένα υποσύνολα από "παραπλανητικές" συμβολοσειρές (misleading strings).

Αυτό οδηγεί στην ιδέα των συνόλων επιτυχίας υπό συνθήκη (conditional hitting sets). Συγκεκριμένα, δεδομένου ενός συνόλου C που πρέπει να αποφευχθεί, ενός υποσυνόλου $C_1 \subseteq C$, και ενός $s \notin C_1$, προτείνουμε την εκμετάλλευση του s για τη δημιουργία ενός συνόλου που αποφεύγει το C, δηλαδή ενός συνόλου επιτυχίας για το $\overline{C}$. Ένα τέτοιο σύνολο καλείται *σύνολο επιτυχίας υπό συνθήκη*, διότι βασίζεται στην υπόθεση ότι $s \notin C_1$. Αποδεικνύουμε ότι η τεχνική των τυχαίων περιπάτων σε γραφήματα-επεκτατές με υπο-εκθετικό μέγεθος μπορεί να συνδυαστεί με ένα σύνολο επιτυχίας υπό συνθήκη για τη μείωση της πολυπλοκότητας τυχαίων δυαδικών ψηφίων κάθε πιθανοτικού αλγορίθμου απλής κατεύθυνσης λάθους.

Αυτές οι τεχνικές εφαρμόστηκαν για πρώτη φορά στην [52], όπου αποδεικνύεται, υπό συγκεκριμένες υποθέσεις, ότι αν $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{PCP}(\mathrm{poly}(\log\log n), \mathrm{poly}(\log\log n))$, τότε η κλάση $\mathcal{NP}$ περιέχεται στην κλάση $\mathcal{DTIME}(n^{\mathrm{poly}(\log\log n)})$. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε μια διαφορετική, απλούστερη απόδειξη του γενικότερου αποτελέσματος ότι, αν $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{PCP}(\mathrm{o}(\log n), \mathrm{o}(\log n))$, τότε $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. Επίσης, εφαρμόζουμε τις παραπάνω τεχνικές για μείωση τυχαιότητας σε $\mathcal{PCP}$ συστήματα για την κλάση $\mathcal{NP}$ αποδεικνύοντας ότι, αν αυτές οι τεχνικές μπορούν να μειώσουν σημαντικά την τυχαιότητα σε οποιοδήποτε πιθανοτικό σύστημα απλής κατεύθυνσης λάθους, τότε το $\mathcal{NP}$ έχει μια ντετερμινιστική προσομοίωση υπο-εκθετικού χρόνου (subexponential deterministic simulation).

6.1.1 Ορισμοί

Εκτός από την είσοδο x, ένας πιθανοτικός αλγόριθμος A εκτελεί μια σειρά από τυχαίες επιλογές, το σύνολο των οποίων μπορεί να ομαδοποιηθεί σε μια τυχαία συμβολοσειρά (random string) r. Η έξοδος του αλγορίθμου εξαρτάται αποκλειστικά από την είσοδο x και την τυχαία συμβολοσειρά r. Συνεπώς, το $A(x, r)$ συμβολίζει το αποτέλεσμα του αλγορίθμου A με είσοδο x, όπου η συμβολοσειρά r καθορίζει την έκβαση των τυχαίων επιλογών του A. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, σε αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε μόνο αλγορίθμους που παράγουν Boolean αποτελέσματα, δηλαδή ο υπολογισμός που εκτελούν πάντα καταλήγει σε μία από ένα ζεύγος διακριτών καταστάσεων. Ένας πιθανοτικός αλγόριθμος A για μία γλώσσα L καλείται απλής κατεύθυνσης λάθους, όταν ο A μπορεί να κάνει λάθος με πιθανότητα το πολύ $\frac{1}{4}$, σε ακριβώς μία από τις κατευθύνσεις της αποδοχής ενός $x \in L$, ή της απόρριψης ενός $x \notin L$. Σε αυτό το κεφάλαιο, οι πιθανότητες υπολογίζονται ως προς την ομοιόμορφη κατανομή όλων των συμβολοσειρών δυαδικών ψηφίων με μήκος $|r|$.

Μια γλώσσα $L \subseteq \Sigma^\star$ ανήκει στην κλάση πολυπλοκότητας $\mathcal{RP}$, αν υπάρχει πιθανοτικός αλγόριθμος A με πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης, ο οποίος, για κάθε είσοδο $x \in \Sigma^\star$, απορρίπτει όλα τα $x \notin L$ με πιθανότητα 1, ενώ μπορεί να απορρίψει κάποιο $x \in L$ με πιθανότητα το πολύ $\frac{1}{4}$. Ομοίως, η κλάση πολυπλοκότητας co-$\mathcal{RP}$ αποτελείται από τις γλώσσες για τις οποίες υπάρχει πιθανοτικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου, ο οποίος μπορεί να κάνει λάθος με πιθανότητα το πολύ $\frac{1}{4}$ μόνο αν $x \notin L$. Η επιλογή του φράγματος $\frac{1}{4}$ για την πιθανότητα λάθους είναι αυθαίρετη, διότι η πιθανότητα λάθους ενός $\mathcal{RP}$ αλγορίθμου A μπορεί να γίνει μια οσοδήποτε μικρή σταθερά με την επανάληψη του A για ικανό σταθερό αριθμό φορών.

Αν και οι κλάσεις πολυπλοκότητας $\mathcal{RP}$ και co-$\mathcal{RP}$ ορίζονται με βάση προβλήματα απόφασης (δηλ. αναγνώριση γλωσσών), θα χρησιμοποιούμε τα ίδια ονόματα για τις αντίστοιχες κλάσεις αλγορίθμων. Συγκεκριμένα ένας $\mathcal{RP}$ αλγόριθμος A ανήκει στην κλάση $\mathcal{RP}_\delta(r(n))$, αν, για κάθε είσοδο x μήκους n, ο A χρησιμοποιεί το πολύ $\hat{r}(n) = \mathcal{O}(r(n))$ τυχαία δυαδικά ψηφία, και επιτυγχάνει πιθανότητα λάθους το πολύ δ, δηλαδή αν $x \in L$, $\text{Prob}[A(x) = \text{ΑΠΟΡΡΙΨΗ}] \leq \delta$.

Για κάθε πιθανοτικό αλγόριθμο απλής κατεύθυνσης λάθους A που χρησιμοποιεί $\hat{r}(n)$ τυχαία δυαδικά ψηφία, έστω S το σύνολο όλων των δυαδικών συμβολοσειρών (binary strings) μήκους $\hat{r}(n)$, και, για κάθε ακέραιο $\alpha \geq 1$, έστω S^α το σύνολο όλων των δυαδικών συμβολοσειρών με μήκος $\left\lceil \frac{\hat{r}(n)}{\alpha} \right\rceil$. Ο πληθικός αριθμός του S μερικές φορές συμβολίζεται με $N = 2^{\hat{r}(n)}$. Ένα σύνολο S' καλείται *συμπλήρωμα ενός συνδυαστικού ορθογωνίου* (complement of a combinatorial rectangle), αν, για κάποιον ακέραιο $\alpha > 1$ και σταθερά $\epsilon > 0$, υπάρχει ένα συνδυαστικό ορθογώνιο R, $R \subseteq S = \left[\left\lceil \frac{\hat{r}(n)}{\alpha} \right\rceil\right]^\alpha$, με διάσταση α και όγκο ϵ, ώστε για κάποιο $S'' \subseteq R$, $S' = \overline{S''} = S - S''$. Επομένως, ένα σύνολο S' είναι το συμπλήρωμα ενός συνδυαστικού ορθογωνίου, αν κάθε σύνολο H που αποφεύγει το R (δηλαδή $H \nsubseteq R$) πετυχαίνει (hits) το S' (δηλαδή $H \cap S' \neq \emptyset$).

Έστω $0 < \epsilon \leq \frac{1}{4}$ η πιθανότητα λάθους ενός αλγορίθμου A. Για κάθε είσοδο x, υπάρχει ένα σύνολο συμβολοσειρών $C \subseteq S$, $|C| \leq \epsilon|S|$, οι οποίες όταν προσδιορίσουν τις τυχαίες επιλογές του A, η κλήση $A(x)$ δίνει λάθος αποτέλεσμα, δηλαδή ΑΠΟΡΡΙΨΗ αντί για ΑΠΟΔΟΧΗστην περίπτωση που ο $A \in \mathcal{RP}$. Για τέτοιου είδους σύνολα C, συχνά θα χρησιμοποιούμε τον όρο *"παραπλανητικές" συμβολοσειρές* για τον αλγόριθμο A με είσοδο x. Μπορούμε να ορίσουμε μια οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{C} = \{C \subseteq S : C \text{ σύνολο "παραπλανητικών" συμβολοσειρών για το } A(x), x \in \Sigma^\star\}$$

Προφανώς, η οικογένεια συνόλων $\mathcal{C}$ εξαρτάται από τον αλγόριθμο A, και δεν είναι κατ' ανάγκη ίση με την οικογένεια όλων των διαφορετικών υποσυνόλων του S με πληθικό αριθμό το πολύ $\epsilon|S|$.

Στο πρώτο μέρος αυτού του κεφαλαίου, εστιάζουμε στις κλάσεις των $\mathcal{RP}$ και co-$\mathcal{RP}$ αλγορίθμων, εξ' αιτίας της σπουδαιότητας αυτών των κλάσεων στον πιθανοτικό υπολογισμό. Μολαταύτα, τα αποτελέσματα που αποδεικνύουμε μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε πιθανοτικό αλγόριθμο απλής κατεύθυνσης λάθους, ανεξάρτητα από το χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης.

Ιδιότητες Τυχαίων Περιπάτων σε Γραφήματα-Επεκτατές

Στην [1] αποδεικνύεται το ακόλουθο λήμμα, το οποίο υποδεικνύει τη χρήση τυχαίων περιπάτων σε γραφήματα-επεκτατές για τη δημιουργία μεγάλων ψευδο-τυχαίων ακολουθιών.

Λήμμα 6.1 [1]. *Έστω $G(V,E)$ ένα κανονικό γράφημα με βαθμό d με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν D είναι ο πίνακας γειτονικότητας του G πολλαπλασιασμένος με $1/d$, τότε όλες, εκτός από τη μεγαλύτερη, οι ιδιοτιμές του D είναι μικρότερες από 1 και θετικές.*
Τότε, για κάθε υποσύνολο $C \subseteq V$ με $|C| \leq |V|/16$, υπάρχει μια σταθερά c, ώστε η πιθανότητα ένας τυχαίος περίπατος στο G μήκους $\kappa \cdot c$ να βρίσκεται σε κάθε c-οστό βήμα σε κορυφή του C να είναι το πολύ $2^{-\kappa}$.

Είναι εύκολη η κατασκευή ενός γραφήματος G που να ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος 6.1 από ένα γράφημα-επεκτατή σταθερού βαθμού (constant degree expanders). Μια αναλυτική κατασκευή γραφημάτων-επεκτατών παρουσιάστηκε από τους Gabber και Galil [60]. Τα λεγόμενα γραφήματα-επεκτατές των Gabber-Galil έχουν το πλεονέκτημα να μην απαιτούν την εκτενή κατασκευή ολόκληρου του γραφήματος. Συγκεκριμένα, για κάθε κορυφή του γραφήματος, είναι δυνατός ο υπολογισμός των γειτονικών κορυφών σε χρόνο πολυωνυμικό στο $\log|V|$. Η τεχνική των τυχαίων περιπάτων σε γραφήματα-επεκτατές έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως (π.χ. [31, 87, 20, 113]) για την απόδειξη αποτελεσμάτων ενίσχυσης πιθανότητας επιτυχίας. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη παραλλαγή του Λήμματος 6.1, η οποία αποδεικνύεται στην [20] με τεχνικές παρόμοιες με την [1]:

Λήμμα 6.2 [20]. *Για κάθε κανονικό γράφημα-επεκτατή $G(V,E)$ βαθμού d, υπάρχει μια σταθερά $\eta \geq 1$ ώστε να ισχύει η ακόλουθη πρόταση. Έστωσαν σταθερές $\epsilon < 1/2$ και $c = \eta \log \epsilon^{-1}$. Επίσης έστωσαν $\upsilon \in \mathbb{N}$, υποσύνολα $C_1, \ldots, C_\upsilon$ του V όλα με πυκνότητα το πολύ ϵ, ακέραιος $b \leq \upsilon$, και $1 \leq j_1 < \ldots < j_b \leq \upsilon$ μια ακολουθία ακεραίων. Θεωρούμε έναν τυχαίο περίπατο μήκους $c \cdot \upsilon$ στο G, και συμβολίζουμε με Y_j την κορυφή στην οποία βρίσκεται ο περίπατος στο βήμα $c \cdot j$, $j = 1, \ldots, \upsilon$. Τότε, $\mathrm{Prob}[Y_{j_1} \in C_{j_1}, \ldots, Y_{j_b} \in C_{j_b}] \leq (2\epsilon)^{b/2}$.*

Σύνολα Επιτυχίας και Εξάλειψη Τυχαιότητας

Ένα σύνολο $H \subseteq S$ καλείται *σύνολο επιτυχίας* (hitting set) για ένα σύνολο $S' \subseteq S$, αν $H \cap S' \neq \emptyset$. Μερικές φορές διατυπώνουμε ότι το H αποφεύγει το συμπλήρωμα του S', το οποίο συμβολίζεται $\overline{S'} = S - S'$, εννοώντας ότι $H \not\subseteq \overline{S'}$. Γενικότερα, ένα $H \subseteq S$ καλείται σύνολο *ϵ-επιτυχίας* με ασφάλεια b, αν για κάθε Boolean κύκλωμα A μεγέθους το πολύ b και $\mathrm{Prob}_{x \in S}[A(x) = 1] \geq \epsilon$, ισχύει ότι τουλάχιστον ένα στοιχείο $h \in H$ έχει την ιδιότητα $A(h) = 1$ (π.χ. βλ. [85, 4] για αναλυτική εξήγηση του ορισμού). Ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου $\mathcal{H}$, που με είσοδο έναν αριθμό n σε μοναδιαία (unary) αναπαράσταση, επιστρέφει ένα σύνολο ϵ-επιτυχίας για ασφάλεια n, $\mathcal{H}(n) \subseteq \{0,1\}^n$, καλείται *γρήγορη Γεννήτρια Συνόλων ϵ-Επιτυχίας* (quick ϵ-Hitting Set Generator) [4].

Αν εστιάσουμε στους $\mathcal{RP}$ αλγορίθμους, δεδομένου ενός αλγορίθμου $A \in \mathcal{RP}$, ένα σύνολο $H \subseteq S$ καλείται σύνολο ϵ-επιτυχίας για τον A, αν για κάθε x με $\mathrm{Prob}_{r \in S}[A(x,r) = \text{ΑΠΟΔΟΧΗ}] \geq \epsilon$, υπάρχει ένα τουλάχιστον $h \in H$ ώστε $A(x,h) = \text{ΑΠΟΔΟΧΗ}$. Αν C είναι ένα σύνολο από "παραπλανητικές" συμβολοσειρές για τον αλγόριθμο A, ένα σύνολο επιτυχίας H για τον A πρέπει να πετυχαίνει το συμπλήρωμα του C, δηλαδή το $\overline{C} = S - C$. Μερικές φορές, θα λέμε ότι το H αποφεύγει το σύνολο των "παραπλανητικών" συμβολοσειρών C. Παρόμοιοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν για τους co-$\mathcal{RP}$ αλγορίθμους, και γενικότερα, για κάθε πιθανοτικό αλγόριθμο με απλή κατεύθυνση λάθους. Προφανώς, αν υπάρχουν γρήγορες ΓΣΕ για ολόκληρη την κλάση πολυπλοκότητας $\mathcal{RP}$, τότε $\mathcal{P} = \mathcal{RP}$. Επιπλέον, μια γρήγορη ΓΣΕ αρκεί για την εξάλειψη της τυχαιότητας στον κλάση $\mathcal{BPP}$ [3], και κάποιες ιδιότητες των συνόλων επιτυχίας επιτρέπουν την προσομοίωση σε πολυωνυμικό χρόνο κάθε $\mathcal{BPP}$ αλγορίθμου από ασθενείς πηγές τυχαιότητας (weak random sources) [4]. Από την άλλη πλευρά, γρήγορες ΓΣΕ δεν αναμένεται να υπάρχουν για όλα τα πιθανοτικά συστήματα, ακόμα και αν αυτά έχουν λογαριθμική πολυπλοκότητα τυχαίων δυαδικών ψηφίων. Διαφορετικά, από μια απλή εφαρμογή τέτοιων ΓΣΕ στην κλάση $\mathcal{PCP}(\log n, 1)$, θα μπορούσαν να συναχθούν απροσδόκητα άνω φράγματα για την πολυπλοκότητα ντετερμινιστικού χρόνου ολόκληρης της κλάσης $\mathcal{NP}$ (π.χ. $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$).

Σε αυτό το κεφάλαιο, εισάγουμε την ιδέα των *συνόλων επιτυχίας υπό συνθήκη* (conditional hitting sets) για τη μείωση της τυχαιότητας πιθανοτικών αλγορίθμων απλής κατεύθυνσης λάθους. Αρχικά, για κάθε πιθανοτικό αλγόριθμο απλής κατεύθυνσης λάθους A, προσδιρίζουμε τη μορφή ενός υποσυνόλου C_1 του συνόλου C των "παραπλανητικών" συμβολοσειρών για τον A, ώστε το C_1 να μπορεί να αποφευχθεί με σημαντική πιθανότητα, και χρήση μόνο ενός σταθερού κλάσματος του αριθμού των τυχαίων δυαδικών ψηφίων που χρησιμοποιεί ο A. Επειδή ένα σύνολο που αποφεύγει το $C_2 = C - C_1$ δεν αποφεύγει εγγυημένα και το C_1, προτείνουμε την εκμετάλλευση μιας συμβολοσειράς $s \notin C_1$ για την κατασκευή ενός συνόλου επιτυχίας για ολόκληρο το $\overline{C} = S - C$. Διαισθητικά, αυτή η κατασκευή φαίνεται να είναι δυσκολότερη από την αποφυγή μόνο του C_2, αλλά ευκολότερη από την αποφυγή ολόκληρου του συνόλου C, διότι γνωρίζουμε ένα s που δεν ανήκει στο C_1.

Ορισμός 6.1. Δεδομένων ενός πιθανοτικού αλγορίθμου απλής κατεύθυνσης λάθους A, ενός οποιουδήποτε συνόλου "παραπλανητικών" συμβολοσειρών C για τον A, ενός υποσυνόλου $C_1 \subseteq C$, και μιας συμβολοσειράς $s \in S$, ένα σύνολο $W_{C_1,s}$ καλείται σύνολο επιτυχίας υπό συνθήκη (conditional hitting set) για τον A, αν το γεγονός $s \notin C_1$ συνεπάγεται ότι το σύνολο $W_{C_1,s}$ είναι ένα σύνολο επιτυχίας για τον A.

Στη συνέχεια, πολλές φορές η εξάρτηση από τον αλγόριθμο A δεν αναφέρεται ρητώς. Συγκεκριμένα, πολλές φορές διατυπώνουμε ότι το $W_{C_1,s}$ είναι ένα σύνολο επιτυχίας για το $\overline{C} = S - C$, όπου το σύνολο C είναι ένα σύνολο από "παραπλανητικές" συμβολοσειρές για κάποιον αλγόριθμο A. Προφανώς, κάθε σύνολο επιτυχίας για τον A είναι επίσης ένα σύνολο επιτυχίας υπό συνθήκη για τον A που αντιστοιχεί στην τετριμμένη διαμέριση του C στα $C_1 = \emptyset$ και $C_2 = C$. Επομένως, τα σύνολα επιτυχίας υπό συνθήκη αποτελούν γενίκευση της έννοιας των συνόλων επιτυχίας, και κάθε γρήγορη ΓΣΕ είναι επίσης και γρήγορη Γεννήτρια Συνόλων Επιτυχίας υπό Συνθήκη (ΓΣΕΣ – Conditional Hitting Set Generator, CHSG).

6.1.2 Αποτελέσματα

Αρχικά αποδεικνύουμε ότι ένας συνδυασμός των τεχνικών ενίσχυσης πιθανότητας επιτυχίας [31, 87, 20] με τυχαίους περιπάτους σε γραφήματα-επεκτατές με υπο-εκθετικό μέγεθος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μείωση της πολυπλοκότητας τυχαίων δυαδικών ψηφίων πιθανοτικών αλγορίθμων απλής κατεύθυνσης λάθους που ικανοποιούν μια συγκεκριμένη συνθήκη. Στη πραγματικότητα, δεδομένου ενός συνόλου S από συμβολοσειρές μήκους r (δηλ. $|S| = 2^r$), αποδεικνύουμε ότι μπορούμε να αποφύγουμε κάθε υποσύνολο του S, που μπορεί να εκφραστεί σαν συνδυαστικό ορθογώνιο διάστασης α, χρησιμοποιώντας μόνο $\frac{r}{\alpha} + \mathcal{O}(\alpha)$ τυχαία δυαδικά ψηφία. Με αυτό τον τρόπο αποδεικνύουμε ένα άνω φράγμα στον αριθμό των τυχαίων δυαδικών ψηφίων που επαρκούν για την κατασκευή ενός συνόλου επιτυχίας για συμπληρώματα συνδυαστικών ορθογωνίων. Επίσης, καταλήγουμε σε μια απλή δομική περιγραφή των αλγορίθμων, των οποίων η πολυπλοκότητα τυχαίων δυαδικών ψηφίων μπορεί να μειωθεί χρησιμοποιώντας αυτή την τεχνική.

Αν A είναι ένας πιθανοτικός αλγόριθμος απλής κατεύθυνσης λάθους, και C ένας σύνολο "παραπλανητικών" συμβολοσειρών για τον A, είναι φυσιολογικό να υπάρχει ένα υποσύνολο $C_1 \subseteq C$, το οποίο μπορεί να εκφραστεί σαν συνδυαστικό ορθογώνιο σε μια κατάλληλη διάσταση. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τεχνική των τυχαίων περιπάτων σε γραφήματα-επεκτατές με υπο-εκθετικό μέγεθος για να αποφύγουμε το C_1 χρησιμοποιώντας λιγότερα τυχαία δυαδικά ψηφία από τον A. Η ιδέα των συνόλων επιτυχίας υπό συνθήκη έχει να κάνει με το γεγονός ότι η δημιουργία ενός $s \notin C$, δεδομένου ενός $s_1 \notin C_1$, δεν μπορεί να είναι δυσκολότερη από τη δημιουργία ενός $s \notin C$, χωρίς καμία πληροφορία. Στη συνέχεια, η έννοια των συνόλων επιτυχίας υπο συνθήκη χρησιμοποιείται για την διατύπωση γενικών επαρκών συνθηκών για τη μείωση της τυχαιότητας των πιθανοτικών αλγορίθμων απλής κατεύθυνσης λάθους. Επίσης, προτείνουμε την κατασκευή μιας ΓΣΕΣ από μια 1-1 απεικόνιση των "παραπλανητικών" συμβολοσειρών του C στις κορυφές ενός γραφήματος-επεκτατή G, ώστε οι κορυφές του $C_2 = C - C_1$ να βρίσκονται σε μικρές συνεκτικές συνιστώσες του υπογραφήματος που ορίζεται (induced subgraph) από το C.

Οι τεχνική των τυχαίων περιπάτων σε γραφήματα-επεκτατές με υπο-εκθετικό μέγεθος εφαρμόστηκε για πρώτη φορά στην [52] για να αποδειχθεί, υπό συγκεκριμένες συνθήκες, ότι αν η κλάση $\mathcal{NP}$ περιέχεται στην $\mathcal{PCP}(\mathrm{poly}(\mathrm{loglog}\, n), \mathrm{poly}(\mathrm{loglog}\, n))$, τότε $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{DTIME}(n^{\mathrm{poly}(\mathrm{loglog}\, n)})$. Εδώ, δίνουμε μια απλούστερη απόδειξη για τη γενικότερη πρόταση ότι, αν η κλάση $\mathcal{NP}$ περιέχεται στην $\mathcal{PCP}(\mathrm{o}(\log n), \mathrm{o}(\log n))$, τότε $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. Επίσης, εφαρμόζουμε την ιδέα των συνόλων επιτυχίας υπό συνθήκη σε συστήματα Πιθανοτικά Ελέγξιμων Αποδείξεων (Probabilistically Checkable Proofs, $\mathcal{PCP}$s), συνδέοντας την πολυπλοκότητα ντετερμινιστικού χρόνου της κλάσης $\mathcal{NP}$ με τις παραμέτρους αποτελεσματικότητας των παραπάνω τεχνικών για μείωση τυχαιότητας.

Από ότι έχουμε υπόψη μας, η ιδέα και ο ορισμός των συνόλων επιτυχίας υπο συνθήκη είναι πρωτότυπος, και δεν έχει προταθεί ως τώρα καμία κατασκευή συνόλων επιτυχίας υπό συνθήκη για συμπληρώματα συνδυαστικών ορθογωνίων. Επίσης, στην εργασία [53] για πρώτη φορά συνδυάστηκαν τυχαίοι περίπατοι σε γραφήματα-επεκτατές με γενικευμένα σύνολα επιτυχίας για τη μείωση της τυχαιότητας πιθανοτικών αλγορίθμων απλής κατεύθυνσης λάθους.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι στην κατεύθυνση για μείωση της τυχαιότητας, τα αποτελέσματα των [120, 4] είναι διαφορετικής φύσης. Σε αυτές τις εργασίες επιτυγχάνεται προσομοίωση πιθανοτικών αλγορίθμων από ασθενείς πηγές τυχαιότητας, αλλά αν η ελάχιστη εντροπία θεωρηθεί σαν μέτρο της πολυπλοκότητας τυχαίων δυαδικών ψηφίων μιας τέτοιας πηγής, οι προσομοιώσεις που προτείνονται αυξάνουν την πολυπλοκότητα τυχαίων δυαδικών ψηφίων κατά έναν πολυωνυμικό παράγοντα.

6.2 Τυχαίοι Περίπατοι και Μείωση Τυχαιότητας

Αρχικά χρησιμοποιούμε το Λήμμα 6.1 για να αποδείξουμε ένα κλασικό αποτέλεσμα ενίσχυσης πιθανότητας επιτυχίας.

Λήμμα 6.3. *Έστω A ένας $\mathcal{RP}_{1/16}(r(n))$ αλγόριθμος για μια γλώσσα L. Για κάθε $0 < \delta < \frac{1}{16}$, υπάρχει ένας $\mathcal{RP}_\delta$ αλγόριθμος A' για την L, ο οποίος χρησιμοποιεί $\hat{r}(n) + c(\log d)(\log \frac{1}{\delta})$ τυχαία δυαδικά ψηφία, όπου τα c, d είναι οι σταθερές του Λήμματος 6.1).*

Απόδειξη. Ο αλγόριθμος A' που θα έχει τις επιθυμητές ιδιότητες καλεί επαναλαμβανόμενα τον A με ψευδο-τυχαίες συμβολοσειρές, που παράγονται από έναν τυχαίο περίπατο, όπως αυτός του Λήμματος 6.1. Συγκεκριμένα, ο A' εκτελεί τα ακόλουθα βήματα:

(1) Κατασκευάζει ένα κανονικό γράφημα-επεκτατή $G(V,E)$ βαθμού d με ακριβώς $2^{\hat{r}(n)}$ κορυφές, το οποίο ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος 6.1.

(2) Διαβάζει μια τυχαία συμβολοσειρά r μήκους $\hat{r}(n) + c(\log d)\big(\log \frac{1}{\delta}\big)$, όπου το c είναι η σταθερά του Λήμματος 6.1.

(3) Εκτελεί έναν τυχαίο περίπατο στο γράφημα G. Έστω $\kappa \cdot c$ το μήκος του τυχαίου περιπάτου, και έστω r_i η συμβολοσειρά που αντιστοιχεί στην κορυφή όπου βρίσκεται ο τυχαίος περίπατος στο $(i \cdot c)$-οστό βήμα, $i = 0, 1, \ldots, \kappa$. Η συμβολοσειρά r_0 αντιστοιχεί στην αρχική κορυφή, η οποία καθορίζεται από $\hat{r}(n)$ πραγματικά τυχαία δυαδικά ψηφία που λαμβάνονται από το r. Για κάθε $i = 0, \ldots, \kappa$, καλείται ο αλγόριθμος A με είσοδο x και τυχαία συμβολοσειρά r_i. Ο A' απορρίπτει το x ανν ο A απορρίπτει το x για όλες τις συμβολοσειρές r_i.

Αφού η πιθανότητα λάθους του αλγορίθμου A είναι το πολύ $\frac{1}{16}$, υπάρχει ένα υποσύνολο $C \subseteq V$, $|C| \leq |V|/16$ ώστε μια κορυφή u ανήκει στο C ανν η u αντιστοιχεί σε μια συμβολοσειρά r_i, για την οποία η κλήση $A(x, r_i)$ δίνει λάθος αποτέλεσμα (δηλ. απορριψη αντί για αποδοχη). Αν $\kappa = \log \frac{1}{\delta}$, από το Λήμμα 6.1 συνάγεται ότι η πιθανότητα όλες οι συμβολοσειρές $r_i \in C$ είναι το πολύ $2^{-\log(1/\delta)} = 2^{\log \delta} = \delta$.

Όσον αφορά στην πολυπλοκότητα τυχαίων δυαδικών ψηφίων του A', μια δυαδική συμβολοσειρά με μήκος $\hat{r}(n) + c(\log d)\big(\log \frac{1}{\delta}\big)$ αρκεί για τον πλήρη προσδιορισμό των βημάτων ενός τυχαίου περιπάτου μήκους $c \log \frac{1}{\delta}$ στο γράφημα G.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, αν η πιθανότητα λάθους του A είναι $\frac{1}{16} < \epsilon < \frac{1}{2}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 6.2 αντί για το Λήμμα 6.1. Σε αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμος A' χρησιμοποιεί το πολύ $\hat{r}(n) + 2\eta(\log d)\big(\log \frac{1}{\epsilon}\big)\Big(\log_{1/2\epsilon} \frac{1}{\delta}\Big)$ τυχαία δυαδικά ψηφία, και επιτυγχάνει πιθανότητα λάθους το πολύ δ. □

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η τεχνική των τυχαίων περιπάτων σε γραφήματα-επεκτατές μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για μείωση της τυχαιότητας κάθε $\mathcal{RP}$ αλγορίθμου A που ικανοποιεί μια συγκεκριμένη συνθήκη. Μάλιστα, κάτι τέτοιο μπορεί να πραγματοποιηθεί χωρίς την ταυτόχρονη αύξηση της πιθανότητας λάθους του A. Έστω A ένας οποιοσδήποτε $\mathcal{RP}(r(n))$ αλγόριθμος, και δεδομένης μιας εισόδου x, έστω $C \subset S$ το σύνολο των συμβολοσειρών r που οδηγούν την κλήση $A(x,r)$ σε λάθος αποτέλεσμα, δηλαδή απορριψη αντί για αποδοχη. Στη συνέχεια αυτής της ενότητας, θεωρούμε μόνο $\mathcal{RP}$ αλγορίθμους A για τους οποίους, για κάθε είσοδο x, το αντίστοιχο σύνολο C των "παραπλανητικών" συμβολοσειρών χαρακτηρίζεται από την ακόλουθη πρόταση:

Υπόθεση 6.1. *Υπάρχει κάποιος ακέραιος $\alpha > 1$ και υποσύνολα $C_1^\alpha, C_2^\alpha, \ldots, C_\alpha^\alpha \subseteq S^\alpha$, ώστε κάθε συμβολοσειρά $s \in C$ μπορεί να γραφτεί σαν $s_1 \circ s_2 \cdots \circ s_\alpha$, για κάποια $s_1 \in C_1^\alpha, s_2 \in C_2^\alpha, \ldots, s_\alpha \in C_\alpha^\alpha$.*

Προφανώς, η Υπόθεση 6.1 περιορίζει το σύνολο των "παραπλανητικών" συμβολοσειρών σε εκείνες τις συμβολοσειρές που παράγονται από τη συνένωση (concatenation) των μικρότερων συμβολοσειρών $s_i \in C_i^\alpha$, $C_i^\alpha \subseteq S^\alpha$, για $i = 1, \ldots, \alpha$. Επομένως, το σύνολο C περιέχεται σε ένα συνδυαστικό ορθογώνιο του S διάστασης α, το οποίο πρέπει να αποφύγουμε. Αποδεικνύουμε ότι η Υπόθεση 6.1 αποτελεί μία επαρκή συνθήκη για την μείωση του αριθμού των τυχαίων δυαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούνται από τον αλγόριθμο A.

Θεώρημα 6.1. *Έστω A ένας $\mathcal{RP}(r(n))$ αλγόριθμος για μια γλώσσα L, ο οποίος ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1 για κάποιον ακέραιο $\alpha > 1$. Τότε, υπάρχει ένας $\mathcal{RP}$ αλγόριθμος $\hat{A}$ για την L που χρησιμοποιεί το πολύ $\left\lceil \frac{\hat{r}(n)}{\alpha} \right\rceil + \Theta(\gamma\alpha)$ τυχαία δυαδικά ψηφία, και έχει πιθανότητα λάθους $2^{-\gamma}$, για κάθε ακέραιο $\gamma \geq 1$.*

Απόδειξη. Αρχικά εφαρμόζουμε το Λήμμα 6.3, από το οποίο προκύπτει ένας αλγόριθμος A' για τη γλώσσα L που χρησιμοποιεί το πολύ $r_{A'} = \hat{r}(n) + 4(\alpha+1)c \log d$ τυχαία δυαδικά ψηφία, και έχει πιθανότητα λάθους το πολύ $2^{-4(\alpha+1)}$. Η απόδειξη του Λήμματος 6.3 υποδεικνύει ότι ο αλγόριθμος A' καλεί τον A το πολύ $4(\alpha+1)$ φορές. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $4(\alpha+1)c \log d \leq \left\lceil \frac{\hat{r}(n)}{\alpha} \right\rceil$.

Θα αποδείξουμε ότι από την Υπόθεση 6.1 συνάγεται ότι μια τυχαία συμβολοσειρά για την εκτέλεση του A' μπορεί να παραχθεί από έναν τυχαίο περίπατο σε ένα γράφημα-επεκτατή που έχει $2^{\lceil \hat{r}(n)/\alpha \rceil}$ κορυφές. Συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος $\hat{A}$, όταν δεχθεί είσοδο x, εκτελεί τα παρακάτω βήματα:

(1) Κατασκευάζει ένα κανονικό γράφημα-επεκτατή $\hat{G}(\hat{V}, \hat{E})$ με βαθμό $\hat{d}$, το οποίο ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος 6.2. Το γράφημα $\hat{G}$ περιέχει μία κορυφή για κάθε διαφορετική δυαδική συμβολοσειρά με μήκος $\left\lceil \frac{\hat{r}(n)}{\alpha} \right\rceil$. Επίσης, έστω $\hat{c}$ η σταθερά του Λήμματος 6.2.

(2) Ο αλγόριθμος $\hat{A}$ πραγματοποιεί έναν τυχαίο περίπατο στο γράφημα $\hat{G}$. Έστω $\gamma(\alpha+1)\hat{c}$ το μήκος του περιπάτου, και έστω s_i η συμβολοσειρά που αντιστοιχεί στην κορυφή όπου βρίσκεται ο τυχαίος περίπατος στο $(i \cdot \hat{c})$-οστό βήμα του, $i = 1, \ldots, \gamma(\alpha+1)$. Οι συμβολοσειρές r_j, $|r_j| \geq r_{A'}$, $j = 0, \ldots, \gamma - 1$, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν για τις διαδοχικές εκτελέσεις του αλγορίθμου A', παράγονται από τη συνένωση $\alpha + 1$ διαδοχικών αποτελεσμάτων του τυχαίου περιπάτου, $r_j = s_{j(\alpha+1)+1} \circ s_{j(\alpha+1)+2} \cdots \circ s_{j(\alpha+1)+\alpha+1}$.

(3) Ο αλγόριθμος $\hat{A}$ καλεί τον $A'(x, r_j)$ ακριβώς γ φορές, $j = 0, \ldots, \gamma - 1$, και απορρίπτει την είσοδο x ανν όλες οι κλήσεις του A' απορρίπτουν το x.

Έστω C το σύνολο των "παραπλανητικών" συμβολοσειρών για τον αλγόριθμο A' με είσοδο x. Επειδή έχουμε δεχτεί ότι ο αλγόριθμος A ικανοποιεί την Υπόθεση 6.1, και $(\alpha+1)\left\lceil \frac{\hat{r}(n)}{\alpha} \right\rceil \geq r_{A'}$, πρέπει να υπάρχουν υποσύνολα

$C_1^\alpha, C_2^\alpha, \ldots, C_\alpha^\alpha, C_{\alpha+1}^\alpha \subseteq S^\alpha$, ώστε αν η συμβολοσειρά $s \in C$, τότε είναι $s = s_1 \circ s_2 \cdots \circ s_\alpha \circ s_{\alpha+1}$, για κάποια $s_1 \in C_1^\alpha, s_2 \in C_2^\alpha, \ldots, s_{\alpha+1} \in C_{\alpha+1}^\alpha$. Επομένως, ο αλγόριθμος A' καταλήγει σε λανθασμένο αποτέλεσμα μόνο αν όλες οι συμβολοσειρές $s_{j(\alpha+1)+i}$, που παράγονται από τον τυχαίο περίπατο του βήματος (2), ανήκουν στα υποσύνολα C_i^α, για όλα τα $j = 0, \ldots, \gamma - 1$, και τα $i = 1, \ldots, \alpha + 1$.

Ισχύει ακόμη ότι $|C_1^\alpha||C_2^\alpha| \cdots |C_{\alpha+1}^\alpha| \leq 2^{-4(\alpha+1)}|\hat{V}|^{\alpha+1}$, γιατί η πιθανότητα λάθους του αλγορίθμου A' είναι το πολύ $2^{-4(\alpha+1)}$. Συνεπώς, για τουλάχιστον ένα $1 \leq i \leq \alpha + 1$, ο πληθικός αριθμός του υποσυνόλου C_i^α θα είναι το πολύ $|\hat{V}|/16$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 6.2, συμπεραίνουμε ότι η πιθανότητα όλες οι γ κλήσεις του A' να καταλήξουν σε λάθος αποτέλεσμα είναι το πολύ $2^{-\gamma}$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο αλγόριθμος A καλείται το πολύ $4(\alpha + 1)\gamma$ φορές, και ότι ο αλγόριθμος $\hat{A}$ χρησιμοποιεί το πολύ $\left\lceil \frac{\hat{r}(n)}{\alpha} \right\rceil + \gamma(\alpha+1)\hat{c}\log \hat{d}$ τυχαία δυαδικά ψηφία. □

Είναι φανερό ότι η απόδειξη του Θεωρήματος 6.1 μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε πιθανοτικό αλγόριθμο απλής κατεύθυνσης λάθους, συμπεριλαμβανομένων και των αλγορίθμων στην κλάση co-$\mathcal{RP}$, δηλαδή των αλγορίθμων πολυωνυμικού χρόνου που πάντα αποδέχονται τις εισόδους $x \in L$, αλλά επίσης αποδέχονται με πιθανότητα το πολύ $\frac{1}{4}$ εισόδους $x \notin L$.

Το Θεώρημα 6.1 δηλώνει ότι η Υπόθεση 6.1 περιγράφει μια οικογένεια επαρκών συνθηκών για τη μείωση της πολυπλοκότητας τυχαίων δυαδικών ψηφίων σε πιθανοτικούς αλγορίθμους απλής κατεύθυνσης λάθους. Επίσης είναι φανερό ότι η αποτελεσματικότητα της μεθόδου εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου α, για την οποία ισχύει η Υπόθεση 6.1. Από την άλλη πλευρά, η Υπόθεση 6.1 είναι πολύ γενική και περιοριστική. Επομένως, δεν αναμένεται να ισχύει για αυθαίρετα μεγάλες τιμές της παραμέτρου αποτελεσματικότητας α.

Παρόλα αυτά θα δείξουμε ότι, για τους περισσότερους πιθανοτικούς αλγορίθμους, αναμένεται να υπάρχει κάποια τιμή της παραμέτρου α, για την οποία η Υπόθεση 6.1 ισχύει. Κάθε πιθανοτικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου μπορεί να αναχθεί σε ένα Boolean κύκλωμα $B(Y_1, Y_2, \ldots, Y_\lambda)$, $\lambda = \mathcal{O}(\text{poly}(n))$, όπου τα Y_i είναι τυχαίες μεταβλητές που δηλώνουν το αποτέλεσμα κάποιου πιθανοτικού ελέγχου που εκτελέστηκε από τον αλγόριθμο. Επομένως, οι πραγματικές τιμές των Y_i εξαρτώνται από την είσοδο x, την τυχαία συμβολοσειρά r, και το συγκεκριμένο πιθανοτικό έλεγχο. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 6.1. *Η Υπόθεση 6.1 ισχύει με παράμετρο α για κάθε πιθανοτικό αλγόριθμο απλής κατεύθυνσης λάθους $B(Y_1, Y_2, \ldots, Y_\lambda)$, που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(α) Οι τυχαίες μεταβλητές Y_i μπορούν να διαμεριστούν σε ξένα σύνολα, ώστε όλες οι μεταβλητές κάθε συνόλου να είναι ανεξάρτητες από όλες τις μεταβλητές των υπολοίπων συνόλων.

(β) *Οι μεταβλητές κάθε συνόλου εξαρτώνται από το πολύ* $\left\lceil \frac{\hat{r}(n)}{\alpha} \right\rceil$ *ψηφία της τυχαίας συμβολοσειράς.*

Με βάση την παραπάνω πρόταση, είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί ότι πολλοί φυσιολογικοί αλγόριθμοι απλής κατεύθυνσης λάθους ικανοποιούν την Υπόθεση 6.1 για μικρές ακέραιες τιμές της παραμέτρου $\alpha > 1$. Το Θεώρημα 6.1 μπορεί να εφαρμοστεί σε όλους αυτούς τους αλγορίθμους για να μειώσει την τυχαιότητα.

6.2.1 Γενικευμένες Συνθήκες για Μείωση της Τυχαιότητας

Για κάθε αλγόριθμο A, ακέραιο $\alpha > 1$, και σύνολο από "παραπλανητικές" συμβολοσειρές C, υπάρχει ένα υποσύνολο $C_1 \subseteq C$, το οποίο αποτελείται από όλες τις συμβολοσειρές $s \in C$ που ικανοποιούν την Υπόθεση 6.1 για τη δεδομένη παράμετρο α. Επομένως, το Θεώρημα 6.1 υποδεικνύει έναν πιθανοτικό αλγόριθμο $\hat{A}$, ο οποίος χρησιμοποιεί λιγότερα δυαδικά ψηφία από τον A, και με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - 2^{-\gamma}$, αποφεύγει το σύνολο C_1.

Η κατασκευή ενός συνόλου επιτυχίας για τον αλγόριθμο A απαιτεί όμως την αποφυγή ολόκληρου του συνόλου C. Ενας τρόπος να αποφύγουμε όλο το C ξεκινώντας από μια συμβολοσειρά που δεν ανήκει στο C_1 είναι να τοποθετήσουμε τις συμβολοσειρές του συνόλου $C_2 = C - C_1$ στις κορυφές του γραφήματος-επεκτατή G (βλ. απόδειξη Λήμματος 6.3) έτσι ώστε, στο υπογράφημα G_C που ορίζεται από τις κορυφές του C, όλες οι κορυφές του C_2 να βρίσκονται τοποθετημένες σε μικρές συνεκτικές συνιστώσες. Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να εκτελέσουμε τον αλγόριθμο A για όλες τις κορυφές που ανήκουν σε μια μικρή συνεκτική συνιστώσα του G_C, ώστε να αποφύγουμε ολόκληρο το C.

Σε αυτή την ενότητα, χρησιμοποιούμε αυτή την ιδέα για να διατυπώσουμε μια οικογένεια από γενικές επαρκείς συνθήκες για τη μείωση της τυχαιότητας σε πιθανοτικούς αλγορίθμους απλής κατεύθυνσης λάθους. Αυτές οι συνθήκες είναι γενικές με την έννοια ότι μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε αλγόριθμο απλής κατεύθυνσης λάθους, αν και η αποδοτικότητά τους εξαρτάται από τον αλγόριθμο (επίσης βλ. Θεώρημα 6.4 και Πόρισμα 6.2). Αυτές οι ιδέες γενικεύονται ακόμη περισσότερο με την εισαγωγή της έννοιας των συνόλων επιτυχίας υπό συνθήκη.

Έστω A ένας οποιοσδήποτε πιθανοτικός αλγόριθμος απλής κατεύθυνσης λάθους που χρησιμοποιεί $\hat{r}(n)$ τυχαία δυαδικά ψηφία και έχει πιθανότητα λάθους το πολύ ϵ, $0 < \epsilon \leq \frac{1}{4}$. Ακόμη, έστω $G(V, E)$ ένα κανονικό γράφημα-επεκτατής βαθμού d με $N = 2^{\hat{r}(n)}$ κορυφές. Θεωρούμε μια 1-1, υπολογίσιμη συνάρτηση (one-to-one computable function) $F : S \mapsto V$ η οποία αντιστοιχεί όλες τις συμβολοσειρές μήκους $\hat{r}(n)$ στις κορυφές του γραφήματος G. Για κάθε σύνολο από "παραπλανητικές" συμβολοσειρές $C \subset S$, $|C| \leq \epsilon N$, τα υπογραφήματα $G_i(V_i, E_i)$, $F(C) = \bigcup_i V_i$, συμβολίζουν τις συνεκτικές συνιστώσες του υπογραφήματος $G_{F,C}(F(C), E_{F(C)})$, το οποίο ορίζεται από τις κορυφές του συνόλου $F(C)$. Δεδομένου ενός ζευγαριού ακεραίων (α, g), $1 < \alpha, g < N$, θεωρούμε μια διαμέριση του συνόλου C σε υποσύνολα C_1, C_2, όπου, για κάποια σύνολα $C_1^\alpha, C_2^\alpha, \ldots, C_\alpha^\alpha \subseteq S^\alpha$, $C_1 = C \cap C_1^\alpha \times C_2^\alpha \times \cdots \times C_\alpha^\alpha$, και $C_2 = C - C_1$. Δηλαδή, η διαμέριση ορίζεται από υποσύνολα $C_1^\alpha, C_2^\alpha, \ldots, C_\alpha^\alpha \subseteq S^\alpha$, ώστε κάθε συμβολοσειρά $s \in C_1$ να γράφεται σαν $s = s_1 \circ s_2 \cdots \circ s_\alpha$, για κάποια $s_1 \in C_1^\alpha, s_2 \in C_2^\alpha, \ldots, s_\alpha \in C_\alpha^\alpha$. Υποθέτουμε ότι οι συμβολοσειρές του συνόλου S μπορούν να τοποθετηθούν (από μια συνάρτηση F) στις κορυφές του γραφήματος-επεκτατή G, ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

Υπόθεση 6.2. *Δεδομένων ενός αλγορίθμου απλής κατεύθυνσης λάθους A και ενός ζευγαριού ακεραίων (α, g), $1 < \alpha$, $g < N$, για κάθε σύνολο από "παραπλανητικές" συμβολοσειρές $C \subset S$, $|C| \leq \epsilon N$, υπάρχει μια διαμέριση του C σε υποσύνολα C_1, C_2 όπως ορίστηκαν παραπάνω, και μια 1-1 υπολογίσιμη συνάρτηση $F : S \mapsto V$, έτσι ώστε, για όλες τις συμβολοσειρές $s \in C$, τουλάχιστον μία από τις παρακάτω συνθήκες ικανοποιείται:*

(1) Η συμβολοσειρά $s \in C_1$, δηλ. $s = s_1 \circ s_2 \cdots \circ s_\alpha$, για κάποια $s_1 \in C_1^\alpha, s_2 \in C_2^\alpha, \ldots, s_\alpha \in C_\alpha^\alpha$.

(2) Η κορυφή $F(s)$ ανήκει σε μια συνεκτική συνιστώσα $G_i(V_i, E_i)$ του υπογραφήματος που ορίζεται από το σύνολο κορυφών $F(C)$, με $|V_i| \leq g$ (μικρή συνεκτική συνιστώσα).

Η Υπόθεση 6.2 αποτελεί γενίκευση της Υπόθεσης 6.1, διότι κάθε εφαρμογή της πρώτης με παραμέτρους $(\alpha, 1)$, $C_2 = \emptyset$, και για κάθε συνάρτηση F, είναι ισοδύναμη με την εφαρμογή της δεύτερης με παράμετρο α. Επομένως, το ακόλουθο θεώρημα αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 6.1.

Θεώρημα 6.2. *Έστω A ένας πιθανοτικός αλγόριθμος απλής κατεύθυνσης λάθους για μία γλώσσα L, ο οποίος εκτελείται σε χρόνο $T_A(n)$, χρησιμοποιεί $\hat{r}(n)$ τυχαία δυαδικά ψηφία, και έχει πιθανότητα λάθους ϵ, $0 < \epsilon \leq \frac{1}{4}$. Επίσης, για $N = 2^{\hat{r}(n)}$, ένα ζευγάρι ακεραίων (α, g), $1 < \alpha$, $g < N$, και ένα κανονικό γράφημα-επεκτατή $G(V, E)$, $|V| = N$, βαθμού d, έστω $F : S \mapsto V$ μια συνάρτηση που ικανοποιεί την Υπόθεση 6.2 για παραμέτρους (α, g), και μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο $T_F(N)$.*
Τότε, υπάρχει ένας πιθανοτικός αλγόριθμος απλής κατεύθυνσης λάθους $\tilde{A}$ για τη γλώσσα L, ο οποίος εκτελείται σε χρόνο $\mathcal{O}(\gamma \alpha g T_A(n) + T_F(N) + \mathrm{poly}(N))$, χρησιμοποιεί το πολύ $\left\lceil \frac{\hat{r}(n)}{\alpha} \right\rceil + \Theta(\gamma\alpha)$ τυχαία δυαδικά ψηφία, και έχει πιθανότητα λάθους $2^{-\gamma}$, για κάθε ακέραιο $\gamma \geq 1$.

Απόδειξη. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι ο A είναι ένας $\mathcal{RP}$ αλγόριθμος. Παρόλα αυτά, τα ίδια ακριβώς επιχειρήματα ισχύουν για κάθε πιθανοτικό αλγόριθμο απλής κατεύθυνσης λάθους. Ο αλγόριθμος $\tilde{A}$ καλεί επαναλαμβανόμενα τον αλγόριθμο A. Συγκεκριμένα, για είσοδο x, $|x| = n$, και τυχαία συμβολοσειρά r μήκους $\left\lceil \frac{\hat{r}(n)}{\alpha} \right\rceil + \Theta(\gamma\alpha)$, για κάποιο ακέραιο $\gamma \geq 1$, ο αλγόριθμος $\tilde{A}$ εκτελεί τα ακόλουθα βήματα:

(1) Κατασκευάζει ένα κανονικό γράφημα-επεκτατή $\hat{G}(\hat{V}, \hat{E})$ βαθμού $\hat{d}$, το οποίο ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος 6.2. Το γράφημα $\hat{G}$ περιέχει μία κορυφή για κάθε διαφορετική συμβολοσειρά μήκους $\left\lceil \frac{\hat{r}(n)}{\alpha} \right\rceil$. Έστω $\hat{c}$ η σταθερά του Λήμματος 6.2.

(2) Κατασκευάζει ένα κανονικό γράφημα-επεκτατή $G(V, E)$, $|V| = N = 2^{\hat{r}(n)}$, βαθμού d, το οποίο ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος 6.2 (και του Λήμματος 6.1). Έστω c η σταθερά του Λήμματος 6.2. Επίσης, ο αλγόριθμος $\tilde{A}$ κατασκευάζει μια 1-1 υπολογίσιμη συνάρτηση $F : S \mapsto V$, η οποία ικανοποιεί την Υπόθεση 6.2 για παραμέτρους (α, g). Προφανώς, τα βήματα (1) και (2) του αλγορίθμου $\tilde{A}$ μπορούν να εκτελεστούν σε χρόνο $\mathcal{O}(T_F(N) + \mathrm{poly}(N))$. Στο εξής υποθέτουμε ότι κάθε υπολογισμός της συνάρτησης F μπορεί να εκτελεστεί σε χρόνο $\mathcal{O}(1)$.

(3) Ο αλγόριθμος $\tilde{A}$ πραγματοποιεί έναν τυχαίο περίπατο μήκους $\gamma(\alpha + 1)\hat{c}$ στο γράφημα $\hat{G}$. Έστω s_i η συμβολοσειρά που αντιστοιχεί στην κορυφή οπου βρίσκεται ο τυχαίος περίπατος στο $(i \cdot \hat{c})$-οστό βήμα του, $i = 1, \ldots, \gamma(\alpha + 1)$. Η συμβολοσειρά r_j δημιουργείται από τη συνένωση $\alpha + 1$ διαδοχικών συμβολοσειρών s_i, $r_j = s_{j(\alpha+1)+1} \circ s_{j(\alpha+1)+2} \cdots \circ s_{j(\alpha+1)+\alpha+1}$, $j = 0, \ldots, \gamma - 1$.

(4) Ο αλγόριθμος $\tilde{A}$ χρησιμοποιεί τις ψευδο-τυχαίες συμβολοσειρές r_j για να πραγματοποιήσει έναν περίπατο μήκους $\alpha \cdot c$ στο γράφημα G. Έστω r_i^j το αποτέλεσμα του $(i \cdot c)$-οστού βήματος του περιπάτου, και $W_1 = \{r_i^j \in S : j = 0, \ldots, \gamma - 1 \text{ και } i = 0, \ldots, \alpha\}$. Ο αλγόριθμος $\tilde{A}$ καλεί τον $A(x, r_i^j)$, για κάθε συμβολοσειρά $r_i^j \in W_1$. Αν ο A αποδεκτεί την είσοδο x για κάποια συμβολοσειρά του W_1, τότε ο $\tilde{A}$ τερματίζει αποδεχόμενος το x.

(5) Για κάθε κορυφή $v_l = F(s_l)$, $s_l \in W_1$, ο αλγόριθμος $\tilde{A}$ υπολογίζει ένα δέντρο (V_l, E_l) του γραφήματος G που περιέχει ακριβώς $g + 1$ κορυφές συμπεριλαμβανομένης της v_l. Έστω $W_2 = \{s \in S : F(s) \in V_l - \{v_l\}\}$. Ο αλγόριθμος $\tilde{A}$ καλεί τον $A(x, r_{W_2})$, για κάθε συμβολοσειρά $r_{W_2} \in W_2$. Ο $\tilde{A}$ απορρίπτει την είσοδο x ανν όλες οι κλήσεις του A για τις συμβολοσειρές $r_{W_2} \in W_2$ απορρίπτουν το x. Είναι φανερό ότι τα βήματα (3), (4) και (5) μπορούν να εκτελεστούν σε χρόνο $\mathcal{O}(\gamma\alpha g T_A(n) + \mathrm{poly}(n))$.

Η πολυπλοκότητα χρόνου χειρότερης περίπτωσης του $\tilde{A}$ είναι $\mathcal{O}(\gamma\alpha g T_A(n) + T_F(N) + \mathrm{poly}(N))$. Επίσης, ο αλγόριθμος $\tilde{A}$ χρειάζεται το πολύ $\left\lceil \frac{\hat{r}(n)}{\alpha} \right\rceil + \gamma(\alpha + 1)\hat{c} \log \hat{d}$ τυχαία δυαδικά για την πραγματοποίηση του τυχαίου περιπάτου στο γράφημα $\hat{G}$.

Έστωσαν C το σύνολο των "παραπλανητικών" συμβολοσειρών για τον A με είσοδο x, και C_1, C_2 μια οποιαδήποτε διαμέριση του C για την οποία η συνάρτηση

F ικανοποιεί την Υπόθεση 6.2 για παραμέτρους (α, g). Η απόδειξη του Θεωρήματος 6.1 υποδεικνύει ότι όλες οι συμβολοσειρές $s \in W_1$ ανήκουν στο σύνολο C_1 με πιθανότητα το πολύ $2^{-\gamma}$. Επίσης, αν τουλάχιστον μια συμβολοσειρά $s_l \in W_1$ ανήκει στο $S - C_1$, τότε είτε $s_l \notin C$, είτε $s_l \in C_2$. Στη δεύτερη περίπτωση, η Υπόθεση 6.2 συνεπάγεται ότι κάθε s_l που ανήκει στο σύνολο C, αλλά όχι στο C_1, έχει τοποθετηθεί σε μια μικρή (μεγέθους το πολύ g) συνεκτική συνιστώσα του υπογραφήματος G_C που ορίζεται από τις κορυφές του C. Επομένως, υπάρχει τουλάχιστον μια συμβολοσειρά $s_l' \in V_l - \{s_l\} \subseteq W_2$ που δεν ανήκει στο C, και η πιθανότητα λάθους του αλγορίθμου $\tilde{A}$ είναι το πολύ $2^{-\gamma}$. □

Αξίζει να σημειωθεί ότι η αναλυτική κατασκευή της συνάρτησης F απαιτεί χρόνο τουλάχιστον εκθετικό στον αριθμό των τυχαίων δυαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούνται από τον αλγόριθμο A. Επομένως, αν ο αλγόριθμος A ανήκει στην κλάση $\mathcal{RP}$ (co-$\mathcal{RP}$), χρειάζεται μια μη αναλυτική (implicit) διαδικασία κατασκευής της F που να εκτελείται σε $\mathrm{poly}(\hat{r}(n))$ χρόνο, ώστε ο αλγόριθμος $\tilde{A}$ επίσης να ανήκει στην κλάση $\mathcal{RP}$ (co-$\mathcal{RP}$).

Αν $2^{\hat{r}(n)/\alpha} g = 2^{\hat{r}(n)}$, τότε η πολυπλοκότητα τυχαίων δυαδικών ψηφίων του A μπορεί να μειωθεί σε $\hat{r}(n)/\alpha$ καλώντας τον A ακριβώς g φορές για όλες τις διαφορετικές τιμές των τελευταίων $\hat{r}(n)\big(1 - \frac{1}{\alpha}\big)$ θέσεων της τυχαίας συμβολοσειράς. Το Θεώρημα 6.2 μπορεί λοιπόν να γίνει αντιληπτό σαν μια μη τετριμμένη γενίκευση αυτής της στοιχειώδους τεχνικής μείωσης της τυχαιότητας.

Το Θεώρημα 6.2 προτείνει τη χρήση τυχαίων περιπάτων σε γραφήματα-επεκτατές σε συνδυασμό με σύνολα επιτυχίας υπό συνθήκη για το συμπλήρωμα του $C = C_1 \cup C_2$, για τη μείωση του αριθμού των τυχαίων δυαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούνται από τον αλγόριθμο A. Το Θεώρημα 6.1 τεκμηριώνει ότι λίγα πραγματικά τυχαία δυαδικά ψηφία είναι αρκετά ώστε ένας τυχαίος περίπατος σε ένα γράφημα-επεκτατή να αποφύγει το σύνολο των "παραπλανητικών" συμβολοσειρών που ικανοποιούν την Υπόθεση 6.1. Με αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε ένα σύνολο W_1 που αποφεύγει το C_1 με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - 2^{-\gamma}$, χρησιμοποιώντας λιγότερα δυαδικά ψηφία από τον αλγόριθμο A.

Ακόμη, μια συνάρτηση F που ικανοποιεί το σκέλος (β) της Υπόθεσης 6.2 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή ενός συνόλου μεγέθους g το οποίο αποφεύγει το σύνολο $C_2 = C - C_1$. Αν όμως το C_1 δεν είναι κενό, και W_2' είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο που αποφεύγει το C_2, το $W_1 \cup W_2'$ ενδέχεται να μην αποφεύγει ολόκληρο το σύνολο C. Το Θεώρημα 6.2 περιγράφει έναν τρόπο εκμετάλλευσης των συμβολοσειρών $s \notin C_1$ (οι οποίες μπορούν να βρεθούν χρησιμοποιώντας μόνο ένα κλάσμα του αριθμού των τυχαίων δυαδικών ψηφίων που χρησιμοποιεί ο A) για την κατασκευή ενός συνόλου που αποφεύγει ολόκληρο το σύνολο C, δηλαδή αποτελεί σύνολο επιτυχίας για το $\overline{C} = S - C$.

Από την απόδειξη του Θεωρήματος 6.2 συνάγεται ότι η Υπόθεση 6.2 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή ενός συνόλου επιτυχίας υπό συνθήκη για το $\overline{C}$ με μέγεθος g. Συγκεκριμένα, για κάθε $s_l \notin C_1$, το αντίστοιχο δέντρο (V_l, E_l) που κατασκευάζεται στο βήμα (5) είναι ένα σύνολο επιτυχίας για το $\overline{C}$. Επομένως, το $W_1 \cup W_2$ είναι ένα σύνολο επιτυχίας για το $\overline{C}$ με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - 2^{-\gamma}$. Για να αποδείξουμε ότι το δέντρο (V_l, E_l) του G είναι ένα σύνολο επιτυχίας υπό συνθήκη για το $\overline{C}$, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση F που τοποθετεί τις συμβολοσειρές του συνόλου S στις κορυφές του γραφήματος-επεκτατή G σύμφωνα με τους περιορισμούς της Υπόθεσης 6.2.

Είναι φανερό ότι, για κάθε πιθανοτικό αλγόριθμου απλής κατεύθυνσης λάθους, οι παραπάνω τεχνικές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή ενός συνόλου επιτυχίας υπό συνθήκη από συμβολοσειρές $s \notin C_1$. Γενικότερα, το Θεώρημα 6.2 ισχύει για κάθε πιθανοτικό αλγόριθμο απλής κατεύθυνσης λάθους που έχει πιθανότητα λάθους ϵ και ικανοποιεί την παρακάτω πρόταση.

Υπόθεση 6.3. *Δεδομένων ενός αλγορίθμου A και ακεραίων (α, g), $1 < \alpha$, $g < |S|$, για κάθε σύνολο "παραπλανητικών" συμβολοσειρών $C \subset S$, $|C| \leq \epsilon|S|$, υπάρχουν υποσύνολα $C_1^\alpha, \ldots, C_\alpha^\alpha \subseteq S^a$ που ορίζουν μια διαμέριση του C σε υποσύνολα $C_1 = C \cap C_1^\alpha \times \cdots \times C_\alpha^\alpha$ και $C_2 = C - C_1$, τέτοια ώστε, για κάθε $s \notin C_1$, ένα σύνολο επιτυχίας υπό συνθήκη W, $|W| \leq g$, για το $\overline{C} = S - C$ μπορεί να υπολογισθεί από το s σε χρόνο $T_W(|S|)$.*

Πόρισμα 6.1. *Έστω A ένας πιθανοτικός αλγόριθμος απλής κατεύθυνσης λάθους για μία γλώσσα L, ο οποίος εκτελείται σε χρόνο $T_A(n)$, χρησιμοποιεί $\hat{r}(n)$ τυχαία δυαδικά ψηφία, έχει πιθανότητα λάθους ϵ, $0 < \epsilon \leq \frac{1}{4}$, και ικανοποιεί την Υπόθεση 6.3 για ακεραίους (α, g).*
Τότε, υπάρχει ένας πιθανοτικός αλγόριθμος απλής κατεύθυνσης λάθους $\tilde{A}$ για τη γλώσσα L, ο οποίος εκτελείται σε χρόνο $\mathcal{O}\big(\gamma\alpha g T_A(n) + \gamma\alpha T_W(2^{\hat{r}(n)}) + \mathrm{poly}(n)\big)$, χρησιμοποιεί το πολύ $\left\lceil \frac{\hat{r}(n)}{\alpha} \right\rceil + \Theta(\gamma\alpha)$ τυχαία δυαδικά ψηφία, και έχει πιθανότητα λάθους $2^{-\gamma}$, για κάθε ακέραιο $\gamma \geq 1$.

Απόδειξη. Η απόδειξη του πορίσματος είναι παρόμοια με αυτή του Θεωρήματος 6.2, με εξαίρεση τα βήματα (2) και (5), Στο βήμα (2), δεν απαιτείται πλέον να κατασκευάσουμε ολόκληρο το γράφημα-επεκτατή G και να υπολογίσουμε όλες τις τιμές της συνάρτησης F. Με αυτό τον τρόπο, ελαττώνουμε τη χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου $\tilde{A}$ κατά ένα αθροιστικό παράγοντα $\mathcal{O}(\mathrm{poly}(N) + T_F(N))$. Στο βήμα (5), το σύνολο W_2 αποτελείται από την ένωση των συνόλων επιτυχίας υπό συνθήκη, τα οποία κατασκευάζονται για κάθε $s \in W_1$. Επειδή $|W_1| = \mathcal{O}(\gamma\alpha)$, ο πληθάριθμος του W_2 είναι $\mathcal{O}(\gamma\alpha g)$. Τέλος, η Υπόθεση 6.3 συνεπάγεται ότι το σύνολο W_2 μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο $\mathcal{O}\big(\gamma\alpha T_W(2^{\hat{r}(n)})\big)$. □

6.3 Μείωση Τυχαιότητας και $\mathcal{PCP}$s

Στην Ενότητα 1.4 ορίσαμε τα συστήματα Πιθανοτικά Ελέγξιμων Αποδείξεων και παρουσιάσαμε τις βασικές ιδέες, τα σημαντικότερα πρόσφατα αποτελέσματα, και τις εφαρμογές τους στην απόδειξη αποτελεσμάτων μη-προσεγγισιμότητας για $\mathcal{NP}$-δύσκολα προβλήματα βελτιστοποίησης. Εδώ θα εφαρμόσουμε τις τεχνικές που αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες ενότητες σε $\mathcal{PCP}$ συστήματα για την κλάση $\mathcal{NP}$. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν αποτελούν ασφαλή ένδειξη για την πολυπλοκότητα της κατασκευής συνόλων επιτυχίας και συνόλων επιτυχίας υπό συνθήκη για αυθαίρετα πιθανοτικά συστήματα. Μια διαφορετική ερμηνεία είναι η σύνδεση της πολυπλοκότητας ντετερμινιστικού χρόνου της κλάσης $\mathcal{NP}$ με την αποτελεσματικότητα τέτοιου είδους τεχνικών για μείωση της τυχαιότητας.

Η ιδέα της χρήσης τυχαίων περιπάτων σε γραφήματα-επεκτατές για μείωση της τυχαιότητας πιθανοτικών συστημάτων απλής κατεύθυνσης λάθους προτάθηκε στην [52], όπου χρησιμοποιήθηκε για να αποδειχθεί ότι, αν η κλάση $\mathcal{NP}$ περιέχεται στην κλάση $\mathcal{PCP}(\mathrm{poly}(\mathrm{loglog}\, n), \mathrm{poly}(\mathrm{loglog}\, n))$, τότε περιέχεται και στην κλάση $\mathcal{DTIME}\big(n^{\mathrm{poly}(\mathrm{loglog}\, n)}\big)$, συμπεραίνοντας ότι $\mathrm{poly}(\mathrm{loglog}\, n)$ τυχαία δυαδικά ψηφία δεν αρκούν για τον πιθανοτικό έλεγχο γλωσσών που είναι πλήρεις για το $\mathcal{NP}$. Η απόδειξη χρησιμοποιεί το Θεώρημα 6.1 και τεχνικές υποθέσεις που αφορούν την κωδικοποίηση και το είδος της σύνθεσης επαληθευτών που ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να χρησιμοποιεί. Λίγο αργότερα, ο Trevisan [128] επισήμανε ότι με χρήση αυτο-αναγωγής είναι δυνατόν να αποδειχθούν ισχυρότερα αποτελέσματα με ευκολότερο τρόπο (επίσης βλ. [13]). Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι, αν $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{PCP}(\mathrm{o}(\log n), \mathrm{o}(\log n))$, τότε $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. Επομένως, αν το Θεώρημα 6.1 μπορεί να εφαρμοστεί για κάποιο α, τέτοιο ώστε $\frac{\log n}{\alpha} = \mathrm{o}(\log n)$, σε κάποιο $\mathcal{PCP}$ σύστημα για μια $\mathcal{NP}$-πλήρη γλώσσα, τότε $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Θεώρημα 6.3. *Οι σχέσεις $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{PCP}(\mathrm{o}(\log n), \mathrm{o}(\log n))$ και $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ είναι ισοδύναμες.*

Απόδειξη. Προφανώς αν $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, τότε το $\mathcal{NP}$ περιλαμβάνεται στην κλάση $\mathcal{PCP}(0, 0)$, αφού κάθε γλώσσα στο $\mathcal{P}$ μπορεί να αποφασισθεί σε ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο, χωρίς να απαιτείται πρόσβαση σε κάποια απόδειξη. Επομένως, μένει να δείξουμε ότι αν $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{PCP}(\mathrm{o}(\log n), \mathrm{o}(\log n))$, τότε κάθε γλώσσα $L \in \mathcal{NP}$ μπορεί να αποφασισθεί σε ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο. Η απόδειξη βασίζεται στο παρακάτω τεχνικό λήμμα. Το λήμμα αυτό παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στην [12], και σε αυτή την αναγωγή βασίστηκε η απόδειξη ότι δεν υπάρχουν Σχήματα Προσέγγισης Πολυωνυμικού Χρόνου για τα MAX-SNP-δύσκολα προβλήματα. Εδώ αποδεικνύουμε το λήμμα για λόγους πληρότητας.

Λήμμα 6.4 [12]. *Έστωσαν L μια οποιαδήποτε γλώσσα και V ένας $(r(n), q(n))$ περιορισμένος επαληθευτής για την L. Για κάθε είσοδο x, $|x| = n$, υπάρχει μια λογική πρόταση με $\mathcal{O}\big(2^{\hat{r}(n)}\hat{q}(n)\big)$ μεταβλητές, η οποία είναι ικανοποιήσιμη ανν το $x \in L$.*

Απόδειξη. Για κάθε συμβολοσειρά x, $|x| = n$, θα χρησιμοποιήσουμε τον επαληθευτή V για να κατασκευάσουμε μια λογική πρόταση B_x που είναι ικανοποιήσιμη ανν $x \in L$.

Για κάθε θέση της απόδειξης π, την οποία εξετάζει ο επαληθευτής V, εισάγουμε μια λογική μεταβλητή. Οι τιμές TRUE και FALSE της μεταβλητής αντιστοιχούν στις τιμές 1 και 0 του δυαδικού ψηφίου της συγκεκριμένης θέσης της απόδειξης π. Η λογική πρόταση B_x κατασκευάζεται από αυτές τις μεταβλητές ως εξής:

- Για κάθε διαφορετική τυχαία συμβολοσειρά r, έστω B_r η λογική πρόταση που περιγράφει τις αποδείξεις οι οποίες γίνονται αποδεκτές από τον V με είσοδο x. Επειδή ο V διαβάζει μόνο $\hat{q}(n)$ δυαδικά ψηφία από την απόδειξη, η πρόταση B_r έχει $\mathcal{O}(\hat{q}(n))$ μεταβλητές. Επίσης, αφού $|r| = \hat{r}(n)$, υπάρχουν το πολύ $2^{\hat{r}(n)}$ διαφορετικές προτάσεις B_r.

- Η λογική πρόταση B_x αποτελείται από τη σύζευξη όλων των διαφορετικών B_r. Αφού κάθε πρόταση B_r έχει $\mathcal{O}(\hat{q}(n))$ μεταβλητές, και υπάρχουν το πολύ $2^{\hat{r}(n)}$ διαφορετικές προτάσεις B_r, η πρόταση B_x έχει $\mathcal{O}\big(2^{\hat{r}(n)}\hat{q}(n)\big)$ μεταβλητές.

Από τον Ορισμό 1.1 της κλάσης $\mathcal{PCP}$, αν $x \in L$, τότε υπάρχει μία απόδειξη π_x η οποία γίνεται δεκτή από τον V με πιθανότητα 1. Δηλαδή αυτή η απόδειξη επαληθεύει κάθε πρόταση B_r, και επομένως η πρόταση B_x είναι ικανοποιήσιμη. Αντιστρόφως, αν η πρόταση B_x είναι ικανοποιήσιμη, τότε κάθε ανάθεση αλήθειας που την ικανοποιεί υποδεικνύει μια οικογένεια αποδείξεων π που γίνονται αποδεκτές από τον V με πιθανότητα 1. Επομένως, $x \in L$. □

Έστω μια οποιαδήποτε γλώσσα $L \in \mathcal{NP}$. Αν υπάρχει ένας $(\mathrm{o}(\log n), \mathrm{o}(\log n))$ περιορισμένος επαληθευτής V για την L, μπορούμε, για κάθε είσοδο x, $|x| = n$, να εφαρμόσουμε το Λήμμα 6.4 για να φτιάξουμε μια λογική πρόταση B_x. Η B_x θα περιέχει $\mathcal{O}\big(2^{\mathrm{o}(\log n)}\mathrm{o}(\log n)\big)$ μεταβλητές. Επίσης, αφού ο επαληθευτής V λειτουργεί σε πολυωνυμικό χρόνο και κάθε πρόταση B_r αποτελείται από $\mathrm{o}(\log n)$ μεταβλητές, το συνολικό μέγεθος της B_x θα είναι $\mathcal{O}\big(2^{\mathrm{o}(\log n)}\big)$.

Επομένως, θα υπάρχει μια σταθερά $c \geq 1$, ώστε το μέγεθος της πρότασης B_x να είναι

$$|B_x| = \mathcal{O}\left(2^{(\log n)^{\frac{c}{c+1}}}\right) .$$

Επειδή είναι

$$2^{(\log n)^{\frac{c}{c+1}}} = n^{(\log n)^{-\frac{1}{c+1}}} ,$$

για αρκούντως μεγάλο n, π.χ. $n \geq 2^{2^{c+1}}$, το μέγεθος της B_x είναι το πολύ $\sqrt{n}$.

Προφανώς, το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας μιας λογικής πρότασης B_x είναι πλήρες για την κλάση $\mathcal{NP}$, αφού αποτελεί γενίκευση του πρβλήματος της Ικανοποιησιμότητας (SAT), και κάθε δεδομένη ανάθεση αληθείας μπορεί να ελεγχθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Επομένως, υπάρχει ένας $(\mathrm{o}(\log |B_x|), \mathrm{o}(\log |B_x|))$ περιορισμένος επαληθευτής V' για το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας της πρότασης B_x. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 6.4 μπορούμε να κατασκευάσουμε μια νέα λογική πρόταση B_{B_x} η οποία θα έχει μέγεθος το πολύ $\sqrt{|B_x|} = n^{1/4}$ και θα είναι ικανοποιήσιμη ανν η B_x είναι ικανοποιήσιμη, δηλαδή ανν το $x \in L$.

Κάθε φορά που επαναλαμβάνεται η παραπάνω αυτό-αναγωγή θα παράγει μια λογική πρόταση με μέγεθος ίσο με την τετραγωνική ρίζα του μεγέθους της πρότασης εισόδου. Επομένως, εφαρμόζοντας αυτή τη μέθοδο $\mathcal{O}(\log\log n)$ φορές, θα καταλήξουμε με μια λογική πρόταση $\widehat{B}$ η οποία θα έχει μέγεθος $\mathcal{O}(\log n)$ και θα είναι ικανοποιήσιμη ανν το $x \in L$. Επειδή η παραπάνω αναγωγή μπορεί να υλοποιηθεί σε ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο, μπορούμε να αποφασίσουμε αν το $x \in L$ σε ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο. Συνεπώς, αν $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{PCP}(\mathrm{o}(\log n), \mathrm{o}(\log n))$, τότε $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. □

6.3.1 Η Πολυπλοκότητα Υπολογισμού Συνόλων Επιτυχίας

Σε αυτή την ενότητα εφαρμόζουμε το Πόρισμα 6.1 σε συστήματα Πιθανοτικά Ελέγξιμων Αποδείξεων για την κλάση $\mathcal{NP}$ δείχνοντας ότι για ένα μεγάλο εύρος παραμέτρων, η πολυπλοκότητα υπολογισμού συνόλων επιτυχίας υπό συνθήκη για αυθαίρετα πιθανοτικά συστήματα φράσσει άνω την πολυπλοκότητα ντετερμινιστικού χρόνο ολόκληρης της κλάσης $\mathcal{NP}$. Η ύπαρξη $\mathcal{PCP}$ συστημάτων για την κλάση $\mathcal{NP}$ που χρησιμοποιούν λογαριθμική τυχαιότητα (π.χ. [12, 6, 21, 125]) συνεπάγεται ότι τα μεγέθη των γραφημάτων-επεκτατών και των συνόλων επιτυχίας είναι πολυωνυμικά στο μέγεθος της εισόδου.

Η παρακάτω πρόταση υποδεικνύει ότι η Υπόθεση 6.3 δεν μπορεί να ισχύει για αυθαίρετες οικογένειες συνόλων "παραπλανητικών" συμβολοσειρών $\mathcal{C}$, ακόμα και για σύνολα S με μέγεθος πολυωνυμικό στο μέγεθος της εισόδου.

Θεώρημα 6.4. *Αν η Υπόθεση 6.3 ισχύει με παραμέτρους (α, g) για όλες τις οικογένειες συνόλων "παραπλανητικών" συμβολοσειρών $\mathcal{C}$, οι οποίες περιέχουν στοιχεία $C \in \mathcal{C}$ πολυωνυμικού μεγέθους, τότε υπάρχουν σταθερές $\rho, \mu > 1$, τέτοιες ώστε*

$$\text{3-SAT} \in \mathcal{DTIME}\left(2^{2^{\mathcal{O}(\alpha)} n^{\rho/\alpha} \mu g} + \alpha g \,\mathrm{poly}(n) + \alpha T_W(n^\rho)\right) \ .$$

Απόδειξη. Για κατάλληλα επιλεγμένες σταθερές ρ, μ, ϵ, έστω V ένας πολυωνυμικός περιορισμένος επαληθευτής για το πρόβλημα της 3-Ικανοποιησιμότητας (3-SAT), ο οποίος χρησιμοποιεί $\rho \log n$ τυχαία δυαδικά ψηφία, διαβάζει μ δυαδικά ψηφία από την απόδειξη, και έχει πιθανότητα λάθους $0 < \epsilon \leq \frac{1}{4}$. Προφανώς $|S| = n^\rho$. Έστω ότι η Υπόθεση 6.3 ισχύει με παραμέτρους (α, g) για κάθε οικογένεια συνόλων "παραπλανητικών" συμβολοσειρών $\mathcal{C}$ με πολυωνυμικό μέγεθος στοιχείων $C \in \mathcal{C}$. Τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 6.1 στον επαληθευτή V και να καταλήξουμε με έναν επαληθευτή $\tilde{V}$ για το 3-SAT, ο οποίος χρησιμοποιεί το πολύ $\frac{\rho}{\alpha} \log n + \mathcal{O}(\alpha)$ τυχαία δυαδικά ψηφία, και διαβάζει το πολύ $\mathcal{O}(\alpha \mu g)$ δυαδικά ψηφία από την απόδειξη. Από την Υπόθεση 6.3 και το Πόρισμα 6.1 συνάγεται ότι ο επαληθευτής $\tilde{V}$ εκτελείται σε χρόνο $\mathcal{O}(\alpha g \,\mathrm{poly}(n) + \alpha T_W(n^\rho)))$.

Επομένως, δεδομένου ενός στιγμιότυπου x του προβλήματος 3-SAT, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 6.4 στον επαληθευτή $\tilde{V}$, και να ανάγουμε την ικανοποιησιμότητα του x στην ικανοποιησιμότητα μιας λογικής πρότασης B_x με $\mathcal{O}(2^{\mathcal{O}(\alpha)} n^{\rho/\alpha} \mu g)$ μεταβλητές. □

Πόρισμα 6.2. *Για κάθε $g = \mathrm{o}(n)$, υπάρχει μια σταθερά $\alpha_g^\star$ τέτοια ώστε, για κάθε $\alpha \geq \alpha_g^\star$, η Υπόθεση 6.3 δεν ισχύει για παραμέτρους (α, g) για όλες τις οικογένειες $\mathcal{C}$, εκτός αν*

$$\mathcal{NP} \in \mathcal{DTIME}\left(2^{\mathrm{o}(n)} + \mathrm{poly}(n) + T_W(n^\rho)\right) \ .$$

Απόδειξη. Για κάθε γλώσσα L στο $\mathcal{NP}$, υπάρχουν σταθερές ρ, μ, ϵ και ένας περιορισμένος επαληθευτής V πολυωνυμικού χρόνου, ο οποίος χρησιμοποιεί $\rho \log n$ τυχαία δυαδικά ψηφία, διαβάζει μ δυαδικά ψηφία από την απόδειξη, και έχει πιθανότητα λάθους ϵ. Έστω ότι η Υπόθεση 6.3 ισχύει με παραμέτρους $g = \mathrm{o}(n)$ και $\alpha = \kappa\rho$, για κάθε $\kappa \geq 1$. Τότε, η εφαρμογή του Πορίσματος 6.3 στον επαληθευτή V συνεπάγεται την ύπαρξη ενός επαληθευτή $\tilde{V}$ για τη γλώσσα L, ο οποίος χρησιμοποιεί το πολύ $\frac{\log n}{\kappa} + \mathcal{O}(\kappa\rho)$ τυχαία δυαδικά ψηφία, και διαβάζει $\mathcal{O}(\kappa\rho\mu g)$ δυαδικά ψηφία από την απόδειξη. Επιπλέον, ο επαληθευτής $\tilde{V}$ εκτελείται σε χρόνο $\mathcal{O}(\mathrm{poly}(n) + T_W(n^\rho))$.

Επομένως, αν για κάποιο $g = \mathrm{o}(n)$, η Υπόθεση 6.3 ισχύει για κάθε $\alpha \geq 1$, τότε, δεδομένης μιας εισόδου x, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 6.4 στον επαληθευτή $\tilde{V}$, και να ανάγουμε το πρόβλημα του $x \in L$ στην ικανοποιησιμότητα μιας λογικής πρότασης B_x με $\mathrm{o}(n)$ μεταβλητές. □

6.4 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο, διατυπώθηκαν γενικές επαρκείς συνθήκες για τη μείωση της τυχαιότητας πιθανοτικών αλγορίθμων με απλή κατεύθυνση λάθους. Όλες οι συνθήκες βασίζονται στην χρήση τυχαίων περιπάτων σε γραφήματα-επεκτατές για τη δημιουργία μεγάλων ψευδο-τυχαίων ακολουθιών. Η τεχνική αυτή έχει χρησιμοποιηθεί μέχρι τώρα (π.χ. [1, 31, 87, 20, 113]) με γραφήματα-επεκτατές εκθετικού μεγέθους στον αριθμό των τυχαίων δυαδικών ψηφίων που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος. Με αυτό τον τρόπο μπορεί να δειχθούν αποτελέσματα ενίσχυσης πιθανότητας. Για την διατύπωση συνθηκών μείωσης τυχαιότητας χρησιμοποιήσαμε για πρώτη φορά γραφήματα-επεκτατές με υπο-εκθετικό μέγεθος στον αριθμό των τυχαίων δυαδικών ψηφίων που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος.

Αποδείξαμε ότι με αυτή την τεχνική μπορούμε να αποφύγουμε ένα υποσύνολο C_1 των "παραπλανητικών" συμβολοσειρών που εκφράζεται σαν συνδυαστικό ορθογώνιο συγκεκριμένης διάστασης. Η μείωση της τυχαιότητας είναι ανάλογη με τη διάσταση του συνδυαστικού ορθογωνίου. Έχοντας υπολογίσει μερικές συμβολοσειρές $s \notin C_1$, είναι εύλογο να τις χρησιμοποιήσουμε για να αποφύγουμε ολόκληρο το σύνολο των "παραπλανητικών" συμβολοσειρών C. Με αυτό τον τρόπο οδηγούμαστε στην έννοια των συνόλων επιτυχίας υπό συνθήκη, τα οποία χρησιμοποιούν κάποιο $s \notin C_1$, για να αποφύγουν ολόκληρο το C.

Ένα ζήτημα προς διερεύνηση είναι κατά πόσο τα σύνολα επιτυχίας υπό συνθήκη είναι ισοδύναμα με τα συνηθισμένα σύνολα επιτυχίας. Δηλαδή, τίθεται το ερώτημα, δεδομένου ενός πιθανοτικού αλγορίθμου απλής κατεύθυνσης λάθους A, αν υπάρχει ένα $C_1 \subseteq C$, ώστε η ύπαρξη κάποιων συμβολοσειρών που δεν ανήκουν στο C_1 να βοηθάει στην κατασκευή κάποιων συμβολοσειρών που δεν ανήκουν στο C. Οι δύο ενδεχόμενες απαντήσεις σε αυτό το ερώτημα αντανακλούν σε δύο συμπληρωματικές ερευνητικές κατευθύνσεις.

Η πρώτη κατεύθυνση είναι ο προσδιορισμός της δομής των υποσυνόλων C_1, για τα οποία η κατασκευή ενός συνόλου επιτυχίας υπό συνθήκη για το C είναι ευκολότερη από την κατασκευή ενός απλού συνόλου επιτυχίας. Κάτι τέτοιο σημαίνει ότι, για το συγκεκριμένο ορισμό του C_1, η πληροφορία $s \notin C_1$ είναι σημαντική στην προσπάθεια αποφυγής ολόκληρου του C.

Η άλλη ερευνητική κατεύθυνση είναι να αποδειχθεί ότι, ανεξάρτητα από τον ορισμό του C_1, η πληροφορία $s \notin C_1$, δεν παρέχει καμία βοήθεια στην αποφυγή του C. Δηλαδή, για κάθε $C_1 \subseteq C$, η παροχή ενός χρησμού (oracle) που αποφεύγει το C_1 δεν μειώνει την πολυπλοκότητα της αποφυγής του C. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε ορισμό του $C_1 \subseteq C$, η ύπαρξη μιας Γεννήτριας Συνόλων Επιτυχίας υπό Συνθήκη (ΓΣΕΣ) συνεπάγεται την ύπαρξη μιας Γεννήτριας Συνόλων Επιτυχίας (ΓΣΕ) με την ίδια πολυπλοκότητα.

Βιβλιογραφία

[1] M. Ajtai, J. Komlós, and E. Szemerédi. Deterministic simulation in logspace. *Proc. of the 19th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 132–140, 1987.

[2] S.M. Allen, D.H. Smith, and S. Hurley. Lower Bounding Techniques for Frequency Assignment. Submitted to *Discrete Mathematics*, 1997.

[3] A. Andreev, A. Clementi, and J. Rolim. Hitting Sets Derandomize $\mathcal{BPP}$. *Proc. of the 23rd International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, pp. 357–368, 1996.

[4] A. Andreev, A. Clementi, J. Rolim, and L. Trevisan. Weak Random Sources, Hitting Sets, and $\mathcal{BPP}$ Simulations. *Proc. of the 38th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 264–272, 1997.

[5] D. Angluin and L.G. Valiant. Fast Probabilistic Algorithms for Hamiltonian Circuits and Matchings. *Journal of Computer and System Sciences* **18**, pp. 155 – 193, 1979.

[6] S. Arora. *Probabilistic Checking of Proofs and Hardness of Approximation Problems.* PhD Thesis, UC Berkeley, 1994.

[7] S. Arora. Polynomial Time Approximation Schemes for Euclidean TSP and Other Geometric Problems. *Proc. of the 37th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 2–12, 1996.

[8] S. Arora. The Approximability of $\mathcal{NP}$-hard problems. *Proc. of the 30th ACM Symposium on Theory of Computing*, 1998.

[9] S. Arora, A. Frieze, and H. Kaplan. New Rounding Procedure for the Assignment Problem with Applications to Dense Graph Arrangement Problems. *Proc. of the 37th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 21–30, 1996.

[10] S. Arora, M. Grigni, D. Karger, P. Klein, and A. Woloszyn. Polynomial Time Approximation Scheme for Weighted Planar Graph TSP. *Proc. of the 9th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 1998.

[11] S. Arora, D. Karger, and M. Karpinski. Polynomial Time Approximation Schemes for Dense Instances of $\mathcal{NP}$-Hard Problems. *Proc. of the 27th ACM Symposium on Theory of Computing*, 1995.

[12] S. Arora, C. Lund, R. Motwani, M. Sudan, and M. Szegedy. Proof Verification and Hardness of Approximation Problems. *Proc. of the 33rd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 14–23, 1992.

[13] S. Arora and S. Safra. Probabilistic Checking of Proofs: A New Characterization of $\mathcal{NP}$. *Proc. of the 33rd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 2–13, 1992.

[14] J. Aspnes, Y. Azar, A. Fiat, S. Plotkin, and O. Waarts. On-line Machine Scheduling with Applications to Load Balancing and Virtual Circuit Routing. *Proc. of the 25th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 623–631, 1993.

[15] S.F. Assmann, D.S. Johnson, D.J. Kleitman, and J.Y.-T. Leung. On a Dual Version of the One-Dimensional Bin Packing Problem. *Journal of Algorithms* **5**, pp. 502–525, 1984.

[16] Y. Aumann and Y. Rabani. An $\mathcal{O}(\log \kappa)$-Approximate Min-Cut Max-Flow Theorem and Approximation Algorithms. *SIAM Journal on Computing*, 1995.

[17] B. Awerbuch, Y. Azar, and S. Plotkin. Throughput Competitive On-line Routing. *Proc. of the 34th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 32–40, 1993.

[18] L. Babai. Trading Group Theory for Randomness. *Proc. of the 17th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 421–429, 1985.

[19] L. Babai, L. Fortnow, L. Levin, and M. Szegedy. Checking Computations in Polylogarithmic Time. *Proc. of the 23th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 21–31, 1991.

[20] M. Bellare, O. Goldreich, and S. Goldwasser. Randomness in Interactive Proofs. *Computational Complexity* **3**, pp. 319–354, 1993.

[21] M. Bellare, O. Goldreich, and M. Sudan. Free Bits, $\mathcal{PCP}$s and Non-Approximability—Towards Tight Results (3rd Version). Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC), Technical Report 95-024, 1995.

[22] S. Ben-David, A. Borodin, R. Karp, G. Tardos, and A. Widgerson. On the Power of Randomized On-line Algorithms. *Proc. of the 22nd Symposium on Theory of Computing*, pp. 379–386, 1990.

[23] C. Berge. *Graphs (2nd Edition)*. North Holland, 1985.

[24] A. Blum, G. Konjevod, R. Ravi, and S. Vempala. Semi-Definite Relaxations for Minimum Bandwidth and Other Problems. *Proc. of the 30th ACM Symposium on Theory of Computing*, 1998.

[25] M. Blum and S. Kannan. Designing Programs that Check their Work. *Proc. 21st ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 86–97, 1989.

[26] M. Blum and S. Micali. How to Generate Cryptographically Strong Sequences of Pseudo-Random Bits. *SIAM Journal on Computing* **13**, pp. 850–864, 1984.

[27] A. Borodin and R. El-Yaniv. *On-line Computation and Competitive Analysis*. Cambridge University Press, 1998.

[28] A. Borodin, N. Linial, M. Saks. An Optimal On-line Algorithm for Metrical Task Systems. *Journal of the Association for Computing Machinery* **39**(4), pp. 745–763, 1992.

[29] B. Chor and O. Goldreich. Unbiased Bits from Sources of Weak Randomness and Probabilistic Communication Complexity. *SIAM Journal of Computing* **17**(2), pp. 230–261, 1988.

[30] N. Christofides. Worst-Case Analysis of a New Heuristic for the Travelling Salesman Problem. J.F. Traub (Ed.) *Symposium on New Directions and Recent Results in Algorithms and Complexity*, p. 441, 1976.

[31] A. Cohen and A. Widgerson. Dispersers, Deterministic Amplification, and Weak Random Sources. *Proc. of the 30th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 14–19, 1989.

[32] A. Condon, H. Edelsbrunner, E.A. Emerson, L. Fortnow, S. Haber, R. Karp, D. Leivant, R. Lipton, N. Lynch, I. Parberry, C. Papadimitriou, M. Rabin, A. Rosenberg, J.S. Royer, J. Savage, A.L. Selman, C. Smith, E. Tardos, J. Vitter. *Challenges for Theory of Computing*. Report of an NSF-Sponsored Workshop on Research in Theoretical Computer Science, April 1999.

[33] S.A. Cook. The Complexity of Theorem-Proving Procedures. *Proc. of the 3rd ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 151–158, 1971.

[34] N. Creignou. A Dichotomy Theorem for Maximum Generalized Satisfiability Problems. *Journal of Computer and System Sciences* **51**(3), pp. 511–522, 1995.

[35] P. Crescenzi and V. Kann. A Compendium of $\mathcal{NP}$ Optimization problems. Διαθέσιμο από `ftp://www.nada.kth.se/Theory/Viggo-Kann/compendium.ps.Z`, 1999.

[36] P. Crescenzi, V. Kann, R. Silvestri, and L. Trevisan. Structure in Approximation classes. *Proc. of the 1st Combinatorics and Computing Conference*, pp. 539–548, LNCS 959, Springer-Verlag, 1995.

[37] P. Crescenzi and A. Panconesi. Completeness in Approximation Classes. *Information and Computation* **93**, pp. 241–262, 1991.

[38] W.H. Cunningham and Y. Wang. Restricted 2-Factor Polytopes. Διαθέσιμο από `http://math.uwaterloo.ca/%7Ewhcunnin/preprint.html`, 1997.

[39] J. Díaz, M.J. Serna, P. Spirakis, and J. Torán. *Paradigms for Fast Parallel Approximability.* Cambridge University Press, 1997.

[40] L. Engebretsen. An Explicit Lower Bound for TSP with Distances One and Two. Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC), Technical Report 98-046, 1998. Επίσης έχει γίνει αποδεκτό στο STACS 1999.

[41] G. Even, J. Naor, S. Rao, and B. Schieber. Divide-and-Conquer Approximation Algorithms via Spreading Metrics. *Proc. of the 36th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 62–71, 1995.

[42] G. Even, J. Naor, B. Schieber, and M. Sudan. Approximating Minimum Feedback Sets and Multi-Cuts in Directed Graphs. *Proc. of the Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization* (IPCO), pp. 14–28, 1995.

[43] U. Feige. A Threshold of $\ln n$ for Approximating Set Cover. *Proc. of the 28th ACM Symposium on the Theory of Computing*, pp. 314–318, 1996.

[44] U. Feige. Approximating the Bandwidth via Volume Respecting Embeddings. *Proc. of the 30th ACM Symposium on Theory of Computing*, 1998.

[45] U. Feige, S. Goldwasser, L. Lovász, S. Safra, and M. Szegedy. Approximating clique is almost $\mathcal{NP}$–complete. *Proc. of the 32nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 2–12, 1991.

[46] U. Feige and J. Kilian. Impossibility Results for Recycling Random Bits in Two-Prover Proof Systems. *Proc. of the 27th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 457–468, 1995.

[47] U. Feige and J. Kilian. Zero Knowledge and the Chromatic Number. *Proc. of the 11th IEEE Conference on Complexity Theory*, 1996.

[48] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. John Wiley, 1968.

[49] W. Fernandez de la Vega and M. Karpinski. On Approximation Hardness of Dense TSP and other Path Problems. Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC), Technical Report 98-024, 1998.

[50] A. Fiat and G. Woenginger. *On-line Algorithms: The State of the Art*, Springer-Verlag, 1998.

[51] D. Fotakis, G. Pantziou, G. Pentaris, and P. Spirakis. Frequency Assignment in Mobile and Radio Networks. *M. Mavronicolas, M. Merritt, and N. Shavit (Eds.). Networks in Distributed Computing.* DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science **45**, pp. 73–90, American Mathematical Society, 1999. Επίσης έγινε αποδεκτή και παρουσιάστηκε στο School and Workshop on On-line Algorithms – OLA, Udine, Italy, 1998.

[52] D. Fotakis and P. Spirakis. $(\mathrm{poly}(\log\log n), \mathrm{poly}(\log\log n))$-Restricted Verifiers are Unlikely to Exist for Languages in $\mathcal{NP}$. *Proc. of the 21st Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science* (MFCS '96), LNCS 1113, pp. 360–371, Springer-Verlag, 1996.

[53] D. Fotakis and P. Spirakis. Random Walks, Conditional Hitting Sets and Partial Derandomization. Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC), Technical Report 98-049, 1998.

[54] D. Fotakis and P. Spirakis. Graph Properties that Facilitate Travelling. Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC), Technical Report 98-031, 1998.

[55] D. Fotakis and P. Spirakis. Assignment of Reusable and Non-Reusable Frequencies. *P.M. Pardalos, A. Migdalas, and R. Burkard (Eds.), Combinatorial and Global Optimization.* World Scientific Publishing Co., 1998.

[56] D. Fotakis and P. Spirakis. A Hamiltonian Approach to the Assignment of Non-Reusable Frequencies. *Proc. of the 18th Conference on the Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science*, LNCS 1530, pp. 18–29, Springer-Verlag, 1998.

[57] D. Fotakis and P. Spirakis. Machine Partitioning and Scheduling under Fault-Tolerance Constraints. *P.M. Pardalos (Ed.), Approximation and Complexity in Numerical Optimization: Continuous and Discrete Problems*, Kluwer Academic Publishers, 1999.

[58] D. Fotakis and P. Spirakis. Efficient Redundant Assignments under Fault-Tolerance Constraints. Έχει υποβληθεί για δημοσίευση, 1999.

[59] A. Frieze and R. Kannan. The Regularity Lemma and Approximation Schemes for Dense Problems. *Proc. of the 37th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 12–20, 1996.

[60] O. Gabber and Z. Galil. Explicit Constructions of Linear–Sized Superconcentrators. *Journal of Computer and System Sciences* **22**, pp. 407–420, 1981.

[61] M.R. Garey, R.L. Graham, and J.D. Ullman. Worst Case Analysis of Memory Allocation Algorithms. *Proc. of the 4th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 143–150, 1972.

[62] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of $\mathcal{NP}$- Completeness.* Freeman, San Francisco, 1979.

[63] N. Garg, V. Vazirani, and M. Yannakakis. Approximate Max-Flow Min-(Multi)-Cut Theorems and their Applications. *Proc. of the 25th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 698–707, 1993.

[64] L. Gasieniec, E. Kranakis, D. Krizanc, A. Pelc. Minimizing Congestion of Layouts for ATM Networks with Faulty Links. *Proc. of the 21th Mathematical Foundations of Computer Science*, pp. 372–381, 1996.

[65] A. Gibbons and W. Rytter. *Efficient Parallel Algorithms.* Cambridge University Press, 1988.

[66] M. Goemans. Worst-case Comparison of Valid Inequalities for TSP. *Mathematical Programming* **69**, pp. 335-349, 1995.

[67] M. Goemans and D. Williamson. A 0.878-Approximation Algorithm for MAX-2SAT and MAX-CUT. *Proc. of the 26th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 422–431, 1994.

[68] O. Goldreich, S. Goldwasser and D. Ron. Property Testing and its Connection to Learning and Approximation. *Proc. of the 37th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 339–348, 1996.

[69] S. Goldwasser, S. Micali, and C. Rackoff. The Knowledge Complexity of Interactive Proofs. *SIAM Journal on Computing* **18**, pp. 186–208, 1989.

[70] R.A.H. Gower and R.A. Leese. The Sensitivity of Channel Assignment to Constraint Specification. *Proc. of the 12th International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, pp. 131–136, 1997.

[71] R.L. Graham. Bounds for Certain Multiprocessor Anomalies. *Bell System Technical Journal*, **45**, pp. 1563–1581, 1969.

[72] J. Griggs and D. Liu. Minimum Span Channel Assignments. To appear in *Recent Advances in Radio Channel Assignment.* Satelite Symposium to 9th SIAM Conference on Discrete Mathematics, July 1998.

[73] M. Grigni, E. Koutsoupias, and C.H. Papadimitriou. An Approximation Scheme for Planar TSP. *Proc. of the 36th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 640–645, 1995.

[74] W.K. Hale. Frequency Assignment: Theory and Applications. *Proceedings of the IEEE* **68**(12), pp. 1497–1514, 1980.

[75] M. Halldórsson. A Still Better Performance Guarantee for Approximate Graph Coloring. *Information Processing Letters* **45**, pp. 19–23, 1993.

[76] F. Harary. *Graph Theory.* Addison-Wesley, 1969.

[77] F. Harary. Προσωπική Επικοινωνία. 1997.

[78] D.B. Hartvigsen. *Extensions of Matching Theory.* PhD Thesis, Carnegie-Mellon University, 1984.

[79] J. Hastad. Clique is Hard to Approximate within $n^{1-\epsilon}$. *Proc. of the 37th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 627–636, 1996.

[80] J. Hastad. Some Optimal Inapproximability Results. *Proc. of the 28th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 1–10, 1997.

[81] J. van den Heuvel, R.A. Leese, and M.A. Shepherd. Graph Labelling and Radio Channel Assignment. Διαθέσιμο από `http://www.maths.ox.ac.uk/users/gowerr/preprints.html`, 1996.

[82] D.S. Hochbaum (Ed.). *Approximation Algorithms for $\mathcal{NP}$-Hard Problems.* PWS Publishing, 1997.

[83] D. Hochbaum and D. Shmoys. Using Dual Approximation Algorithms for Scheduling Problems: Practical and Theoretical Results. *Journal of the Association for Computing Machinery* **34**(1), pp. 144–162, 1987.

[84] O.H. Ibarra and C.E. Kim. Fast Approximation Algorithms for the Knapsack and Sum of Subset Problems. *Journal of the Association for Computing Machinery* **22**, pp. 463–468, 1975.

[85] R. Impagliazzo. Using Hard Problems to Derandomize Algorithms: An Incomplete Survey. *Proc. of the 1st Symposium on Randomization and Approximation Techniques in Computer Science*, pp. 165–173, 1997.

[86] R. Impagliazzo and A. Widgerson. $\mathcal{P} = \mathcal{BPP}$ Unless $\mathcal{E}$ Has Subexponential Circuits: Derandomizing the XOR Lemma. *Proc. of the 29th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 220–229, 1997.

[87] R. Impagliazzo and D. Zuckerman. How to Recycle Random Bits. *Proc. of the 30th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 248–253, 1989.

[88] A. Israeli and Y. Shiloach. An Improved Algorithm for Maximal Matching. *Information Processing Letters* **33**, pp. 57–60, 1986.

[89] D.S. Johnson. Approximation Algorithms for Combinatorial Problems. *Journal of Computer and System Sciences*, **9**, pp. 256–278, 1974.

[90] B. Kalyanasundaram and K.R. Pruhs. Fault-Tolerant Scheduling. *Proc. of the 26th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 115–124, 1994.

[91] B. Kalyanasundaram and K.R. Pruhs. Fault-Tolerant Real-Time Scheduling. *Proc. of the 5th European Symposium on Algorithms*, pp. 296–307, 1997.

[92] D.R. Karger. A Randomized Fully Polynomial Time Approximation Scheme for the All Terminal Network Reliability Problem. *Proc. of the 27th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 11–17, 1995. Επίσης διαθέσιμο από `http://theory.lcs.mit.edu/karger/papers.html`.

[93] D. Karger, R. Motwani, and M. Sudan. Approximate Graph Coloring by Semidefinite Programming. *Proc. of the 35th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 2–13, 1994.

[94] H. Karloff and U. Zwick. A 7/8-Approximation Algorithm for MAX-3SAT ?. *Proc. of the 38th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 1997.

[95] N. Karmarkar and R.M. Karp. An Efficient Approximation Scheme for the One-Dimensional Bin-Packing Problem. *Proc. of the 23rd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 312–320, 1982.

[96] M. Karpinski. Polynomial Time Approximation Schemes for Some Dense Instances of $\mathcal{NP}$-hard Optimization Problems. *School and Workshop on Randomized Algorithms in Sequential, Parallel, and Distributed Computing*, October 1997. Επίσης *Proc. of the 1st Symposium on Randomization and Approximation Techniques in Computer Science*, pp. 1–14, 1997.

[97] S. Khanna, R. Motwani, M. Sudan, and U. Vazirani. On Syntactic versus Computational Views of Approximability. *Proc. of the 35th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 819–830, 1994.

[98] S. Khanna, M. Sudan, L. Trevisan. Constraint Satisfaction: The Approximability of Minimization Problems. *Proc. of the 12th IEEE Conference on Complexity Theory*, pp. 282–296, 1997.

[99] S. Khanna, M. Sudan, and D. Williamson. A Complete Classification of the Approximability of Maximization Problems Derived from Boolean Constraint Satisfaction. *Proc. of the 28th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 11–20, 1997.

[100] J. Kleinberg. Single-Source Unsplittable Flow. *Proc. of the 37th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 68–77, 1996.

[101] J. Kleinberg, Y. Rabani, E. Tardos. Allocating Bandwidth for Bursty Connections. *Proc. of the 29th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 664–673, 1997.

[102] S. Kolliopoulos and C. Stein. Improved Approximation Algorithms for Unsplittable Flow Problems. *Proc. of the 38th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 426–435, 1997.

[103] E. Koutsoupias and C. Papadimitriou. On the κ-Server Conjecture. *Journal of the Association for Computing Machinery* **42**(5), pp. 971–983, 1995.

[104] E. Lawler. Fast Approximation Algorithms for Knapsack Problems. *Mathematics of Operations Research* **4**, pp. 339–356, 1979.

[105] E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, and D.B. Shmoys. *The Travelling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization.* John Wiley, 1985.

[106] R.A. Leese. A Unified Approach to the Assignment of Radio Channels on a Regular Hexagonal Grid. To appear in *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 1997.

[107] N. Linial, E. London, and Y. Rabinovich. The Geometry of Graphs and Some of its Algorithmic Applications. *Combinatorica*, 1995.

[108] N. Linial, M. Luby, M. Sacks, and D. Zuckerman. Efficient Construction of a Small Hitting Set for Combinatorial Rectangles in High Dimension. *Proc. of the 25th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 258–267, 1993.

[109] M.V. Lomonosov. Bernoulli Scheme with Closure. *Problems of Information Transmission* **10**, pp. 73–81, 1974.

[110] C. Lund, L. Fortnow, H. Karloff, and N. Nisan. Algebraic Methods for Interactive Proof Systems. *Journal of the Association for Computing Machinery* **39** (4), pp. 859–868, 1992.

[111] C. Lund and M. Yannakakis. On the Hardness of Approximating Minimization Problems. *Journal of Association for Computing Machinery* **41**, pp. 960–981, 1994.

[112] C. Lund and M. Yannakakis. The Approximation of Maximum Subgraph problems. *Proc. of International Colloquium on Automata, Languages and Programming* (ICALP '93), pp. 40–51, 1993.

[113] R. Motwani and P. Raghavan. *Randomized Algorithms.* Cambridge University Press, New York, 1995.

[114] C.H. Papadimitriou. *Computational Complexity.* Addison-Wesley, 1994.

[115] C. Papadimitriou. Προσωπική Επικοινωνία, 1998.

[116] C.H. Papadimitriou and M. Yannakakis. Optimization, Approximation and Complexity Classes. *Journal of Computer and System Sciences* **43**, pp. 425–440, 1991.

[117] C.H. Papadimitriou and M. Yannakakis. The Traveling Salesman Problem with Distances One and Two. *Mathematics of Operations Research* **18**(1), pp. 1–11, 1993.

[118] J.F. Pekny and D.L. Miller. A Staged Primal-Dual Algorithm for Finding a Minimum Cost Perfect Two-Matching in an Undirected Graph. *ORSA Journal on Computing* **6**(1), pp. 68–81, 1994.

[119] A. Raychaudhuri. *Intersection Assignments, T-Colourings and Powers of Graphs.* PhD Thesis, Rutgers University, 1985.

[120] M. Sacks, A. Srinivasan, and S. Zhou. Explicit Dispersers with polylog Degree. *Proc. of the 27th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 479–488, 1995.

[121] S. Sahni and T. Gonzalez. $\mathcal{P}$-Complete Approximation Problems. *Journal of the Association for Computing Machinery* **23**, pp. 555–565, 1976.

[122] T.J. Schaefer. The Complexity of Satisfiability Problems. *Proc. of the 10th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 216–226, 1978.

[123] A. Shamir. $\mathcal{IP} = \mathcal{PSPACE}$. *Journal of the Association for Computing Machinery*, **39**(4), pp. 869–877, 1992.

[124] D. Sleator and R.E. Tarjan. Amortized Efficiency of List Update and Paging Rules. *Communications of the Association for Computing Machinery* **28**, pp. 202–208, 1985.

[125] M. Sudan. *Efficient Checking of Polynomials and Proofs, and the Hardness of Approximation Problems.* ACM Distinguished Theses Series, LNCS 1001, Springer-Verlag, 1996.

[126] R. Tan. Προσωπική Επικοινωνία. 1998.

[127] S. Toda and O. Watanabe. Polynomial-Time 1- Turing Reductions from $\#\mathcal{PH}$ to $\#\mathcal{P}$. *Theoretical Computer Science* **100**, pp. 205–221, 1992.

[128] L. Trevisan. Προσωπική Επικοινωνία. 1996.

[129] L.G. Valiant. The Complexity of Enumeration and Reliability Problems. *SIAM Journal on Computing,* **8**(3), pp. 410–421, 1979.

[130] A.C. Yao. Theory and Applications of Trapdoor Functions. *Proc. of the 23rd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 80–91, 1982.