Αναζήτηση Πρώτα σε Βάθος

Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Αναζήτηση Πρώτα σε Βάθος (ΑΠΒ - DFS)

- Εξερεύνηση νέων κορυφών με συνεχή απομάκρυνση από αρχική κορυφή.
- Επισκέπτομαι ανεξερεύνητη κορυφή u για πρώτη φορά.
  Εξερευνώ (με ίδιο τρόπο) όλους τους γείτονες της u πριν φύγω από u.
- **Αναδρομική διαδικασία!**

  DFS(κορυφή u)
    for κάθε κορυφή v γειτονική της u **do**
      if δεν έχω επισκεφθεί τη v προηγουμένως **then**
        σημείωσε ακμή (u, v); DFS(v);

- Τρία είδη κορυφών:
  - **Ανεξερεύνητες**: Δεν έχουμε επισκεφθεί.
  - **Υπο-εξέταση**: Έχουμε επισκεφθεί και εξερευνούμε γείτονες.
  - **Εξερευνημένες**: Ολοκληρώσαμε διαδικασία.
- Δάσος της ΑΠΒ: Ακυκλικό, κάθε κορυφή έχει μοναδικό πατέρα.
  Συνεκτικό γράφημα $\Rightarrow$ δέντρο με ρίζα αρχική κορυφή.

Υλοποίηση Αναζήτησης Πρώτα σε Βάθος

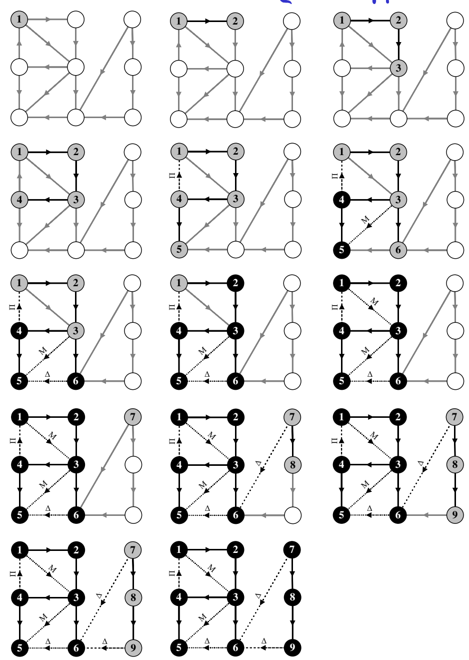
- **Πίνακας προγόνων**: $p[v]$ = πατέρας της v στο δάσος ΑΠΒ.
- **Πίνακας κατάστασης** : $m[v]$ = Ανεξ., ΥΕ, Εξ.
- Χρονική στιγμή **πρώτη επίσκεψης** $d[v]$.
- Χρονική στιγμή **αναχώρησης** $f[v]$.

DFS_Init($G(V, E)$)
  $t \leftarrow 0$;
  for all $v \in V$ **do**
    $m[v] \leftarrow$ Ανεξ; $p[v] \leftarrow$ NULL;
  for all $v \in V$ **do**
    if $m[v] =$ Ανεξ **then** DFS(v);

DFS(v)
  $m[v] \leftarrow$ ΥΕ; $d[v] \leftarrow$ ++t;
  for all $u \in L[v]$ **do**
    if $m[u] =$ Ανεξ **then**
      $p[u] \leftarrow v$; DFS(u);
  $m[v] \leftarrow$ Εξ; $f[v] \leftarrow$ ++t;

- Χρόνος εκτέλεσης: $\Theta(n + m)$.
- ΑΠΒ σε (α) δέντρο, (β) πλήρες γράφημα, (γ) κύκλο.

Παράδειγμα - Κατηγορίες Ακμών



- **Ακμές Δάσους/Δέντρου**:
  Εξερεύνηση (u, v) όταν v Ανεξερεύνητη.
- **Πίσω Ακμές**:
  Εξερεύνηση (u, v) όταν v Υπο-Εξέταση.
  Πίσω ακμή $\Rightarrow$ **Κύκλος**.
- **Μπρος Ακμές**:
  Εξερεύνηση (u, v) όταν v Εξερευνημένη και v απόγονος u στο δέντρο.
- **Ακμές Διασταύρωσης**:
  Εξερεύνηση (u, v) όταν v Εξερευνημένη v και όχι απόγονος u στο δέντρο.

Μερικές Ιδιότητες

- Αν γράφημα μη-κατευθυνόμενο, η ΑΠΒ υπολογίζει τις συνεκτικές συνιστώσες (το ίδιο κάνει και η ΑΠΠ).
- Αν v απόγονος της u στο δάσος της ΑΠΒ, $[d[v], f[v]] \subset [d[u], f[u]]$. Αν v όχι απόγονος της u στο δάσος της ΑΠΒ, $[d[v], f[v]] \cap [d[u], f[u]] = \emptyset$.
- Ένα (μη-)κατευθυνόμενο γράφημα είναι ακυκλικό ανν η ΑΠΒ δεν παράγει πίσω ακμές.

  Πίσω ακμή (u, v) εξερευνάται όταν v ΥΕ $\Rightarrow$ Μονοπάτι $v \to u$ και ακμή $(u, v) \Rightarrow$ κύκλος.
  Έστω κύκλος C, v πρώτη κορυφή C ΥΕ, και (u, v) η ακμή του C που εισέρχεται στη v.
  Κορυφή u απόγονος της v στο δέντρο της ΑΠΒ γιατί (α) $\exists$μονοπάτι $v \to u$, και
  (β) κορυφές C Ανεξ. όταν v ΥΕ. Άρα (v, u) πίσω ακμή.
- ΑΠΒ σε μη-κατευθυνόμενο γράφημα παράγει μόνο πίσω ακμές και ακμές δέντρου.

  Έστω $\{v, u\}$ ακμή με $d[v] < d[u]$ (ΑΠΒ επισκέφθηκε v πριν u). Αφού $u \in L[v]$, πρώτα v ΥΕ, μετά u ΥΕ, μετά u Εξ., και τέλος v Εξ. Αν κατεύθυνση (v, u) εξερευνήθηκε πρώτα, ακμή δάσους. Αν κατεύθυνση (u, v) εξερευνήθηκε πρώτα, πίσω ακμή.

Εφαρμογές

- Αλγόριθμο που αποφασίζει αν μη-κατευθυνόμενο γράφημα είναι ακυκλικό με χρ. εκτ. $O(n)$!

  Εφαρμόζουμε ΑΠΒ και σταματάμε όταν ανακαλύψουμε την πρώτη πίσω ακμή. Αν γράφημα ακυκλικό, $m \le n - 1$. Αλλιώς, το πολύ n ακμές πριν σταματήσουμε. Σε κάθε περίπτωση, χρ. εκτ. $O(n)$.
- Οι χρόνοι πρώτης επίσκεψης και αναχώρησης δίνουν πληροφορίες για δομή γραφήματος.
  - Υπολογισμός Σημείων Κοπής (articulation points) σε μη-κατευθυνόμενα γραφήματα.
  - Υπολογισμός Ισχυρά Συνεκτικών Συνιστωσών (strongly connected components) σε κατευθυνόμενα γραφήματα.
  - Υπολογισμός Τοπολογικής Διάταξης (topological sort) σε κατευθυνόμενα ακυκλικά γραφήματα (Directed Acyclic Graphs - DAGs).

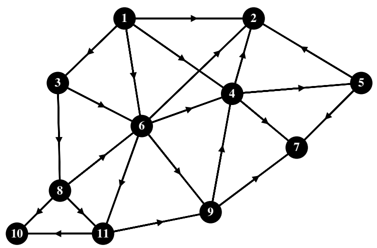
Τοπολογική Διάταξη

- Κατευθυνόμενα Ακυκλικά Γραφήματα $\Leftrightarrow$

  Σχέσεις Μερικής Διάταξης:

  Ακμή $(u, v) \Rightarrow u \le v$ ή u πριν από v.
  - Υπολογισμός αλγεβρικών εκφράσεων

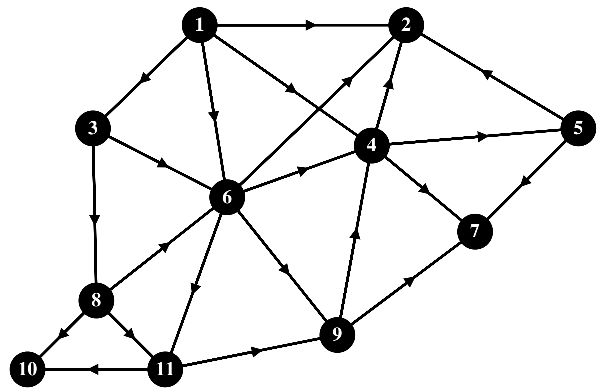
    $(ac)x^2 + [(a + c)(b + d) - ac - bd]x + bd$
  - Προγραμματισμός εργασιών σε έργα.
- Ύπαρξη κύκλου $\Rightarrow$ Φαύλος Κύκλος.
- Αναζήτηση Πρώτα σε Βάθος:
  - Ελέγχει για ύπαρξη κύκλων.
  - Υπολογίζει σειρά συμβατή με μερική διάταξη / εξαρτήσεις (u, v).



Τοπολογική Διάταξη

- ΤΔ $\equiv$ γραμμική διάταξη κορυφών $G(V, E)$ ώστε

  $(u, v) \in E \Rightarrow u$ προηγείται της v.
- ΤΔ $\equiv$ κορυφές σε ευθεία ώστε όλες οι ακμές από αριστερά προς δεξιά.
- Υπάρχει ΤΔ ανν γράφημα είναι ακυκλικό.



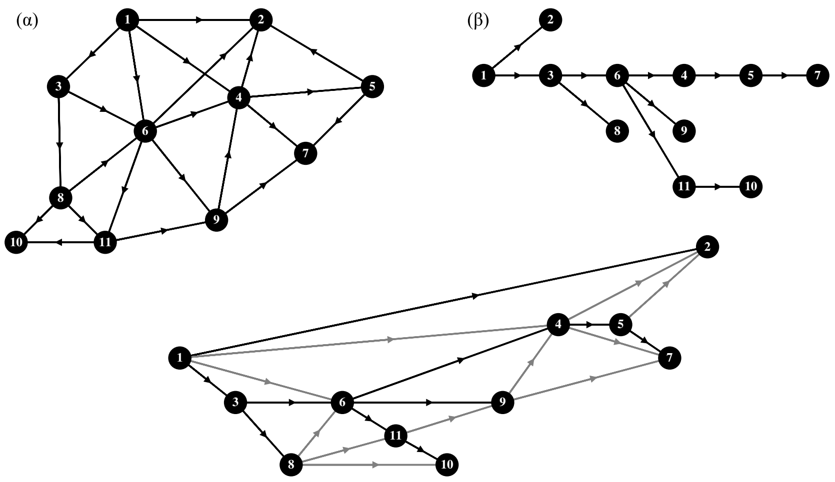
Τοπολογική Διάταξη με ΑΠΒ

- Κορυφές σε φθίνουσα σειρά χρόνων αναχώρησης ΑΠΒ:

$$f[v_1] > f[v_2] > \cdots > f[v_n]$$

- 1η Εξερ. $\rightarrow$ τελευταία, 2η Εξερ. $\rightarrow$ προ-τελευταία, κοκ. Τελευταία Εξερ. $\rightarrow$ 1η.
- **Υλοποίηση**: Last-In-First-Out ουρά.
  Κορυφή γίνεται εξερευνημένη $\rightarrow$ Ουρά.
  Σειρά στην ουρά $\Leftrightarrow$ Σειρά στην ΤΔ.
- Χρόνος εκτέλεσης = γραμμικός, $\Theta(n+m)$.

Παράδειγμα



(γ) Τοπολογική Διάταξη: 1, 3, 8, 6, 11, 10, 9, 4, 5, 7, 2

Ορθότητα

- Έστω $G(V,E)$ ΚΑΓ. Θ.δ.ο $\forall (u,v) \in E,\ f[u] > f[v]$.

Απόδειξη: Εξερεύνηση ακμής (u,v): u ΥΕ.
v όχι ΥΕ. Διαφορετικά, (u,v) πίσω ακμή $\Rightarrow$ κύκλο.
v είτε Ανεξ. είτε Εξερ.

Αν v Εξερ., εξερεύνηση v ολοκληρώθηκε πριν εξερεύνηση u.
Άρα, $f[u] > f[v]$.

Αν v Ανεξ., καλείται DFS(v).
Πρώτα τίθεται $f[v]$ και μετά $f[u]$.
Άρα, $f[u] > f[v]$.