Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

Διδάσκων: Δημήτρης Φωτάκης

3η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 21/6/2017

Θέμα 1 (Σχεδόν Αμιγείς Ισορροπίες Nash, 15 μον.). Θεωρούμε κανονικοποιημένο παίγνιο δύο παικτών (R, C), όπου R, C πίνακες $n \times m$ με όλα τα στοιχεία τους στο $[0, 1]$. Μια ισορροπία Nash $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ είναι *ε-προσεγγιστική*, για κάποιο $\varepsilon > 0$, αν για κάθε ζευγάρι στρατηγικών $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$,

$$\boldsymbol{a}^T R\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}^T R\boldsymbol{y} + \varepsilon \quad \text{και} \quad \boldsymbol{x}^T C\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{x}^T C\boldsymbol{y} + \varepsilon$$

Στήριγμα (support) $S(\boldsymbol{x})$ μιας μεικτής στρατηγικής $\boldsymbol{x}$ είναι το σύνολο των αμιγών στρατηγικών όπου η $\boldsymbol{x}$ αναθέτει θετική πιθανότητα, δηλ. $S(\boldsymbol{x}) = \{i : x_i > 0\}$. Ένα ζευγάρι στρατηγικών $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ είναι *σχεδόν αμιγές* (almost pure) αν $|S(\boldsymbol{x})| + |S(\boldsymbol{y})| \in \{2, 3\}$, δηλ. ο ένας από τους δύο παίκτες χρησιμοποιεί μια αμιγή στρατηγική και ο άλλος το πολύ δύο αμιγείς στρατηγικές. Να δείξετε ότι για κάθε κανονικοποιημένο παίγνιο δύο παικτών (R, C), υπάρχει μια $\frac{1}{2}$-προσεγγιστική σχεδόν αμιγής ισορροπία Nash και ότι αυτή μπορεί να υπολογισθεί αποδοτικά.

Θέμα 2 (Public Project, 15 μον.). Η δημοτική αρχή μελετά την κατασκευή ενός νέου πάρκου, το οποίο αναμένεται να κοστίσει C ευρώ. Κάθε δημότης i, $i = 1, \ldots, n$, εκτιμά την ωφέλειά του από το νέο πάρκο σε $v_i \geq 0$ ευρώ, τιμή που είναι γνωστή μόνο στον ίδιο. Η δημοτική αρχή ζητάει από τους δημότες να δηλώσουν τις εκτιμήσεις τους $v_1, \ldots, v_n$, και θα προχωρήσει στην κατασκευή του πάρκου μόνο αν $\sum_{i=1}^n v_i \geq C$. Σε αυτή την περίπτωση, κάθε δημότης θα πληρώσει μια εισφορά $p_i \geq 0$. Η εισφορά έχει στόχο οι δημότες να δηλώσουν τις πραγματικές τους εκτιμήσεις, και όχι να καλύψει το συνολικό κόστος του πάρκου. Να σχεδιάσετε έναν φιλαλήθη (truthful) μηχανισμό για αυτό το πρόβλημα.

Θέμα 3 (Δημοπρασίες και Multiplicative Price Updates, 30 μον.). Θεωρούμε μια δημοπρασία για m διαφορετικά αντικείμενα (υποθέτουμε, για λόγους απλότητας, ότι κάθε αντικείμενο υπάρχει σε απεριόριστα αντίγραφα και ότι κάθε παίκτης μπορεί να πάρει το πολύ ένα αντίγραφο από κάθε αντικείμενο). Στη δημοπρασία συμμετέχουν n παίκτες. Κάθε παίκτης i έχει μια αύξουσα συνάρτηση αποτίμησης $v_i : 2^{[m]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ που ορίζει πόσο αξίζει κάθε υποσύνολο αντικειμένων για τον i. Ο μηχανισμός ορίζει την αρχική τιμή κάθε αντικειμένου $p_1^j = L/m$, για κάποιο κατάλληλα επιλεγμένο $L > 0$. Στη συνέχεια, ζητά με τη σειρά από κάθε παίκτη $i \in \{1, \ldots, n\}$ να επιλέξει το σύνολο S_i των αντικειμένων που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση $v_i(S_i) - \sum_{j \in S_i} p_i^j$ και του το δίνει (ο παίκτης i μπορεί να επιλέξει το $\emptyset$, έτσι ισχύει πάντα ότι $v_i(S_i) - \sum_{j \in S_i} p_i^j \geq 0$). Πριν προχωρήσει στον επόμενο παίκτη, ο μηχανισμός αναπροσαρμόζει τις τιμές όλων των αντικειμένων $j \in S_i$ πολλαπλασιαστικά, θέτοντας $p_{i+1}^j = r \cdot p_i^j$, για κάποιο $r > 1$.

(α) Να διερευνήσετε αν ο παραπάνω μηχανισμός είναι φιλαλήθης (truthful). Να αιτιολογήσετε συνοπτικά την απάντησή σας.

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει το πολύ ένας παίκτης με αξία (για όλα τα αντικείμενα) μεγαλύτερη του L. Να δείξετε ότι ο μηχανισμός διαθέτει το πολύ $2 + \log_r m$ αντίγραφα από κάθε αντικείμενο.

(γ) Να δείξετε ότι αν $L \leq V^*/2$, τότε ο μηχανισμός επιτυγχάνει συνολική αξία $\sum_i v_i(S_i) \geq V^*/(2r)$, όπου V^* η συνολική αξία της βέλτιστης λύσης που όμως διαθέτει το πολύ ένα αντίγραφο από κάθε αντικείμενο. Για να αποδείξετε αυτόν τον ισχυρισμό, πρέπει πρώτα να δείξετε (i) ότι λόγω της πολλαπλασιαστικής αναπροσαρμογής των τιμών, στο τέλος του μηχανισμού ισχύει ότι

$$\sum_i v_i(S_i) \geq \sum_{j\in[m]} \frac{p^j_{n+1} - p^j_0}{r-1} \Rightarrow (r-1)\sum_i v_i(S_i) \geq \sum_{j\in[m]} p^j_{n+1} - L\,,$$

και (ii) ότι επειδή η βέλτιστη λύση δίνει το πολύ ένα αντίγραφο από κάθε αντικείμενο,

$$\sum_i v_i(S_i) \geq V^* - \sum_{j\in[m]} p^j_{n+1}$$

Θέμα 4 (10 μον.). Δείξαμε ότι το Τίμημα της Αναρχίας για ένα παίγνιο συμφόρησης με ταυτοτικές συναρτήσεις καθυστέρησης $d_e(x) = x$, σε κάθε πόρο e, δεν ξεπερνά το $5/2$. Να γενικεύσετε για την περίπτωση που κάθε πόρος e έχει συνάρτηση καθυστέρησης $d_e(x) = a_e x + b_e$, με $a_e, b_e \geq 0$.

Θέμα 5 (20 μον.). Μια μέθοδος για τον υπολογισμό αμιγούς ισορροπίας Nash σε δικτυακά παίγνια συμφόρησης με συμμετρικά σύνολα στρατηγικών (όπου δηλ. όλοι οι παίκτες έχουν την ίδια αρχική κορυφή s και τελική κορυφή t) είναι η *αυξητική μέθοδος*: Δεδομένης μιας αρίθμησης των παικτών, οι παίκτες "εισέρχονται στο δίκτυο" με βάση τον αύξοντα αριθμό τους, και επιλέγουν αμετάκλητα τη βέλτιστη στρατηγική τους, δεδομένων των στρατηγικών των προηγουμένων παικτών. Δηλ. κάθε παίκτης $i \geq 1$ "εισέρχεται στο δίκτυο" μετά τους παίκτες $1, \dots, i-1$, και επιλέγει (αμετάκλητα) το συντομότερο $s-t$ μονοπάτι με βάση τις καθυστερήσεις που διαμορφώνονται από τις στρατηγικές των παικτών $1, \dots, i-1$ και από τη δική του κυκλοφορία. Αν για κάθε $i = 2, \dots, n$, οι στρατηγικές των παικτών $1, \dots, i-1$ παραμένουν βέλτιστες και μετά την "είσοδο" του παίκτη i στο δίκτυο, τότε η αυξητική μέθοδος οδηγεί (μετά την είσοδο και του n-οστού παίκτη) σε ισορροπία Nash.

(α) Να δώσετε παράδειγμα συμμετρικού δικτυακού παιγνίου συμφόρησης στο οποίο η αυξητική μέθοδος δεν οδηγεί σε αμιγή ισορροπία Nash.

(β) Να δείξετε ότι η αυξητική μέθοδος οδηγεί σε αμιγή ισορροπία Nash σε δίκτυα παράλληλων ακμών όταν οι παίκτες έχουν το ίδιο σύνολο στρατηγικών (δηλ. όλες οι διαθέσιμες ακμές είναι επιλέξιμες από όλους τους παίκτες).

Θέμα 6 (Scheduling, 30 μον.). (α) Έστω το πρόβλημα $1|\,|\sum w_j C_j$, όπου w_j είναι το βάρος της εργασίας j. Έστω επίσης ο κανόνας "weighted shortest processing time first" (WSPT). Σύμφωνα με τον κανόνα αυτό, οι εργασίες ταξινομούνται σε φθίνουσα σειρά του πηλίκου w_j/p_j, όπου p_j είναι ο χρόνος εκτέλεσης της εργασίας j. Δείξτε ότι ο WSPT δίνει ένα βέλτιστο χρονοπρόγραμμα για το πρόβλημα $1|\,|\sum w_j C_j$.

(β) Έστω το πρόβλημα $P2\,|\,d_j\,|\,L_{\max}$ και ο κανόνας που αναφέρεται ως List Scheduling (LS): Ταξινόμησε τις εργασίες σε αύξουσα σειρά ανάλογα με την προθεσμία d_j, και οποτεδήποτε κάποιος επεξεργαστής είναι ελεύθερος ανάθεσε σε αυτόν την επόμενη εργασία στη λίστα. Να διερευνήσετε αν ο LS δίνει ένα βέλτιστο χρονοπρόγραμμα.

Παράδοση. Οι εργασίες θα παραδοθούν στην εξέταση της Τετάρτης 21/6.

Καλή Επιτυχία!