Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

Διδάσκων: Δημήτρης Φωτάκης

2η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 25/5/2017

Άσκηση 1 (15 μον.). Να λύσετε την [1, Άσκηση **1.25**] σχετικά με τον πιθανοτικό αλγόριθμο για το Min-Cut. Για το ερώτημα (c), αρκεί να προσδιορίσετε κάποιες αποδοτικές τιμές για τα k και ℓ, δεν είναι απαραίτητο να βρείτε τις βέλτιστες.

Άσκηση 2 (15 μον.). Θεωρούμε μια δημοσκόπηση για με τη στάση των πολιτών ως προς μια σημαντική πολιτικο-οικονομική μεταβολή. Οι πολίτες απαντούν στη δημοσκόπηση με "ναι" ή "όχι" (υπέρ ή εναντίον της μεταβολής). Αν το (πραγματικό) ποσοστό των πολιτών που τάσσονται υπέρ της μεταβολής είναι p, θέλουμε να υπολογίσουμε μια εκτίμηση $\hat{p}$ του p ώστε $\Pr[|\hat{p}-p| \leq \varepsilon p] > 1-\delta$, για δεδομένα $\varepsilon, \delta \in (0,1)$. Για τη δημοσκόπηση, θα ρωτήσουμε N πολίτες, που επιλέγονται ισοπίθανα και ανεξάρτητα από το σύνολο των πολιτών. Η εκτίμησή μας $\hat{p}$ θα είναι το ποσοστό των N πολιτών που τάσσονται υπέρ της μεταβολής. Χρησιμοποιώντας Chernoff bounds, να υπολογίσετε (ως συνάρτηση των ε, δ, και p) το ελάχιστο μέγεθος N του δείγματος που χρειαζόμαστε. Βρείτε την τιμή του N για $\varepsilon = 0.02$ και $\delta = 0.05$, αν γνωρίζουμε ότι $p \in [0.2, 0.8]$ (και δείτε ότι αυτή η τιμή είναι ανεξάρτητη του πληθυσμού της χώρας!). *Σημείωση:* Πρόκειται για την [1, Άσκηση **4.5**].

Άσκηση 3 (Sparsification, 20 μον.). (α) Έστω $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \in [0,1]^n$, με $\sum_i x_i = 1$ (το $\boldsymbol{x}$ είναι ένα διάνυσμα πιθανοτήτων στο $[n] \equiv \{1, \dots, n\}$). Έστω ακόμη $k(\varepsilon) = \lceil \ln(2)/(2\varepsilon^2) \rceil$. Να δείξετε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα $k(\varepsilon)$-ομοιόμορφο διάνυσμα πιθανοτήτων $\boldsymbol{y}$ στο $[n]$ τέτοιο ώστε $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \varepsilon$. Υπενθυμίζεται ότι ένα διάνυσμα πιθανοτήτων $\boldsymbol{y}$ είναι k-*ομοιόμορφο* (k-uniform) αν κάθε y_i είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $1/k$.

(β) Έστω A πίνακας $m \times n$ με όλα τα στοιχεία του στο $[0,1]$ και έστω $\boldsymbol{x}$ ένα διάνυσμα πιθανοτήτων στο $[n]$. Έστω ακόμη $k(m, \varepsilon) = \lceil \ln(2m)/(2\varepsilon^2) \rceil$. Να δείξετε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα $k(m,\varepsilon)$-ομοιόμορφο διάνυσμα πιθανοτήτων $\boldsymbol{y}$ στο $[n]$ τέτοιο ώστε $\|A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{y}\|_\infty \leq \varepsilon$.

Άσκηση 4 (15 μον.). Να απαντήσετε τα (a) και (b) της [1, Άσκησης **6.4**].

Άσκηση 5 (20 μον.). Να λύσετε την [2, Άσκηση **5.3**] και την [2, Άσκηση **5.6**].

Άσκηση 6 (15 μον.). Να λύσετε την [2, Άσκηση **5.4**].

Βιβλιογραφία

1. M. Mitzenmacher and E. Upfal. *Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*. Cambridge University Press, 2005.
2. D.P. Williamson and D.B. Shmoys. *The Design of Approximation Algorithms*. Cambridge University Press, 2010.

Καλή Επιτυχία!