Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

Διδάσκων: Δημήτρης Φωτάκης

1η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 28/4/2017

Άσκηση 1 (15 μον.). Έστω το Γραμμικό Πρόγραμμα (Π1):

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 - x_2 - 7x_3 + x_4 = -3 \\ & 3x_1 - 4x_3 + x_4 = -1 \\ & x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Να σχεδιάσετε το σύνολο των εφικτών λύσεων του (Π1) και να βρείτε τις κορυφές του (ίσως χρειαστεί να το τροποποιήσετε κατάλληλα). Να σχεδιάσετε την κατεύθυνση βελτιστοποίησης, και να βρείτε μια βέλτιστη λύση.
2. Να διατυπώσετε το δυϊκό πρόγραμμα (ΔΠ1) του (Π1). Να διατυπώσετε τις complementary slackness συνθήκες για τα (Π1) και (ΔΠ1), και να τις χρησιμοποιήσετε για τον υπολογισμό της βέλτιστης λύσης του (ΔΠ1).

Άσκηση 2 (20 μον.). Έστω το Γραμμικό Πρόγραμμα (Π2):

$$\begin{aligned} \min \quad & -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 0.5x_1 - 5.5x_2 - 2.5x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 \\ & 0.5x_1 - 1.5x_2 - 0.5x_3 + x_4 + x_6 = 0 \\ & x_1 + x_7 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

Να λύσετε (δύο φορές) το (Π2) με τον αλγόριθμο Simplex. Να ξεκινήσετε με βασικές μεταβλητές τις x_5, x_6, x_7. Να ακολουθήσετε τους παρακάτω κανόνες για την εναλλαγή στηλών (pivoting) στη βάση (την πρώτη φορά τον ένα, την δεύτερη τον άλλο):

1. (i) ως νέα βασική μεταβλητή επιλέγεται εκείνη με το ελάχιστο ανηγμένο κόστος, και (ii) αν υπάρχουν δύο ή περισσότερες βασικές μεταβλητές υποψήφιες για έξοδο από τη βάση, επιλέγεται εκείνη με τον ελάχιστο δείκτη.
2. (i) ως νέα βασική μεταβλητή επιλέγεται εκείνη (από τις μεταβλητές με αρνητικό ανηγμένο κόστος) με τον ελάχιστο δείκτη, και (ii) αν υπάρχουν δύο ή περισσότερες βασικές μεταβλητές υποψήφιες για έξοδο από τη βάση, επιλέγεται εκείνη με τον ελάχιστο δείκτη.

Άσκηση 3 (20 μον.). Δίνεται το (μη γραμμικό) πρόγραμμα:

$$R = \min\{\tfrac{c_1^T x + d_1}{c_2^T x + d_2} : Ax \leq b, c_2^T x + d_2 > 0\}$$

Υποθέτουμε ότι η περιοχή των εφικτών λύσεων είναι φραγμένη και ότι η αντικειμενική τιμή της βέλτιστης λύσης ανήκει στο διάστημα $[L, U]$. Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε ένα $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε εφικτή λύση x, $c_2^T x + d_2 \geq \delta$. Να δείξετε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να υπολογίσουμε μια $(1 + \varepsilon)$-προσέγγιση της βέλτιστης λύσης του R (χρησιμοποιήστε ως υπορουτίνα έναν αλγόριθμο Γραμμικού Προγραμματισμού). Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας;

Άσκηση 4 (20 μον.). [1, Άσκηση **1.5**].

Άσκηση 5 (20 μον.). Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα: Δίνεται ένα πλήρες μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, \ell)$, κάθε ακμή e του οποίου έχει μήκος $\ell(e) \geq 0$. Υποθέτουμε ότι τα μήκη των ακμών ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα. Το ζητούμενο είναι ένας κύκλος Hamilton ώστε το μέγιστο βάρος των ακμών του να είναι το ελάχιστο δυνατόν. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει προσεγγιστικός αλγόριθμος (πολυωνυμικού χρόνου) με λόγο προσέγγισης μικρότερο του 2 για αυτό το πρόβλημα (εκτός αν $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$). Τι συμβαίνει αν τα μήκη των ακμών είναι αυθαίρετα;

Άσκηση 6 (20 μον.). [1, Άσκηση **2.5.a**].

Βιβλιογραφία

1. D.P. Williamson and D.B. Shmoys. *The Design of Approximation Algorithms*. Cambridge University Press, 2010.

Καλή Επιτυχία!