

Ανταγωνιστική Ανάθεση Πόρων και Παίγνια Συμφοράσης

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



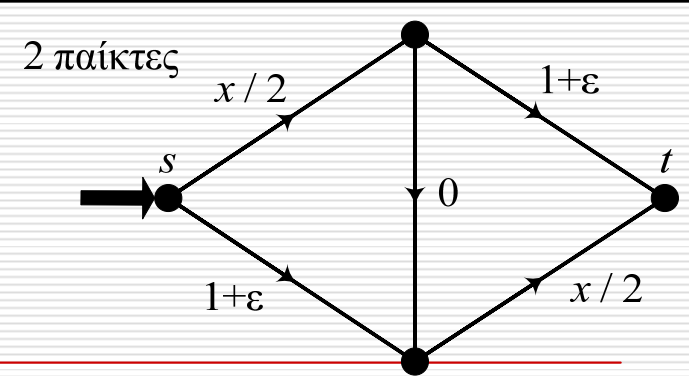
Μοντέλο Ανάθεσης Πόρων

- Σύνολο πόρων $E = \{ e_1, \dots, e_m \}$.
 - **Πόροι**: συνδέσεις δικτύου, υπηρεσίες σε υπολογιστικό ή πληροφοριακό σύστημα, αρχεία (ή τμήματα αρχείων) P2P, ...
- n χρήστες με απαιτήσεις πρόσβασης σε πόρους.
 - Απαιτήσεις εισάγουν ίδιο (μοναδιαίο) φορτίο.
 - $\Sigma_i \subseteq 2^E$ **σύνολο επιλογών** (αμιγών στρατηγικών) παίκτη i .
 - Παίκτης i κάνει **επιλογή** $\sigma_i \in \Sigma_i$.
 - Διάνυσμα επιλογών $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ **διαμόρφωση** συστήματος.
 - Π.χ. $E = \{s_1, s_2, s_3, p_1, p_2, p_3\}$, $n = 3$.
 $\Sigma_1 = \{ \{s_1, p_1\}, \{s_2, s_3, p_2\} \}$
 $\Sigma_2 = \{ \{s_2, p_2\}, \{s_3, s_1, p_3\} \}$
 $\Sigma_3 = \{ \{s_3, p_3\}, \{s_1, s_2, p_1\} \}$

Μοντέλο Ανάθεσης Πόρων

- «Ποιότητα» πόρου υποβαθμίζεται όσο αυξάνεται φορτίο.
 - Φορτίο (ή συμφόρηση) σ_e πόρου e σε διαμόρφωση σ .
 $\sigma_e = \#$ χρηστών που χρησιμοποιούν e στη σ .
 - Αύξουσα συνάρτηση καθυστέρησης (ή κόστους) πόρου e με συμφόρηση x : $d_e(x)$
 - Καθυστέρηση σε κάθε πόρο αυξάνεται με συμφόρηση!
- Καθυστέρηση παίκτη i σε διαμορφ. σ : $c_i(\sigma) = \sum_{e \in \sigma_i} d_e(\sigma_e)$
 - Π.χ. $E = \{s_1, s_2, s_3, p_1, p_2, p_3\}$, $n = 3$.
 $\Sigma_1 = \{ \{s_1, p_1\}, \{s_2, s_3, p_2\} \}$
 $\Sigma_2 = \{ \{s_2, p_2\}, \{s_3, s_1, p_3\} \}$
 $\Sigma_3 = \{ \{s_3, p_3\}, \{s_1, s_2, p_1\} \}$
 $\forall e \in E$, κόστος e : $d_e(x) = x$

Παίγνια Συμφόρησης

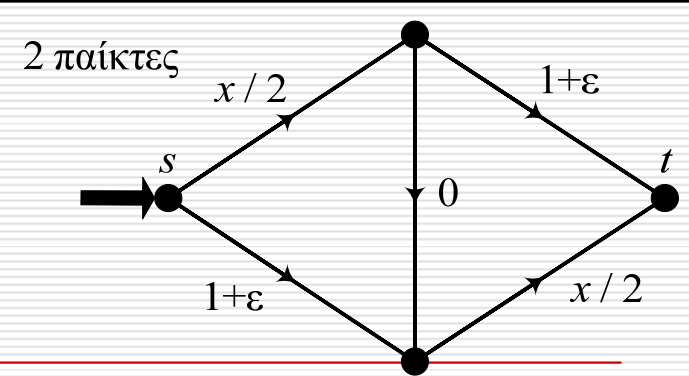


- Παίγνιο συμφόρησης $\Gamma(N, E, (\Sigma_i)_{i \in N}, (d_e)_{e \in E})$
 - N : σύνολο n χρηστών (ανταγωνιστικών οντοτήτων)
 - E : σύνολο m πόρων διαμοιραζόμενων από χρήστες.
 - $\Sigma_i \subseteq 2^E$ σύνολο αμιγών στρατηγικών χρήστη i .
 - $\Sigma_i = \Sigma_j, \forall i, j$: συμμετρικό παίγνιο.
 - Σύνολο στρατηγικών (διαμορφώσεων) $\Sigma = \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_n$
 - σ_i συμβολίζει στρατηγική χρήστη i σε διαμόρφωση $\sigma \in \Sigma$.
 - Διαμόρφωση $\sigma \in \Sigma$ προκαλεί συμφόρηση σ_e σε πόρο $e \in \Sigma$.
 $\sigma_e = \#$ χρηστών που χρησιμοποιούν e στη σ :
$$\sigma_e = |\{i \in N : e \in \sigma_i\}|$$
 - Αύξουσα συνάρτηση καθυστέρησης (ή κόστους) σε πόρο e : $d_e : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}_+$

Ανταγωνιστική Ανάθεση Πόρων

- Σύγχρονα συστήματα **μεγάλης κλίμακας χωρίς κεντρική διαχείριση** (π.χ. δίκτυα οδικά, δίκτυα τηλεπικοινωνιακά).
 - Χρήστες δρουν **αυτόνομα** και ενδιαφέρονται κυρίως για «**ατομικό**» και **όχι «κοινωνικό» κόστος!**
 - Χρήστης i επιλέγει **αυτόνομα** στρατηγική σ_i που εξασφαλίζει **ελάχιστη ατομική καθυστέρηση** (με βάση επιλογές άλλων χρηστών).
- Που καταλήγει τέτοιο σύστημα;
 - (Αμιγής) **ισορροπία Nash** [Nash, 52].
 - Διαμόρφωση σ όπου κανένας χρήστης **δεν** μπορεί να **μειώσει ατομική καθυστέρηση** αλλάζοντας στρατηγική.
 - Όχι κατ' ανάγκη μοναδική, όχι κατ' ανάγκη βέλτιστη.

Παίγνια Συμφοράς



- Χρήστες ενδιαφέρονται για καθυστέρηση στρατηγικής τους δεδομένων στρατηγικών υπολοίπων χρηστών.
 - σ^{-i} : διαμόρφωση από στρατηγικές χρηστών εκτός του i .
 - Κόστος χρήστη i σε διαμόρφωση σ : $c_i(\sigma) = \sum_{e \in \sigma_i} d_e(\sigma_e)$
 - Κόστος στρατηγικής $p \in \Sigma_i$ (χρήστη i) σε διαμόρφωση σ^{-i} :
$$c_i(\sigma^{-i}, p) = \sum_{e \in p} d_e(\sigma_e^{-i} + 1)$$
 - **Βέλτιστη απόκριση** χρήστη i σε διαμόρφωση σ^{-i} : στρατηγική $p^*(\sigma^{-i}) \in \Sigma_i$ με ελάχιστο κόστος.
- Διαμόρφωση σ είναι αμιγής **ισορροπία Nash** αν
 - \forall χρήστη i , σ_i αποτελεί **βέλτιστη απόκριση** σε σ^{-i} .
 - Κανένας χρήστης δεν μπορεί να μειώσει την ατομική του καθυστέρηση αλλάζοντας τη στρατηγική του.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

- Παίγνια συμφοράς: γενικό μοντέλο – πλήθος εφαρμογών!
 - **Πόροι:** συνδέσεις δικτύου, αρχεία (ή τμήματα αρχείων) P2P, ...
 - **Στρατηγικές:** Σύνολα πόρων για ικανοποίηση στόχου.
- Παραδείγματα:
 - $n = 2$, δύο «παράλληλοι» πόροι με $d_1(x) = x/2$, $d_2(x) = 1+\varepsilon$.
 - Δύο «παράλληλοι» πόροι με $d_1(x) = (x/n)^k$, $d_2(x) = 1+\varepsilon$.
 - $E = \{s_1, s_2, s_3, p_1, p_2, p_3\}$, $n = 3$.
 $\Sigma_1 = \{ \{s_1, p_1\}, \{s_2, s_3, p_2\} \}$
 $\Sigma_2 = \{ \{s_2, p_2\}, \{s_3, s_1, p_3\} \}$
 $\Sigma_3 = \{ \{s_3, p_3\}, \{s_1, s_2, p_1\} \}$
 $\forall e \in E$, κόστος e : $d_e(x) = x$
 - Ισορροπίες: $(\{s_1, p_1\}, \{s_2, p_2\}, \{s_3, p_3\})$
 $(\{s_2, s_3, p_2\}, \{s_3, s_1, p_3\}, \{s_1, s_2, p_1\})$

Βασικά Ερωτήματα

- Ύπαρξη και **δομή αμιγών ισορροπιών Nash** για παίγνια συμφόρησης και γενικεύσεις τους.
- **Ταχύτητα σύγκλισης** σε αμιγείς ισορροπίες Nash.
 - Υπό ποιες προϋποθέσεις (π.χ. συντονισμός, γνώση, υπολογιστικοί πόροι) χρήστες συγκλίνουν γρήγορα σε ισορροπία Nash;
- **Ποιότητα ισορροπιών Nash** σε σχέση με βέλτιστη λύση.
 - Τίμημα αναρχίας, κόστος σταθερότητας.
 - Μέθοδοι βελτίωσης κόστους αναρχίας: διόδια, πολιτικές Stackelberg, ...
- Αντίστοιχα ερωτήματα για **μη-ατομικά παίγνια** συμφόρησης,
 - **Μη-ατομικά: άπειρο** πλήθος παικτών, κάθε παίκτης ελέγχει **απειροελάχιστη** κυκλοφορία.

Συνάρτηση Δυναμικού

- «Κοινωνικό» κόστος χρηστών: $C(\sigma) = \sum_{e \in E} \sigma_e d_e(\sigma_e)$
- «Εγωιστική» συμπεριφορά μειώνει **συνάρτηση δυναμικού**:
$$\Phi(\sigma) = \sum_{e \in E} \sum_{j=1}^{\sigma_e} d_e(j)$$
 - Όταν **χρήστης i αλλάζει στρατηγική από p σε p'** , τότε:
$$c_i(\sigma^{-i}, p) - c_i(\sigma^{-i}, p') = \Phi(\sigma^{-i}, p) - \Phi(\sigma^{-i}, p')$$

δηλ. μεταβολή κόστους χρήστη i = μεταβολή δυναμικού.
 - Ονομάζονται (ακριβείς) **συναρτήσεις δυναμικού**.
- σ (αμιγής) ισορροπία Nash αν
 σ αποτελεί **τοπικό ελάχιστο Φ** [Rosenthal, 73].
 - Πολιτική **καλύτερων / βέλτιστων αποκρίσεων** οδηγεί σε αμιγή ισορροπία Nash.
 - Υπολογισμός ισορροπίας Nash **ελαχιστοποιώντας δυναμικό**.

Συνάρτηση Δυναμικού

- Ανταγωνιστικό παίγνιο με (ακριβή) συνάρτηση δυναμικού είναι ισομορφικό με κάποιο παίγνιο συμφόρησης [Monderer and Shapley, 96].
- Τι συμβαίνει όταν οι χρήστες έχουν διαφορετικά βάρη;
 - Χρήστες επιβαρύνουν διαφορετικά πόρους (αλλά όλους με ίδιο τρόπο / βάρος).
 - Βάρη χρηστών: w_1, \dots, w_n
 - Φορτίο πόρου e σε διαμόρφωση σ : $\sigma_e = \sum_{i:e \in \sigma_i} w_i$

Παίγνια Συμφόρησης με Βάρη

- Για γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης, $d_e(x) = a_e x + b_e$ υπάρχει συνάρτηση δυναμικού που λαμβάνει υπόψη τα βάρη [Fotakis, Kontogiannis, Spirakis, 04].

$$\Phi(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{e \in E} \left(a_e \sigma_e^2 + 2b_e \sigma_e + a_e \sum_{i: e \in \sigma_i} w_i^2 \right)$$

- Όταν χρήστης i αλλάζει στρατηγική από p σε p' , τότε:

$$w_i [c_i(\sigma^{-i}, p) - c_i(\sigma^{-i}, p')] = \Phi(\sigma^{-i}, p) - \Phi(\sigma^{-i}, p')$$

(βάρος i) x (μεταβολή κόστους i) = μεταβολή δυναμικού.

- Συνάρτηση δυναμικού με βάρη: γενικεύει Rosenthal.
- Για μη-γραμμικές συναρτήσεις, δεν υπάρχει συνάρτηση δυναμικού και μπορεί ούτε αμιγής ισορροπία Nash [Fotakis, Kontogiannis, Spirakis, 04].

Ταχύτητα Σύγκλισης

- Γενικά, μείωση δυναμικού και σύγκλιση σε ισορροπία μπορεί να είναι πολύ αργή: **PLS-complete**.
- Γρήγορη συντονισμένη σύγκλιση σε προσεγγιστική ισορροπία για συμμετρικά παίγνια με α -bounded jump,
$$\forall e \in E, \forall x \geq 1, d_e(x+1) \leq \alpha d_e(x)$$
 - [Chien and Sinclair, 07].
- Διαμόρφωση σ είναι ε -ισορροπία αν
$$\forall i \in N, \forall p \in \Sigma_i, (1 - \varepsilon)c_i(\sigma) \leq c_i(\sigma^{-i}, p)$$
 - δεν υπάρχει χρήστης με δυνατότητα σημαντικής βελτίωσης.

Ταχύτητα Σύγκλισης

- $\Phi(\sigma) \leq \sum_{i=1}^n c_i(\sigma) \leq n c_k(\sigma)$ όπου k ο χρήστης με μεγαλύτερο ατομικό κόστος στην σ .
- Ενόσω σ όχι ε -ισορροπία, κινείται «ανικανοποίητος» χρήστης με μεγαλύτερο ατομικό κόστος στην σ .
 - Αν k «ανικανοποίητος», μείωση δυναμικού κατά:
$$\Phi(\sigma) - \Phi(\sigma') = c_k(\sigma) - c_k(\sigma') > \varepsilon c_k(\sigma) \geq \frac{\varepsilon}{n} \Phi(\sigma)$$
 - Σύγκλιση σε #βημάτων $\leq \frac{n}{\varepsilon} \log \Phi(\sigma_0)$
 - Αν k «ικανοποιημένος» και κινείται χρήστης j , τότε λόγω συμμετρίας και α -bounded jump: $c_k(\sigma)/\alpha \leq c_j(\sigma)$
 - Σύγκλιση σε #βημάτων $\leq \frac{n\alpha}{\varepsilon} \log \Phi(\sigma_0)$
- Παρόμοια αποτελέσματα και για άλλα κριτήρια συντονισμού.

Ποιότητα Ισορροπιών Nash

- Μέτρο αποδοτικότητας διαμόρφωσης σ αποτελεί η **συνολική καθυστέρηση** των χρηστών:

$$C(\sigma) = \sum_{i=1}^n c_i(\sigma) = \sum_{e \in E} \sigma_e d_e(\sigma_e)$$

- Βέλτιστη διαμόρφωση σ^* ελαχιστοποιεί **συνολική καθυστέρηση**.
- Συστήματα **μικρής κλίμακας** με **κεντρική διαχείριση** (υπολογιστικά συστήματα με λίγους χρήστες), η βέλτιστη διαμόρφωση σ^* **επιβάλλεται** στους χρήστες.
- Συνολική καθυστέρηση: έννοια **«κοινωνικού» κόστους**.

Τίμημα Αναρχίας [KoutsPapa99]

- Διαμόρφωση σ^* ελάχιστου συνολικού κόστους και διαμόρφωση σ ισορροπία Nash:
 - Υπάρχουν πολλές ισορροπίες, θεωρούμε τη «χειρότερη».
 - **Τίμημα Αναρχίας** = $\max\{C(\sigma)/C(\sigma^*)\}$, με σ ισορροπία Nash.
 - Μέτρο υποβάθμισης απόδοσης λόγω «ανταγωνιστικής» και «εγωιστικής» συμπεριφοράς.
 - Αν Τίμημα Αναρχίας μικρό, τότε ισορροπίες Nash ικανοποιούν και χρήστες και διαχειριστή συστήματος.
 - Θεωρούμε την «καλύτερη» ισορροπία Nash.
 - **Τίμημα Σταθερότητας** = $\min\{C(\sigma)/C(\sigma^*)\}$, με σ ισορροπία Nash.
 - Διαχειριστής προτείνει διαμόρφωση. Αν άλλοι ακολουθήσουν, μεμονωμένος χρήστης δεν έχει καλύτερη επιλογή.

Γραμμικές Συναρτήσεις

- Θεωρούμε ταυτοτικές συναρτήσεις κόστους $d_e(x) = x$
 - Εύκολη γενίκευση σε γραμμικές συναρτήσεις $d_e(x) = a_e x + b_e$
 - Π.χ. $E = \{s_1, s_2, s_3, p_1, p_2, p_3\}$, $n = 3$.
 $\Sigma_1 = \{ \{s_1, p_1\}, \{s_2, s_3, p_2\} \}$
 $\Sigma_2 = \{ \{s_2, p_2\}, \{s_3, s_1, p_3\} \}$
 $\Sigma_3 = \{ \{s_3, p_3\}, \{s_1, s_2, p_1\} \}$
Τμήμα αναρχίας ≥ 2.5
- Κάθε παίγνιο συμφόρησης με γραμμικές συναρτήσεις κόστους, **τμήμα αναρχίας ≤ 2.5**
[Christodoulou, Koutsoupias, 05], [Awerbuch, Azar, Epstein, 05]
 - Αντίστοιχα άνω φράγματα για παίγνια με **βάρη, πολυωνυμικές συναρτήσεις** κόστους, πεπλεγμένες στρατηγικές.
 - Σημαντικά ισχυρότερο άνω φράγμα για **παράλληλους πόρους** και **extension-parallel nets** [Fotakis, 07].

Γραμμικές Συναρτήσεις

- Έστω σ ισορροπία Nash και σ^* βέλτιστη λύση.
Από ορισμούς ισορροπίας Nash και κόστους παικτών:

$$c_i(\sigma) \leq c_i(\sigma^{-i}, \sigma_i^*) \Rightarrow \sum_{e \in \sigma^i} \sigma_e \leq \sum_{e \in \sigma_i^*} (\sigma_e + 1)$$

- Αθροίζουμε για όλους τους παίκτες και έχουμε το ζητούμενο:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{e \in \sigma^i} \sigma_e \leq \sum_{i=1}^n \sum_{e \in \sigma_i^*} (\sigma_e + 1) \Rightarrow \forall \text{φυσικούς } x, y, (x+1)y \leq x^2/3 + 5y^2/3$$

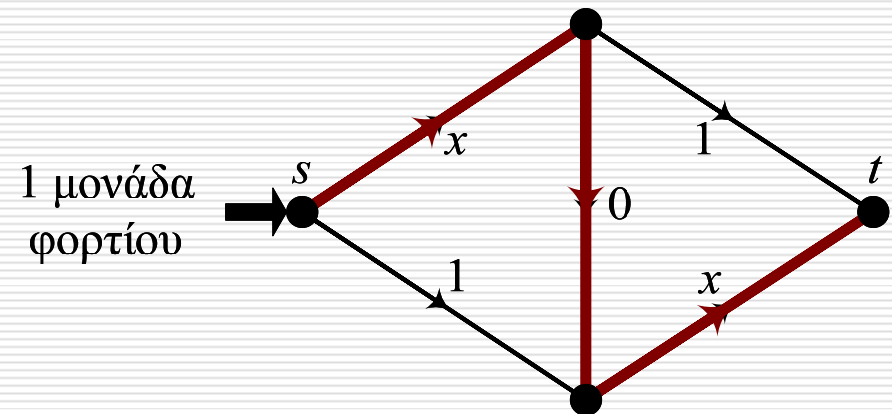
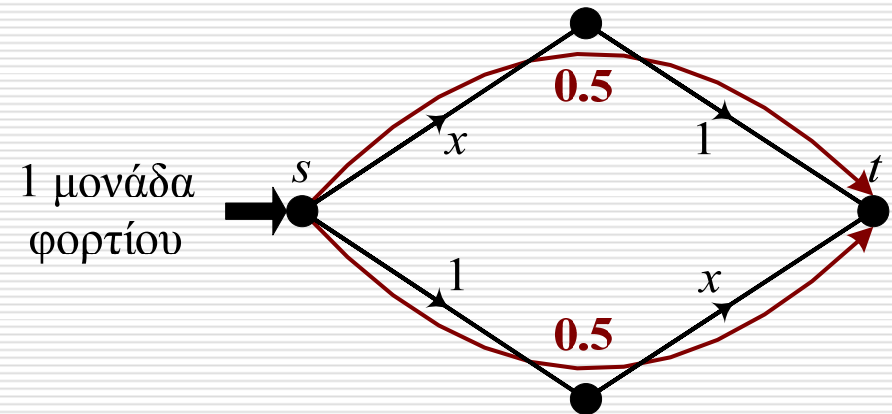
$$\sum_{e \in E} (\sigma_e)^2 \leq \sum_{e \in E} (\sigma_e + 1)\sigma_e^* \leq \sum_{e \in E} \left[\frac{1}{3}(\sigma_e)^2 + \frac{5}{3}(\sigma_e^*)^2 \right] \Rightarrow$$

$$C(\sigma) \leq C(\sigma)/3 + 5C(\sigma^*)/3 \Rightarrow$$

$$C(\sigma) \leq 5C(\sigma^*)/2$$

Μείωση Αναρχίας: Παράδοξο Braess & Network Design

- Συνολική καθυστέρηση **1.5**
 - Nash ισορροπία αποτελεί βέλτιστη λύση.
- Νέα **εξαιρετικά γρήγορη** σύνδεση.
- Συνολική καθυστέρηση **αυξάνεται σε 2** γιατί όλοι χρησιμοποιούν την γρήγορη σύνδεση.
- Παραδοσιακός σχεδιασμός **δεν επαρκεί** για πολύπλοκα συστήματα.



Μείωση Αναρχίας: «Διόδια»

- Μεταβολή συναρτήσεων κόστους προσθέτοντας σταθερό όρο - διόδια: $\bar{d}_e(x) = d_e(x) + t_e$
 - Ισορροπίες με «διόδια», αλλά κοινωνικό κόστος χωρίς!
 - Σημαντική μείωση κόστους αναρχίας.
 - Παράδειγμα με νέες συναρτήσεις κόστους (διόδια ε στους πόρους s_1, s_2, s_3):
$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{\{s_1, p_1\}, \{s_2, s_3, p_2\}\} \\ \Sigma_2 &= \{\{s_2, p_2\}, \{s_3, s_1, p_3\}\} \\ \Sigma_3 &= \{\{s_3, p_3\}, \{s_1, s_2, p_1\}\}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\bar{d}_{p_j}(x) &= x \\ \bar{d}_{s_j}(x) &= x + \varepsilon\end{aligned}$$
 - Μείωση κόστους αναρχίας στο 1, αλλά
 - «Διόδια» πρέπει να αναδιανέμονται στους χρήστες (πώς;).
 - Επιβάρυνση παικτών (δεν υπολογίζεται στο κόστος!).

Πολιτικές Stackelberg

- an χρήστες ακολουθούν οδηγίες «διαχειριστή».
 - Αλτρουιστές, υπάκουοι, πληρώνουν φθηνότερα, ...
 - Μόνο $(1 - a)n$ εγωιστές χρήστες φθάνουν σε ισορροπία Nash.
 - [Korilis, Lazar, Orda, 97], [Roughgarden, 01].
- Πως «διαχειριστής» κατευθύνει αλτρουιστές ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος της αναρχίας;
 - Τίμημα αναρχίας είναι φθίνουσα συνάρτηση a .
 - Διαφορετικές πολιτικές δίνουν διαφορετικές συναρτήσεις.
 - Σημαντική μείωση κόστους αναρχίας με **απλό** μοντέλο (π.χ. όχι αλλαγή κόστους, όχι «κρυφές» επιβαρύνσεις).