Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων: Εισαγωγή και Βασικές Έννοιες

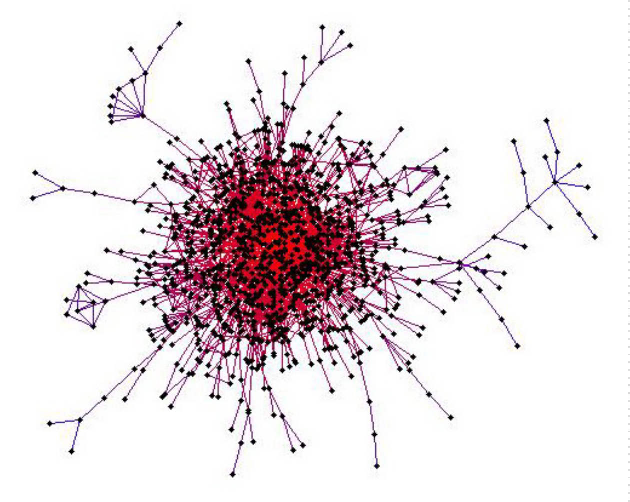
Δημήτρης Φωτάκης

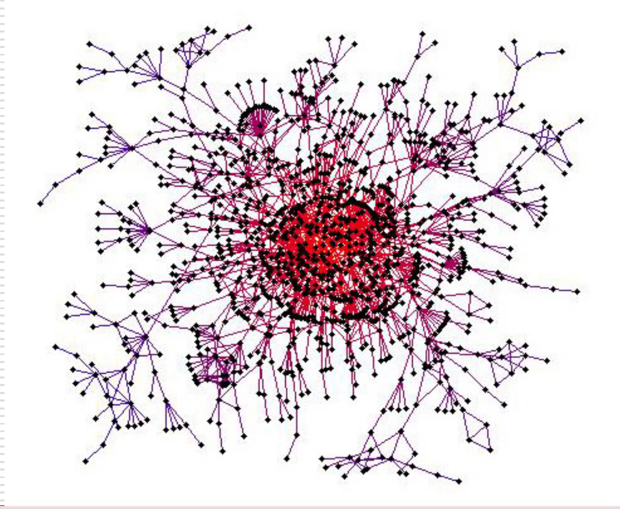
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Πολύπλοκα Συστήματα

- … αποτελούνται από πολλές (ετερογενείς) συνιστώσες που αλληλεπιδρούν.
- Συμπεριφορά συστήματος δεν συνάγεται από χαρακτηριστικά συνιστωσών.
- Συμπεριφορά εξαρτάται **κυρίως** από αλληλεπίδραση συνιστωσών και είναι δύσκολο να προβλεφθεί.





Παραδείγματα

- Φυσική (phase transitions, symmetry breaking, self organization, …).
- Βιολογία και Εξελικτική Βιολογία (εξέλιξη ειδών).
- Οικονομικά
  - Παγκόσμια Οικονομία: ανεξάρτητες οντότητες αλληλεπιδρούν με στόχο μεγιστοποίηση κέρδους.
- Κοινωνιολογία
  - Τι μικρός που είναι ο κόσμος!

Αναγκαιότητα για EECS

- Μεγάλα, πολύπλοκα, και δυναμικά μεταβαλλόμενα συστήματα αποτελούν τμήμα τεχνολογικής υποδομής.
- Δυσχερής η ιδέα μιας κεντρικής διαχειριστικής αρχής που εξασφαλίζει βέλτιστη λειτουργία.
  - Συνιστώσες ενεργούν αυτόνομα και ιδιοτελώς με κριτήριο τη βελτιστοποίηση ατομικών αντικειμενικών στόχων.
- Κλασσικά παραδείγματα:
  - Κυκλοφορία στις μεγάλες πόλεις.
  - Δρομολόγηση κυκλοφορίας στο Internet.

Μονόδρομος Ύποπτου

- Συλλαμβάνεται ύποπτος για μεγάλη ληστεία.
  Δεν υπάρχουν επαρκή στοιχεία!
  - Ομολογεί: 5 χρόνια φυλακή.
  - Δεν ομολογεί: 1 χρόνο φυλακή.
- Ο ύποπτος δεν ομολογεί.

Δίλημμα Υπόπτων

- Συλλαμβάνονται δύο συνεργάτες για μεγάλη ληστεία.
  - Κρατούνται σε χωριστά κελιά χωρίς επικοινωνία.

	Ομολογεί Β	Δεν ομολογεί Β
Ομολογεί Α	**5, 5**	**0, 15**
Δεν ομολογεί Α	**15, 0**	**1, 1**

- Αμφότεροι οι ύποπτοι **ομολογούν!**

Θεωρία Παιγνίων

- Προβλέπει συμπεριφορά αυτόνομων οντοτήτων που δρουν ιδιοτελώς με σκοπό βελτιστοποίηση ατομικών στόχων.
  - Εφαρμογή: όταν υπάρχουν αντικρουόμενα συμφέροντα.
  - Υπόθεση: ορθολογική και στρατηγική συμπεριφορά.
  - Πρόβλεψη: σημεία ισορροπίας (γεν. solution concepts).
- Εργαλείο για μελέτη «πολύπλοκων» συστημάτων.
  - Σημεία ισορροπίας και ιδιότητες τους.
  - Ορθολογική συμπεριφορά οδηγεί σε σημείο ισορροπίας.
- Περιοχή εφαρμογής:
  - Αποδοτικός (κατανεμημένος;) υπολογισμός σημείου ισορροπίας.
  - Αποδοτικότητα (σε σχέση με βέλτιστη διαμόρφωση).
- Σχεδιασμός Μηχανισμών:
  - Κανόνες ώστε να επιτύχουμε επιθυμητή συμπεριφορά / απόδοση.

Ανταγωνιστικό Παίγνιο

- Σύνολο παικτών που ανταγωνίζονται (π.χ. για πόρους).
- Κάθε παίκτης αποφασίζει μόνο τη δική του στρατηγική.
  - Μοναδικός στόχος: μεγιστοποίηση ατομικού κέρδους.
  - Ατομικό όφελος / κόστος εξαρτάται από στρατηγικές όλων.
- **Ισορροπία Nash:** Κανένας δεν μπορεί να βελτιώσει ατομικό κέρδος αλλάζοντας μόνο τη δική του στρατηγική.
  - Nash (1952) απέδειξε ότι **πάντα** υπάρχει τέτοια ισορροπία (αλλά μπορεί να είναι πεπλεγμένη – mixed).
  - Ισορροπία Nash αποτελεί «λύση» του συστήματος:
    - Αν οι παίκτες συμπεριφερθούν στρατηγικά και ορθολογικά και έχουν στη διάθεσή τους πλήρη γνώση και επαρκή χρόνο, τότε καταλήγουν σε μία ισορροπία Nash.

Ισορροπία Nash

	Ομολογεί B	Δεν ομολογεί B
Ομολογεί A	**5, 5**	**0, 15**
Δεν ομολογεί A	**15, 0**	**1, 1**

- Ισορροπία Nash **δεν βελτιστοποιεί** συνολικό αποτέλεσμα. Συμβιβασμός με δεδομένη την έλλειψη συντονισμού.

Μάχη των Φύλλων

	Σινεμά	ΟΚ, μπάσκετ
ΟΚ, σινεμά	**1, 5**	**0, 0**
Μπάσκετ	**0, 0**	**5, 1**

- Μοντέλο για συντονισμό με αντικρουόμενες προτιμήσεις.
- Ισορροπία Nash: καθένας επιλέγει best response στη στρατηγική του αντιπάλου.
  - Αμιγής (ντετερμινιστική επιλογή στρατηγικών): (Σ, Σ), (Μ, Μ)
  - Πεπλεγμένη (mixed): ((1/6, 5/6), (5/6, 1/6))
  - Αποδεικνύεται ότι #ισορροπιών Nash είναι περιττός.
- Σινεμά στο Rocky: ((2, -1), (0, 0)). Τι συμβαίνει;

Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί

	Πέτρα	Ψαλίδι	Χαρτί
Πέτρα	**0, 0**	**1, -1**	**-1, 1**
Ψαλίδι	**-1, 1**	**0, 0**	**1, -1**
Χαρτί	**1, -1**	**-1, 1**	**0, 0**

- Μοναδική ισορροπία: ((1/3, 1/3, 1/3), (1/3, 1/3, 1/3)).
- Παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με 2 παίκτες.
  - von Neumann (1928): υπάρχει πάντα πεπλεγμένη ισορροπία.
  - Εύκολη απόδειξη μέσω LP duality.
- Nash (1952) γενίκευσε για παίγνια με μη-μηδενικό άθροισμα και πεπερασμένο πλήθος παικτών.

Ενδιαφέροντα Παραδείγματα

- Το Δίλημμα του (Απελπισμένου) Ταξιδιώτη
  - 2 παίκτες, καθένας δηλώνει έναν αριθμό μεταξύ 2 και 100 (αξία χαμένης βαλίτσας).
  - Αν δηλώσουν το ίδιο x, εισπράττουν x ευρώ ο καθένας.
  - Διαφορετικά, έστω $x < y$ οι δύο δηλώσεις. Αυτός που δήλωσε y, εισπράττει x, ο άλλος εισπράττει x+2.
- Μαντεύουμε τα 2/3 του μέσου όρου.
  - n παίκτες, καθένας δηλώνει έναν αριθμό μεταξύ 0 και 100.
  - Κερδίζει 1000 ευρώ (μόνον) αυτός με αριθμό πλησιέστερα στο $2(x_1 + \ldots + x_n)/(3n)$.

Ισορροπία στην Πράξη

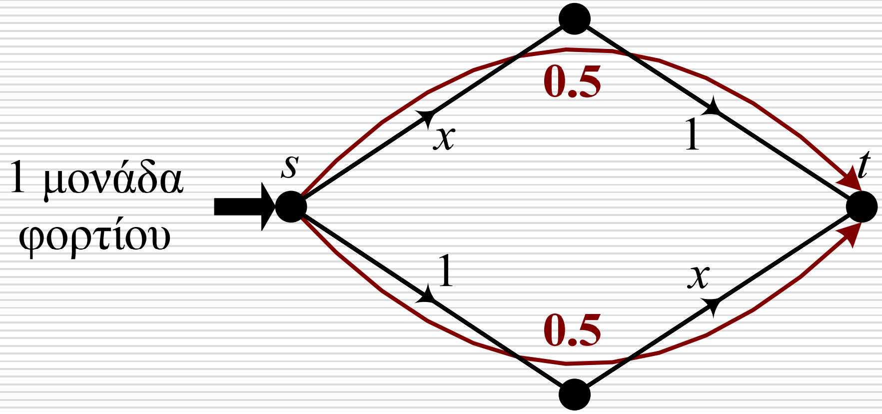
- Χρηματιστήριο:
  - Τιμές αγαθών και μετοχών (market equilibrium)
- Internet, δρόμοι:
  - Δρομολόγηση πακέτων, αυτοκινήτων.
- Κοινωνικά δίκτυα, WWW:
  - Δομή του δικτύου.
- Πως οι συμμετέχοντες υπολογίζουν ισορροπίες;
  - Απόδειξη Nash χρησιμοποιεί Θ. Σταθερού Σημείου Brower: μη αλγοριθμική.
  - Μπορεί να υπάρχει αποδοτικός αλγόριθμος;
  - Αν όχι, πως / γιατί / κατά πόσο συστήματα λειτουργούν σε συνθήκες ισορροπίας;

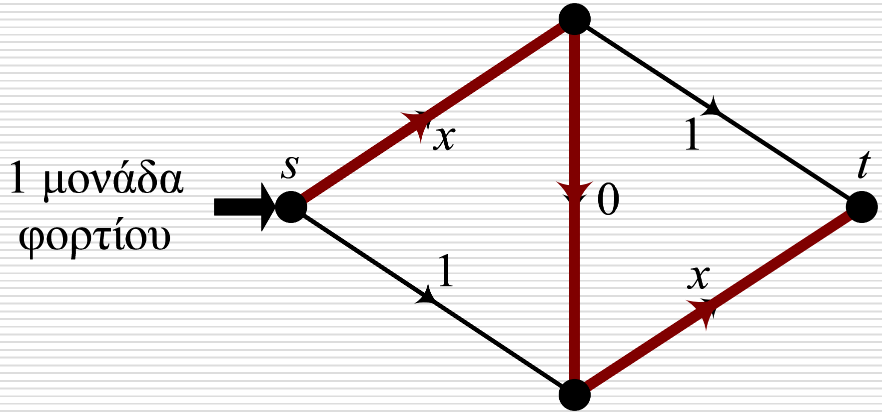
Υπολογισμός Ισορροπιών

- Παίγνια με 2 παίκτες και μηδενικό άθροισμα:
  - Αποδοτικός υπολογισμός ισορροπίας Nash μέσω LP duality.
- Παίγνια με 2 παίκτες γενικής μορφής:
  - Δεν είναι γνωστός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου, παρά το σημαντικό ενδιαφέρον και μεγάλη προσπάθεια.
  - Lemke-Howson (simplex-like) αλγ. δεν είναι αποδοτικός.
  - Ισορροπία Nash δεν είναι NP-complete (εξ' ορισμού)!
  - Είναι όμως PPAD-complete, δηλ. τόσο δύσκολη όσο ο υπολογισμός του σταθερού σημείου του Brower (ή οποιουδήποτε αντίστοιχου προβλήματος).

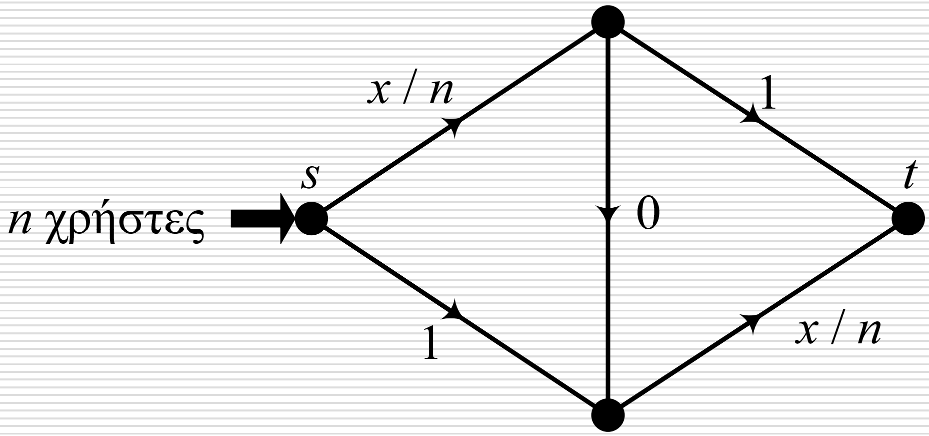
Τίμημα Αναρχίας – Παράδοξο Braess

- Συνολική καθυστέρηση **1.5**
  - Nash ισορροπία αποτελεί βέλτιστη λύση.
- Νέα πολύ γρήγορη σύνδεση.
- Συνολική καθυστέρηση αυξάνεται σε **2** γιατί όλοι χρησιμοποιούν νέα σύνδεση.
- Τίμημα Αναρχίας: **4/3**
- Παραδοσιακός σχεδιασμός δεν επαρκεί.





Ανταγωνιστική Ανάθεση Πόρων



- Μοντελοποίηση με (μη ατομική και ατομική) παίγνια συμφόρησης.
- Ανάλυση απόδοσης.
  - Τίμημα Αναρχίας: Υποβάθμιση λόγω αυτόνομης και ανταγωνιστικής συμπεριφοράς σε σχέση με βέλτιστη κεντρικοποιημένη διαχείριση.
- Κίνητρα για βελτίωση απόδοσης.
- Τεχνικές για βέλτιστο σχεδιασμό.

Δημοπρασίες και Μηχανισμοί

- Ένα αντικείμενο σε δημοπρασία με n παίκτες.
  - Το αντικείμενο αξίζει v_j για παίκτη j.
- Όλοι υποβάλλουν (σφραγισμένες) προσφορές $b_1, \ldots, b_n$.
- Αντικείμενο κατοχυρώνεται σε παίκτη k με μέγιστη προσφορά b_k αντί τιμής t.
  - Ωφέλεια κερδισμένου = $v_k - t$.
  - Ωφέλεια μη κερδισμένου = 0.
- Επιλογή τιμής ώστε να είναι πάντα best response $b_j = v_j$ (truthfulness);
  - Τιμή ίση με μέγιστη προσφορά.
    - Όχι, π.χ. 100, 5!
  - Τιμή ίση με δεύτερη μεγαλύτερη προσφορά.

Αντικείμενο - Ατζέντα

- Ισορροπία Nash σε 2-person 0-sum παίγνια:
  - Εφαρμογή LP duality.
- Υπολογισμός ισορροπίας Nash σε γενικά παίγνια:
  - Brower's fixed point theorem και Sperner's lemma.
  - Αναφορά σε PPAD και Nash ισορροπία είναι PPAD-complete.
  - Ένας αλγόριθμος προσέγγισης για ισορροπία Nash.
- Σχεδιασμός Μηχανισμών:
  - Impossibility results, truthfulness, revelation principle
  - Single-parameter agents: Myerson's characterization, VCG, revenue maximization
  - Combinatorial auctions

Αντικείμενο - Ατζέντα

- Ανταγωνιστική ανάθεση πόρων και παίγνια συμφόρησης:
  - Μη ατομικά παίγνια και ατομικά παίγνια.
  - Ύπαρξη και πολυπλοκότητα (αμιγούς) ισορροπίας Nash.
  - Συνάρτηση δυναμικού και σύγκλιση σε ισορροπία Nash.
  - Τίμημα της αναρχίας και τεχνικές βελτίωσής του.