Δυϊκότητα

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Πιστοποίηση Άνω Φράγματος

- Έχει το ΓΠ εφικτή λύση με κόστος ≤ 2;

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 2x_2 + x_4 + 5x_7 & & \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 4 \\
 & x_1 + x_5 & = & 2 \\
 & x_3 + x_6 & = & 3 \\
 & 3x_2 + x_3 + x_7 & = & 6 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

- **Ναι**, π.χ. [0, 1, 3, 0, 2, 0, 0] .

Πιστοποίηση Κάτω Φράγματος;

- Έχει το ΓΠ εφικτή λύση με κόστος < 2;
- Έχουν όλες οι εφικτές λύσεις κόστος ≥ 2;

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 2x_2 + x_4 + 5x_7 & & \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 4 \\
 & x_1 + x_5 & = & 2 \\
 & x_3 + x_6 & = & 3 \\
 & 3x_2 + x_3 + x_7 & = & 6 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Αν όλες οι εφικτές λύσεις έχουν κόστος ≥ 2, πως θα το πιστοποιήσουμε;

Πιστοποίηση Κάτω Φράγματος

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 2x_2 + x_4 + 5x_7 & & \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 4 \\
 & x_1 + x_5 & = & 2 \\
 & x_3 + x_6 & = & 3 \\
 & 3x_2 + x_3 + x_7 & = & 6 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{rcl}
-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = & -4 \\
3x_2 + x_3 + x_7 & = & 6
\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl}
2 & = & -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 \\
 & \leq & 2x_2 + x_4 + 5x_7
\end{array}
$$

- Το [0, 1, 3, 0, 2, 0, 0] (κόστος 2) είναι **βέλτιστη λύση** (με απόδειξη) !

Υπολογισμός Κάτω Φράγματος

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 7x_1 + x_2 + 5x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 - x_2 + 3x_3 & \geq & 10 \\
& 5x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq & 6 \\
& x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Λύση [1.8, 0, 3] με κόστος 27.6. Καλύτερη;

$$
\left.
\begin{array}{rcl}
2x_1 - 2x_2 + 6x_3 & \geq & 20 \\
5x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq & 6
\end{array}
\right\} \Rightarrow
\begin{array}{rcl}
26 & \leq & 7x_1 + 5x_3 \\
& \leq & 7x_1 + x_2 + 5x_3
\end{array}
$$

Υπολογισμός Κάτω Φράγματος

$$\begin{array}{lrcl} \min & 7x_1 + x_2 + 5x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 3x_3 & \geq & 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq & 6 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \max & 10y_1 + 6y_2 & & \\ \text{s.t.} & y_1 + 5y_2 & \leq & 7 \\ & -y_1 + 2y_2 & \leq & 1 \\ & 3y_1 - y_2 & \leq & 5 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- Λύση [1.8, 0, 3] με κόστος 27.6. Καλύτερη;

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1(x_1 - x_2 + 3x_3) & \geq & 10y_1 \\ y_2(5x_1 + 2x_2 - x_3) & \geq & 6y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10y_1 + 6y_2 \leq (y_1 + 5y_2)x_1 + (-y_1 + 2y_2)x_2 + (3y_1 - y_2)x_3$$

- **Πρωτεύον** (primal) και **δυϊκό** (dual) ΓΠ.

Υπολογισμός Κάτω Φράγματος

$$\begin{array}{lrcl} \min & 7x_1 + x_2 + 5x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 3x_3 & \geq & 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq & 6 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \max & 10y_1 + 6y_2 & & \\ \text{s.t.} & y_1 + 5y_2 & \leq & 7 \\ & -y_1 + 2y_2 & \leq & 1 \\ & 3y_1 - y_2 & \leq & 5 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- Δυϊκό λύση y = [2, 1] ωφέλειας 26 (κάτω φράγμα στο πρωτεύον).
- Πρωτεύον λύση x = [1.75, 0, 2.75] κόστους 26 !
- Ισότητα δεν είναι τυχαία !
  Θεώρημα Δυϊκότητας στο ΓΠ.

Άλλο Παράδειγμα

$$\begin{array}{lrcl} \min & 2x_2 + x_4 + 5x_7 & & \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 4 \\ & x_1 + x_5 & = & 2 \\ & x_3 + x_6 & = & 3 \\ & 3x_2 + x_3 + x_7 & = & 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \max & 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 6y_4 & & \\ \text{s.t.} & y_1 + y_2 & \leq & 0 \\ & y_1 + 3y_4 & \leq & 2 \\ & y_1 + y_3 + y_4 & \leq & 0 \\ & y_1 & \leq & 1 \\ & y_2 & \leq & 0 \\ & y_3 & \leq & 0 \\ & y_4 & \leq & 5 \end{array}$$

- Πρωτεύον λύση [0, 1, 3, 0, 2, 0, 0] κόστους 2.
- Δυϊκό λύση [-1, 0, 0, 1] ωφέλειας 2.

Δυϊκότητα

- Πρωτεύον: $p = \min\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$
- Δυϊκό : $d = \max\{b^T y : A^T y \leq c, y \geq 0\}$

  $d = \min\{(-b^T)y : (-A^T)y \geq -c, y \geq 0\}$
- Δυϊκό του δυϊκού :

  $\max\{(-c^T)z : (-A^T)^T z \leq -b, z \geq 0\}$

  $= \min\{c^T z : Az \geq b, z \geq 0\} = p$
- … είναι το πρωτεύον!

Ασθενής Δυϊκότητα

- Πρωτεύον: $p = \min\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$
- Δυϊκό : $d = \max\{b^T y : A^T y \leq c, y \geq 0\}$
- Ασθενής Δυϊκότητα : αν *x* και *y* εφικτές λύσεις για το πρωτεύον και δυϊκό, $c^T x \geq b^T y$

$$c \geq A^T y \Leftrightarrow c^T \geq (A^T y)^T = y^T A$$

$$c^T x \geq (y^T A)x = y^T(Ax) \geq y^T b = b^T y$$

- Αν πρωτεύον και δυϊκό εφικτά, $p \geq d$

Ισχυρή Δυϊκότητα

- Πρωτεύον: $p = \min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$
- Δυϊκό : $d = \max\{b^T y : A^T y \leq c\}$
- Ισχυρή Δυϊκότητα : αν πρωτεύον βέλτιστη λύση, δυϊκό βέλτιστη λύση και $p = d$

$$\left.\begin{array}{rcl} x_B^* & = & A_B^{-1} b \\ x_N^* & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} c^T x^* & = & c_B^T x_B^* \\ & = & (c_B^T A_B^{-1}) b \end{array} \begin{array}{rcl} & = & c_B^T (A_B^{-1} b) \\ & = & y^T b \end{array}$$

- $y = (A_B^{-1})^T c_B$ εφικτή και βέλτιστη λύση για δυϊκό.

$$0 \leq c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = c_N^T - y^T A_N \Rightarrow A_N^T y \leq c_N$$

- Βέλτιστη για δυϊκό εύκολα από ταμπλό Simplex.

Συνέπειες

- Αν πρωτεύον και δυϊκό επιλύσιμα, βέλτιστες λύσεις με ίδια τιμή.
- Αν πρωτεύον μη-φραγμένο, δυϊκό μη-επιλύσιμο.
- Αν δυϊκό μη-φραγμένο, πρωτεύον μη-επιλύσιμο.
- Πρωτεύον και δυϊκό μη-επιλύσιμα.

Συνέπειες

	Βέλτιστη	Μη-φραγμ	Μη-επιλυσ
Βέλτιστη	✓	✗	✗
Μη-φραγμ	✗	✗	✓
Μη-επιλυσ	✗	✓	✓

Κατασκευή Δυϊκού

- min ↔ max
- Ισότητα ↔ Μεταβλητή μη-περιορισμένο πρόσημο
- Ανισότητα ↔ Μεταβλητή μη-αρνητική

$$
\begin{array}{lll}
\min cx & & \max by \\
A_i x = b_i & i \in M_e & y_i \gtrless 0 \\
A_i x \geq b_i & i \in M_i & y_i \geq 0 \\
x_j \geq 0 & j \in N_r & A^j y \leq c_j \\
x_j \gtrless 0 & j \in N_u & A^j y = c_j
\end{array}
$$

Complementary Slackness

- Εφικτές λύσεις *x* (πρωτεύον) και *y* (δυϊκό) είναι βέλτιστες ανν
  - Συνθήκες πρωτεύοντος:
    $\forall j \in [m]\ x_j(c_j - A^j y) = 0\ \ (x_j \neq 0 \Rightarrow A^j y = c_j)$
  - Συνθήκες δυϊκού:
    $\forall i \in [n]\ y_i(A_i x - b_i) = 0\ \ (y_i \neq 0 \Rightarrow A_i x = b_i)$

$$\begin{aligned} c^T x - b^T y &= c^T x - y^T A x + y^T A x - y^T b \\ &= x^T(c - A^T y) + y^T(Ax - b) \geq 0 \end{aligned}$$

$$c^T x = b^T y \Leftrightarrow x^T(c - A^T y) = 0 \wedge y^T(Ax - b) = 0$$

Παράδειγμα

$$\begin{array}{lrcl} \min & 7x_1 + x_2 + 5x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 3x_3 & \geq & 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq & 6 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \max & 10y_1 + 6y_2 & & \\ \text{s.t.} & y_1 + 5y_2 & \leq & 7 \\ & -y_1 + 2y_2 & \leq & 1 \\ & 3y_1 - y_2 & \leq & 5 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- Πρωτεύον λύση x = [1.75, 0, 2.75] κόστους 26 .
- Δυϊκό λύση y = [2, 1] ωφέλειας 26 .
  - Αλλαγή b σε b′ = [10.5, 6.5]. Πως μεταβάλλεται το κόστος της βέλτιστης λύσης.

Παράδειγμα

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 2x_2 + x_4 + 5x_7 & & \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 4 \\
& x_1 + x_5 & = & 2 \\
& x_3 + x_6 & = & 3 \\
& 3x_2 + x_3 + x_7 & = & 6 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 6y_4 & & \\
\text{s.t.} & y_1 + y_2 & \leq & 0 \\
& y_1 + 3y_4 & \leq & 2 \\
& y_1 + y_3 & \leq & 0 \\
& y_1 & \leq & 1 \\
& y_2 & \leq & 0 \\
& y_3 & \leq & 0 \\
& y_4 & \leq & 5
\end{array}
$$

- Πρωτεύον λύση [0, 1, 3, 0, 2, 0, 0] κόστους 2.
- Δυϊκό λύση [-1, 0, 0, 1] ωφέλειας 2.

Primal-Dual

min $\sum_{e \in E} w(e) x_e$

s.t. $\sum_{e \in out(v)} x_e - \sum_{e \in in(v)} x_e = 0 \quad \forall v \in V \setminus \{s,t\}$

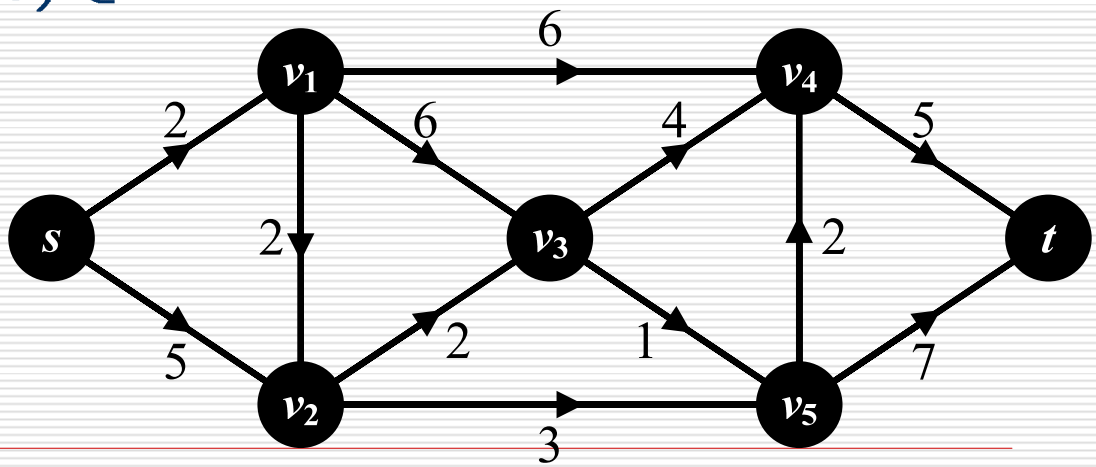
$\sum_{e \in in(t)} x_e - \sum_{e \in out(t)} x_e = 1$

$x_e \geq 0 \quad \forall e \in E$

max y_t

s.t. $y_v - y_u \leq w(u,v) \quad \forall (u,v) \in E$

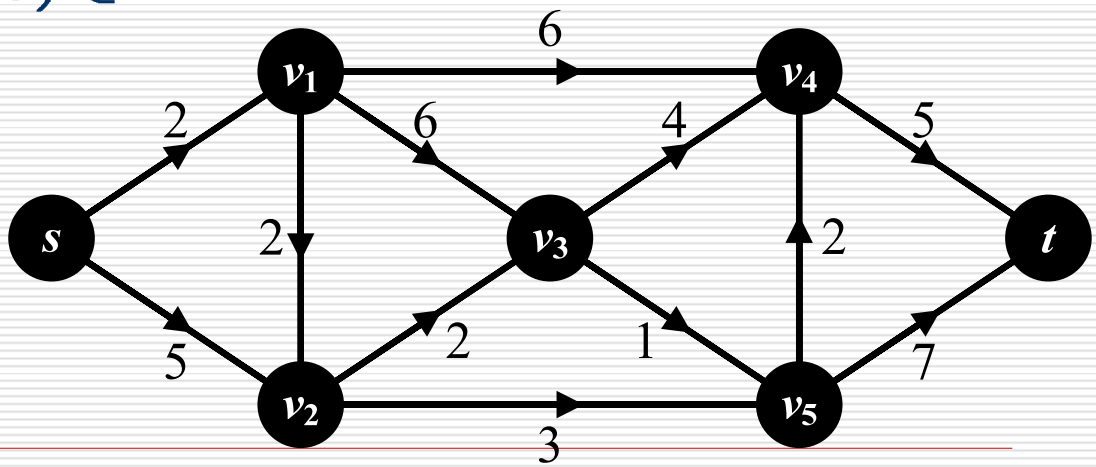
$y_s = 0$



Αλγόριθμος Dijkstra

$$\begin{aligned}
\min \quad & \textstyle\sum_{e \in E} w(e) x_e \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{e \in out(v)} x_e - \sum_{e \in in(v)} x_e = 0 \quad \forall v \in V \setminus \{s,t\} \\
& \sum_{e \in in(t)} x_e - \sum_{e \in out(t)} x_e = 1 \\
& x_e \geq 0 \qquad \forall e \in E
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max \quad & y_t \\
\text{s.t.} \quad & y_v - y_u \leq w(u,v) \quad \forall (u,v) \in E \\
& y_s = 0
\end{aligned}$$



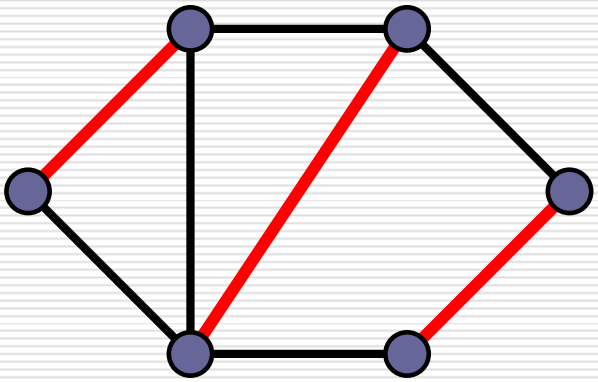
Μέγιστο Ταίριασμα

- **Ταίριασμα :** ακμές χωρίς κοινά άκρα.

$$\max \quad \sum_{e \in E} x_e$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{e: v \in e} x_e \leq 1 \qquad \forall v \in V$$

$$x_e \in \{0, 1\} \qquad \forall e \in E$$



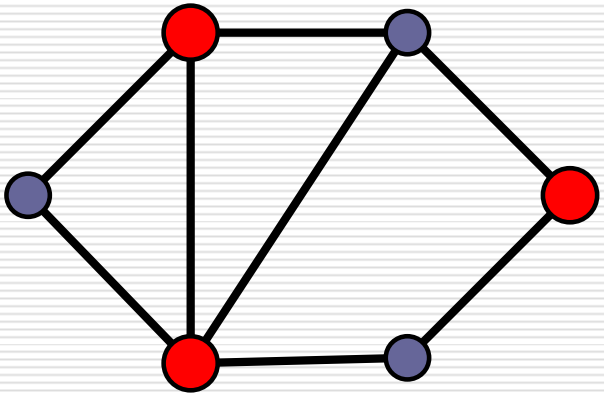
Ελάχιστο Κάλυμμα Κορυφών

- **Κάλυμμα Κορυφών** : σύνολο κορυφών ώστε κάθε ακμή έχει ένα τουλάχιστον άκρο της σε αυτό.

$$\min \sum_{v \in V} y_v$$

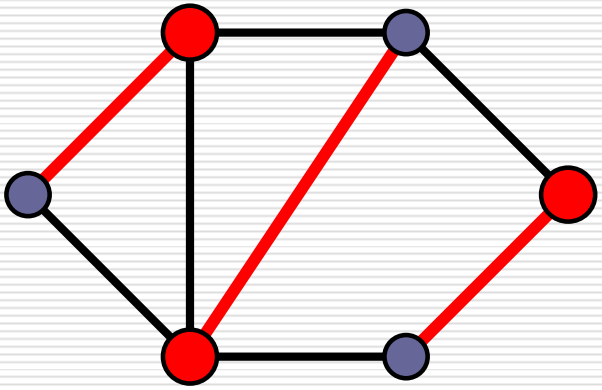
$$\text{s.t.} \quad y_v + y_u \geq 1 \qquad \forall \{v, u\} \in E$$

$$y_v \in \{0, 1\} \qquad \forall v \in V$$



Δυϊκότητα

$$\max \sum_{e \in E} x_e \quad \text{s.t.} \quad \sum_{e: v \in e} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V, \qquad x_e \geq 0 \quad \forall e \in E$$

$$\min \sum_{v \in V} y_v \quad \text{s.t.} \quad y_v + y_u \geq 1 \quad \forall \{v, u\} \in E, \qquad y_v \geq 0 \quad \forall v \in V$$

- Ταίριασμα M και σύνολο κάλυψης C, |C| ≥ |M|
- Ταίριασμα M και σύνολο κάλυψης C: |C| = |M| ⇒ M μέγιστο και C ελάχιστο.