Πεπερασμένα Αυτόματα

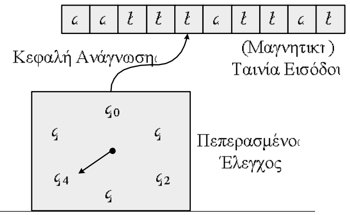
Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

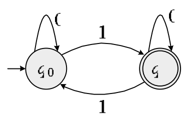
Πεπερασμένα Αυτόματα

- … ή μηχανές πεπερασμένων καταστάσεων είναι απλούστερες υπολογιστικές μηχανές.
  - «Κεντρική Μονάδα» με πεπερασμένο #καταστάσεων.
  - Όχι έξοδος εκτός από χαρακτηρισμό τελικής κατάστασης σαν κατάσταση αποδοχής.
  - Όχι άλλη μνήμη.
  - Είσοδος σειριακά από (μαγνητική) ταινία μέσω κεφαλής ανάγνωσης.
  - Νέο σύμβολο εισόδου προκαλεί αλλαγή κατάστασης.



Ορισμός

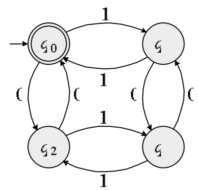
- Ένα ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο είναι μια πεντάδα $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ όπου:
  - *K* ένα πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων.
  - *Σ* ένα αλφάβητο (εισόδου).
  - $s \in K$ η αρχική κατάσταση.
  - $F \subseteq K$ το σύνολο των τελικών καταστάσεων.
  - $\delta : K \times \Sigma \mapsto K$ η συνάρτηση μετάβασης.



$K = \{q_0, q_1\}$,
$\Sigma = \{0, 1\}$,
$s = q_0$,
$F = \{q_1\}$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	0	q_0
q_0	1	q_1
q_1	0	q_1
q_1	1	q_0

Παράδειγμα



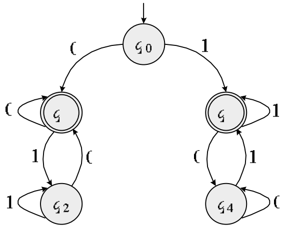
Διάγραμμα Καταστάσεων

$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$,
$\Sigma = \{0, 1\}$,
$s = q_0$,
$F = \{q_0\}$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	0	q_2
q_0	1	q_1
q_1	0	q_3
q_1	1	q_0
q_2	0	q_0
q_2	1	q_3
q_3	0	q_1
q_3	1	q_2

- Αποδέχεται συμβολοσειρές με ζυγό αριθμό 0 και 1.
- Αν αλλάξουμε τελικές καταστάσεις;

Παράδειγμα



$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$,
$\Sigma = \{0, 1\}$,
$s = q_0$,
$F = \{q_1, q_3\}$

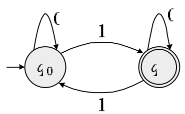
q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	0	q_1
q_0	1	q_3
q_1	0	q_1
q_1	1	q_2
q_2	0	q_1
q_2	1	q_2
q_3	0	q_4
q_3	1	q_3
q_4	0	q_4
q_4	1	q_3

- Αποδέχεται δυαδικές συμβολοσειρές που αρχίζουν και τελειώνουν με το ίδιο σύμβολο.

Υπολογισμός ΠΑ

- ΠΑ *M*(*K*, *Σ*, *δ*, *s*, *F*) «δέχεται» συμβ/ρά *w* αν ξεκινώντας από αρχική κατάσταση *s*, αφού επεξεργαστεί *w*, το *M* καταλήγει σε κάποια από τις τελικές καταστάσεις του *F*.
- Συνολική κατάσταση (configuration) $(q, w) \in K \times \Sigma^*$
  - *q* τρέχουσα κατάσταση.
  - *w* είσοδος που δεν έχει επεξεργασθεί ακόμη.
- **Συνάρτηση** παράγει σε ένα βήμα $\vdash_M : K \times \Sigma^+ \mapsto K \times \Sigma^*$
  - $(q, w) \vdash_M (q', w')$ αν και μόνο αν
    - $w = \sigma w'$ για κάποιο $\sigma \in \Sigma$
    - $\delta(q, \sigma) = q'$
- Συνάρτηση ≡ Ντετερμινιστικό ΠΑ: συνολική κατάσταση ορίζεται μονοσήμαντα από είσοδο.

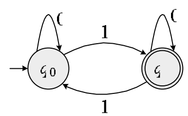
Παράδειγμα



$$(q_0, 011010) \vdash_M (q_0, 11010)$$
$$(q_0, 11010) \vdash_M (q_1, 1010)$$
$$(q_1, 1010) \vdash_M (q_0, 010)$$
$$(q_0, 010) \vdash_M (q_0, 10)$$
$$(q_0, 10) \vdash_M (q_1, 0)$$
$$(q_1, 0) \vdash_M (q_1, \varepsilon)$$

Υπολογισμός ΠΑ

- **Σχέση** παράγει σε κάποιο αριθμό βημάτων
  $$\vdash_M^* \subseteq K \times \Sigma^* \times K \times \Sigma^*$$
  - $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$ αν και μόνο αν υπάρχουν $n \geq 0$, $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1} \in K$ και $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$ τέτοια ώστε:
    - $w = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n w'$ και
    - $\delta(q, \sigma_1) = q_1, \delta(q_1, \sigma_2) = q_2, \ldots, \delta(q_{n-1}, \sigma_n) = q'$
      $(q, \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n w') \vdash_M (q_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n w') \vdash_M \cdots \vdash_M (q', w')$

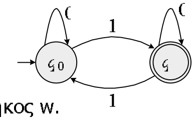


$$(q_0, 011010) \vdash_M^* (q_0, 11010)$$
$$(q_0, 011010) \vdash_M^* (q_0, 010)$$
$$(q_0, 011010) \vdash_M^* (q_1, 0)$$
$$(q_0, 011010) \vdash_M^* (q_1, \varepsilon)$$

Υπολογισμός ΠΑ

- ΠΑ *M* δέχεται συμβ/ρά *w* ή *w* είναι αποδεκτό από *M* όταν
  - για κάποιο $q \in F, (s, w) \vdash_M^* (q, \varepsilon)$
- Γλώσσα *M* : $L(M) = \{w \in \Sigma^* : w \text{ είναι αποδεκτό από } M\}$
- Γλώσσα εικονιζόμενου ΠΑ;

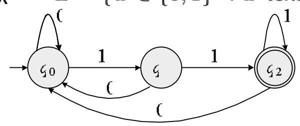
$L(M) = \{w \in \Sigma^* : w \text{ περιέχει περιττό αριθμό από } 1\}$



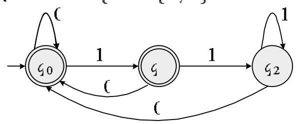
  - Απόδειξη με μαθηματική επαγωγή στο μήκος w.
  - Δείχνουμε ότι
    - αν w έχει άρτιο αριθμό 1, τότε $(q_0, w) \vdash_M^* (q_0, \varepsilon)$
    - αν w έχει περιττό αριθμό 1, τότε $(q_0, w) \vdash_M^* (q_1, \varepsilon)$

Παράδειγμα

- ΠΑ που δέχεται $L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ τελειώνει σε } 11\}$

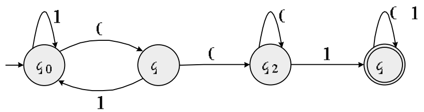


- ΠΑ που δέχεται $L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ δεν τελειώνει σε } 11\}$

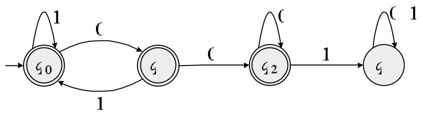


Παράδειγμα

- ΠΑ που δέχεται $L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ περιέχει } 001\}$



- ΠΑ που δέχεται $L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ δεν περιέχει } 001\}$



Παρατηρήσεις

- Ελάχιστος #καταστάσεων ΠΑ για δεδομένη γλώσσα;
  - x και y διακρινόμενες συμβ/ρές στη γλώσσα L αν υπάρχει συμβ/ρά z τέτοια ώστε μόνο μία από xz, yz ανήκει στη L.
  - Π.χ. $L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ περιέχει } 001\}$
    Διακρινόμενες: 1, 0, 00, 001.
  - Ελάχιστος #καταστάσεων = #διακρινόμενων συμβ/ρών.
- Γλώσσες αποδεκτές από ΠΑ κλειστές προς συμπλήρωμα.
  - Τι συμβαίνει με ένωση, τομή, παράθεση, διαφορά, *;
- Παρακάτω γλώσσες είναι αποδεκτές από ΠΑ;

$L_1 = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$

$L_2 = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ περιέχει ίδιο αριθμό } 0 \text{ και } 1\}$