Θεωρία Γραφημάτων: Δέντρα

Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων
Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 83200 Καρλόβασι, Σάμος
Email: `fotakis@aegean.gr`

1 Ορισμός

Ένα γράφημα χωρίς κύκλους (δηλαδή άκυκλο) ονομάζεται *δάσος* (forest). Ένα άκυκλο συνεκτικό γράφημα ονομάζεται *δέντρο* (tree). Οι συνεκτικές συνιστώσες ενός δάσους είναι δέντρα. Οι κορυφές ενός δέντρου με βαθμό 1 ονομάζονται *φύλλα* (leaves), ενώ οι κορυφές με βαθμό μεγαλύτερο του 1 ονομάζονται *εσωτερικές* κορυφές.

Κάθε δέντρο με δύο ή περισσότερες κορυφές έχει τουλάχιστον δύο φύλλα. Ο λόγος είναι ότι ένα δέντρο δεν έχει κύκλους. Έτσι αν θεωρήσουμε ένα μεγιστοτικό μονοπάτι[1] (δηλαδή ένα μονοπάτι που δεν μπορεί να επεκταθεί περαιτέρω), οι άκρες του θα έχουν βαθμό 1 και θα είναι φύλλα.

Αν από ένα δέντρο αφαιρέσουμε ένα φύλλο (και την προσπίπτουσα ακμή), το αποτέλεσμα θα είναι ένα δέντρο με μία ακμή και μία κορυφή λιγότερες. Ο λόγος είναι ότι η αφαίρεση μιας κορυφής δεν μπορεί να δημιουργήσει κύκλο. Επιπλέον, η αφαίρεση μιας κορυφής με βαθμό ένα δεν μπορεί να επηρεάσει τη συνεκτικότητα του γραφήματος γιατί αυτή η κορυφή (και η προσπίπτουσα ακμή) δεν μπορεί να παρεμβάλεται σε μονοπάτι μεταξύ δύο άλλων κορυφών.

1.1 Ισοδύναμοι Ορισμοί

Το παρακάτω θεώρημα απαριθμεί τους πιο γνωστούς χαρακτηρισμούς (δηλαδή ισοδύναμους ορισμούς) των δέντρων. Υπενθυμίζουμε ότι το n συμβολίζει τον αριθμό των κορυφών ενός γραφήματος και το m τον αριθμό των ακμών του.

Θεώρημα 1. *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για κάθε απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα G με n κορυφές και m ακμές:*

1. *Το γράφημα G είναι δέντρο.*
2. *Κάθε ζευγάρι κορυφών του G ενώνεται με μοναδικό μονοπάτι.*
3. *Το G είναι* ελαχιστοτικά συνεκτικό, *δηλ. αν αφαιρεθεί μια ακμή, το γράφημα παύει να είναι συνεκτικό.*
4. *Το G είναι συνεκτικό και $m = n - 1$.*
5. *Το G είναι άκυκλο και $m = n - 1$.*
6. *Το G είναι* μεγιστοτικά άκυκλο, *δηλ. αν προστεθεί μια νέα ακμή, το γράφημα αποκτά κύκλο.*

[1] Σε αυτές τις σημειώσεις θεωρούμε μόνο *απλά* μονοπάτια εκτός αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι $1 \Rightarrow 2$. Αφού το G είναι συνεκτικό, υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι κορυφών. Αν για κάποιο ζευγάρι κορυφών, είχαμε δύο διαφορετικά μονοπάτια, θα είχαμε κύκλο: Τα μονοπάτια κάπου θα ξεχώριζαν, αφού είχαν κοινή αρχή, και κάπου θα έσμιγαν, αφού είχαν κοινό τέλος. Τα ενδιάμεσα τμήματα των δύο μονοπατιών αποτελούν έναν κύκλο.

$2 \Rightarrow 3$ Το γράφημα είναι συνεκτικό από υπόθεση. Αφού έχουμε ένα και μοναδικό μονοπάτι μεταξύ κάθε ζεύγους κορυφών, η αφαίρεση μιας ακμής αίρει τη συνεκτικότητα μεταξύ των άκρων της.

$3 \Rightarrow 4$ Το γράφημα είναι συνεκτικό από υπόθεση. Η απόδειξη για τον αριθμό των ακμών είναι με επαγωγή στον αριθμό των κορυφών. Ο ισχυρισμός είναι τετριμένος αν $n = 1$. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι ισχύει για γραφήματα με αριθμό κορυφών μικρότερο ή ίσο του n. Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό για γραφήματα με $n+1$ κορυφές. Αφαιρώντας μια ακμή από το γράφημα, αίρεται η συνεκτικότητα και προκύπτουν δύο συνεκτικές συνιστώσες. Έστω ότι η πρώτη έχει k κορυφές και η δεύτερη $n-k+1$. Και οι δύο συνιστώσες είναι ελαχιστοτικά συνεκτικές. Από επαγωγική υπόθεση, η πρώτη έχει $k-1$ ακμές και η δεύτερη $n-k$ ακμές. Αν συμπεριλάβουμε και την ακμή που αφαιρέσαμε, το γράφημα είχε $1 + (k-1) + (n-k) = n = (n+1) - 1$ ακμές.

$4 \Rightarrow 5$ Πρέπει να δείξουμε ότι ένα συνεκτικό γράφημα με $n-1$ ακμές δεν έχει κύκλο. Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Ενόσω το γράφημα έχει κύκλους, αφαιρούμε μια ακμή από έναν κύκλο. Αυτό δεν επηρεάζει τη συνεκτικότητα του γραφήματος. Το αποτέλεσμα είναι ένα άκυκλο συνεκτικό γράφημα, δηλαδή ένα δέντρο με n κορυφές και λιγότερες από $n-1$ ακμές. Αυτό αποτελεί αντίφαση στο 4 (που έχουμε ήδη αποδείξει).

$5 \Rightarrow 6$ Θα αποδείξουμε ότι το γράφημα είναι συνεκτικό (δηλαδή ότι κάθε ζευγάρι κορυφών συνδέεται με μονοπάτι). Αυτό αρκεί γιατί η προσθήκη μιας νέας ακμής δημιουργεί κύκλο με το μονοπάτι που συνδέει τα άκρα της.

Έστω k ο αριθμός των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος. Θα δείξουμε ότι $k = 1$. Αφού το γράφημα είναι άκυκλο (έχουμε δηλαδή δάσος), κάθε συνεκτική του συνιστώσα είναι δέντρο. Έστω n_i ο αριθμός των κορυφών της συνεκτικής συνιστώσας i, $i = 1, \ldots, k$. Αφού πρόκειται για δέντρο, η συνεκτική συνιστώσα i έχει $m_i = n_i - 1$ ακμές (από το 4 που έχουμε ήδη αποδείξει). Είναι

$$n - 1 = m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = n - k \Rightarrow k = 1$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει από την υπόθεση ότι $m = n - 1$, και η τελευταία ισότητα πριν τη συνεπαγωγή γιατί $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

$6 \Rightarrow 1$ Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε μεγιστοτικά άκυκλο γράφημα είναι συνεκτικό. Έστω δύο κορυφές u και v ενός μη συνεκτικού άκυκλου γραφήματος. Η προσθήκη της ακμής $\{u, v\}$ δεν δημιουργεί κύκλο. Συνεπώς, αν το γράφημα δεν είναι συνεκτικό δεν μπορεί να είναι μεγιστοτικά άκυκλο. □

Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσετε το Θεώρημα 1 και την απόδειξη του γιατί ουσιαστικά εξηγούν τι είναι δέντρο και ποιές είναι οι βασικές ιδιότητές του. Επίσης, οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στην επίλυση ασκήσεων.

Τα παρακάτω πορίσματα προκύπτουν εύκολα από το Θεώρημα 1. Αφήνεται σαν άσκηση η διατύπωση πλήρους απόδειξης για καθένα από αυτά.

Πόρισμα 1. *Κάθε απλό γράφημα με n κορυφές και n ακμές έχει τουλάχιστον ένα κύκλο.*

Πόρισμα 2. *Κάθε γράφημα με n κορυφές και λιγότερες από $n-1$ ακμές δεν είναι συνεκτικό.*

1.2 Παραδείγματα και Ασκήσεις

Το πλήρες διμερές γράφημα $K_{k,\ell}$ είναι δέντρο ανν είτε $k=1$ είτε $\ell=1$. Το $K_{2,2}$ έχει κύκλο (είναι ουσιαστικά το C_4) και δεν είναι δέντρο.

Κάθε δέντρο είναι διμερές γράφημα. Ξεκινάμε βάζοντας μια κορυφή στη δεξιό σύνολο, τους γειτονές της στο αριστερό, τους γείτονες των γειτόνων της στο δεξιό, κοκ. Η διαδικασία είναι ισοδύναμη με το Ψάξιμο Πρώτα σε Πλάτος. Αφού το δέντρο είναι συνεκτικό όλες οι κορυφές θα μπουν σε ένα από τα δύο σύνολα. Επειδή το γράφημα είναι άκυκλο, το δεξιό και το αριστερό σύνολο είναι σύνολο ανεξαρτησίας.

Κάθε δέντρο είναι επίπεδο γράφημα γιατί δεν περιέχει κύκλους. Έτσι δεν μπορεί να έχει γράφημα ομοιομορφικό με το $K_{3,3}$ ή το K_5 (τα οποία έχουν κύκλους). Τα δέντρα αποτελούν τη βασική περίπτωση στην απόδειξη του τύπου του Euler με επαγωγή στον αριθμό των όψεων. Συγκεκριμένα, ένα δέντρο με n κορυφές έχει μία όψη (την εξωτερική) και $n-1$ ακμές. Συνεπώς, $n+1=(n-1)+2$ όπως απαιτεί ο τύπος του Euler.

Μια ακμή ενός γραφήματος ονομάζεται *ακμή τομής* (cut edge) αν η αφαίρεσή της αίρει τη συνεκτικότητα. Κάθε ακμή ενός δέντρου είναι ακμή τομής. Η αφαίρεση μιας ακμής ενός δέντρου δημιουργεί δύο συνεκτικές συνιστώσες: η μία περιέχει το ένα άκρο της ακμής που αφαιρέθηκε και η άλλη το άλλο. Επίσης, η προσθήκη μιας ακμής σε ένα δέντρο δημιουργεί έναν απλό κύκλο αποτελούμενο από τη νέα ακμή και το μονοπάτι που συνδέει τα άκρα της.

Άσκηση 1. Ένα δέντρο έχει δύο φύλλα αν και μόνο αν είναι ένα απλό μονοπάτι.

Λύση. Κάθε απλό μονοπάτι είναι δέντρο και έχει δύο φύλλα, τα άκρα του. Αντίστροφα, αν έχουμε ένα δέντρο $G(V,E)$ με n κορυφές, μόνο δύο από τις οποίες είναι φύλλα, κάθε εσωτερική κορυφή του δέντρου έχει βαθμό 2. Πράγματι, το άθροισμα των βαθμών των κορυφών είναι $\sum_{v\in V}\deg(v) = 2(n-1)$. Έστω u_1 και u_2 τα φύλλα (τα οποία εξ' ορισμού έχουν βαθμό 1). Τότε

$$\sum_{v\in V\setminus\{u_1,u_2\}}\deg(v)=2(n-2)$$

Αφού οι εσωτερικές κορυφές είναι $n-2$ και έχουν βαθμό τουλάχιστον 2, ο μόνος τρόπος να ισχύει η παραπάνω ισότητα είναι όλες οι εσωτερικές κορυφές να έχουν βαθμό 2. Συνεπώς, το γράφημα είναι ένα απλό μονοπάτι με n κορυφές. □

Άσκηση 2. Ένα δέντρο με μέγιστο βαθμό k έχει τουλάχιστον k φύλλα.

Λύση. Έστω ℓ ο αριθμός των φύλλων. Έχουμε τουλάχιστον 1 κορυφή με βαθμό k, $n-\ell-1$ κορυφές με βαθμό τουλάχιστον 2, και ℓ κορυφές με βαθμό 1. Το άθροισμα των βαθμών είναι $2(n-1)$. Επομένως, έχουμε

$$2(n-1)\geq k+2(n-\ell-1)+\ell=k+2(n-1)-\ell\Rightarrow \ell\geq k$$

δηλαδή ο αριθμός των φύλλων δεν μπορεί να υπολείπεται του μέγιστου βαθμού. □

Γενικώτερα, αν ένα δέντρο με n κορυφές έχει μόνο φύλλα και κορυφές βαθμού δ, τότε ο αριθμός των φύλλων, έστω ℓ, είναι $\ell = \frac{(\delta-2)n+2}{\delta-1}$.

Άσκηση 3. Έστω δέντρο με 4 κορυφές βαθμού 10. Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός φύλλων που υπάρχουν στο δέντρο; (Απάντηση. Τουλάχιστον 34).

Άσκηση 4. Έστω δέντρο με $2k$ φύλλα, $3k$ κορυφές βαθμού 2, και k κορυφές βαθμού 3. Πόσες κορυφές έχει το δέντρο;

Λύση. Ο συνολικός αριθμός των κορυφών είναι $6k$ και το άθροισμα των βαθμών είναι $11k$. Ισχύει ότι $11k = 2(6k-1) \Rightarrow k = 2$. Δηλαδή το δέντρο έχει 12 κορυφές. Αφήνεται σαν άσκηση η απεικόνιση αυτού του δέντρου. □

Άσκηση 5. Έστω γράφημα με n κορυφές, m ακμές, και k συνεκτικές συνιστώσες. Να δείξετε ότι $k \geq n - m$.

Λύση. Αφού κάθε γράφημα έχει τουλάχιστον 1 συνεκτική συνιστώσα, η ανισότητα είναι μη-τετριμένη μόνο όταν $m \leq n-1$. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στον αριθμό των ακμών. Όταν δεν υπάρχει καμία ακμή και $m = 0$, έχουμε n απομονωμένες κορυφές που καθεμία συγκροτεί μία συνεκτική συνιστώσα. Επομένως, η ανισότητα ισχύει για $m = 0$.

Το επαγωγικό βήμα προκύπτει εύκολα από το γεγονός ότι μια νέα ακμή συνδέει κορυφές που βρίσκονται είτε στην ίδια συνεκτική συνιστώσα είτε σε δύο διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες. Στην πρώτη περίπτωση ο αριθμός των συνεκτικών συνιστωσών παραμένει αμετάβλητος, ενώ στη δεύτερη περίπτωση ο αριθμός των συνεκτικών συνιστωσών μειώνεται κατά 1. Έτσι η μεταβολή στο αριστερό μέλος της ανισότητας είναι μεγαλύτερη ή ίση από τη μεταβολή στο δεξιό της μέλος και η ανισότητα συνεχίζει να ισχύει. Η διατύπωση των λεπτομερειών αφήνεται ως άσκηση. □

Άσκηση 6. Έστω δένδρο T με p_i κορυφές βαθμού i, $i = 1, \ldots, k$ (k είναι ο μέγιστος βαθμός του T). Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των φύλλων δίνεται από τη σχέση $2 + p_3 + 2\,p_4 + 3\,p_5 + \ldots + (k-2)p_k$

Λύση. Ο αριθμός των φύλλων είναι p_1 (αριθμός των κορυφών βαθμού 1), ο συνολικός αριθμός των κορυφών του T είναι $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k$, και το άθροισμα των βαθμών τους είναι $p_1 + 2\,p_2 + 3\,p_3 + \ldots k\,p_k$. Αφού το T είναι δέντρο, ο αριθμών των ακμών του είναι $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k - 1$. Συνεπώς,

$$p_1 + 2\,p_2 + 3\,p_3 + \ldots k\,p_k = 2(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k - 1) \Rightarrow p_1 = 2 + p_3 + 2\,p_4 + 3\,p_5 + \ldots + (k-2)p_k$$

που είναι η ζητούμενη σχέση. □

2 Δέντρα με Ρίζα

Αν ορίσουμε μια κορυφή του δέντρου σαν *ρίζα*, τότε έχουμε ένα *δέντρο με ρίζα* (rooted tree). Σε ένα δέντρο με ρίζα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλες οι ακμές έχουν κατεύθυνση από τη ρίζα προς τα φύλλα. Σε αυτή την περίπτωση, η ρίζα έχει εισερχόμενο βαθμό (ή βαθμό εισόδου) 0, όλες οι υπόλοιπες κορυφές έχουν εισερχόμενο βαθμό 1, και τα φύλλα έχουν εξερχόμενο βαθμό (ή βαθμό εξόδου) 0.

Σε ένα δέντρο με ρίζα, οι *πρόγονοι* (predecessors) μιας κορυφής v είναι όλες οι κορυφές στο μονοπάτι από τη ρίζα προς τη v. Ο *πατέρας* της v είναι ο μοναδικός πρόγονος που έχει ακμή προς της v. Οι *απόγονοι* (successors) της v είναι όλες οι κορυφές για τις οποίες η v αποτελεί πρόγονο. Τα *παιδιά* (children) της v είναι όλες οι κορυφές για τις οποίες η v αποτελεί πατέρα. Τα *αδέλφια* (siblings) της v είναι όλες οι κορυφές που έχουν κοινό πατέρα με τη v. Το *ύψος* (height) της v είναι το μήκος του μονοπατιού από τη ρίζα προς τη v. Το ύψος ενός δέντρου με ρίζα είναι το μέγιστο ύψος ενός φύλλου του.

Ένα δέντρο με ρίζα ονομάζεται *m-αδικό* όταν κάθε κορυφή έχει το πολύ m παιδιά. Ένα m-αδικό δέντρο ονομάζεται *κανονικό* όταν κάθε εσωτερική κορυφή έχει ακριβώς m παιδιά. Η ρίζα ενός κανονικού m-αδικού δέντρου έχει βαθμό m και οι υπόλοιπες εσωτερικές κορυφές έχουν βαθμό $m+1$. Ένα m-αδικό δέντρο ονομάζεται *πλήρες* όταν είναι κανονικό και όλα του τα φύλλα έχουν ακριβώς το ίδιο ύψος[2].

Ένα m-αδικό δέντρο ύψους h έχει τουλάχιστον $h+1$ κορυφές. Επίσης, έχει 1 κορυφή ύψους 0 (τη ρίζα), το πολύ m κορυφές ύψους 1, το πολύ m^2 κορυφές ύψους 2, …, και το πολύ m^h κορυφές ύψους h. Συνολικά, το δέντρο έχει το πολύ

$$\sum_{i=0}^{h} m^i = \frac{m^{h+1}-1}{m-1} \quad \text{κορυφές.}$$

Μάλιστα, το πλήρες m-αδικό δέντρο ύψους h έχει ακριβώς $\frac{m^{h+1}-1}{m-1}$ κορυφές από τις οποίες m^h είναι φύλλα.

Με βάση τα παραπάνω, κάθε δυαδικό δέντρο ύψους h έχει το πολύ 2^h φύλλα και συνολικά το πολύ $2^{h+1}-1$ κορυφές. Το πλήρες δυαδικό δέντρο ύψους h έχει ακριβώς $2^{h+1}-1$ κορυφές από τις οποίες 2^h είναι φύλλα και 2^h-1 είναι εσωτερικές. Αντίστροφα, κάθε δυαδικό δέντρο με n κορυφές έχει ύψος τουλάχιστον $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ και το πολύ $n-1$.

Άσκηση 7. Έστω κανονικό m-αδικό δέντρο με n κορυφές, από τις οποίες οι ℓ είναι φύλλα και οι i εσωτερικές κορυφές. Να αποδείξετε ότι: (α) $n = m\,i + 1$, (β) $i\,(m-1) = \ell - 1$, και (γ) $m\,\ell = (m-1)\,n + 1$.

Λύση. Για το (α), παρατηρούμε ότι όλες οι εσωτερικές κορυφές έχουν εξερχόμενο βαθμό m και τα φύλλα έχουν εξερχόμενο βαθμό 0. Συνεπώς, το άθροισμα των εξερχόμενων βαθμών είναι $i\,m$. Από την άλλη, το άθροισμα των εξερχόμενων βαθμών είναι ίσο με τον αριθμό των ακμών, δηλαδή με $n-1$. Συνεπώς, $n-1 = i\,m$ όπως απαιτείται.

Το (β) προκύπτει από το (α) θέτοντας $n = i + \ell$. Το (γ) προκύπτει από το $m\,\ell = m\,n - m\,i$ αντικαθιστώντας με $m\,i = n - 1$ από το (α). □

Τα δέντρα με ρίζα δεν είναι ιδιαίτερα σημαντικά από θεωρητικής άποψης. Όμως, τα m-αδικά (και ιδιαίτερα τα δυαδικά) δέντρα με ρίζα έχουν πολύ σημαντικές πρακτικές εφαρμογές.

[2] Με βάση αυτή την ορολογία, το δέντρο στο Ερώτημα 3 της 4ης Εργασίας είναι *κανονικό και όχι απαραίτητα πλήρες*.

2.1 Δυαδικά Δέντρα Αναζήτησης

Ας θεωρήσουμε ένα δυαδικό δέντρο που οι κορυφές του περιέχουν στοιχεία για τα οποία ισχύει μια σχέση μερικής διάταξης. Τα στοιχεία μπορεί να είναι αριθμοί, γράμματα, λέξεις, ή γενικότερα να αποτελούν τους μοναδικούς κωδικούς (κλειδιά) των εγγραφών μιας σχέσης σε μια βάση δεδομένων.

Ένα τέτοιο δέντρο ονομάζεται *δυαδικό δέντρο αναζήτησης* όταν το στοιχείο κάθε εσωτερικής κορυφής είναι μεγαλύτερο από όλα τα στοιχεία του αριστερού της υποδέντρου (δηλ. το υποδέντρο με ρίζα το αριστερό παιδί της κορυφής) και μικρότερο από όλα τα στοιχεία στο δεξιό της υποδέντρο (δηλ. το υποδέντρο με ρίζα το δεξιό παιδί της κορυφής)

Η αποθήκευση των στοιχείων σε ένα *ζυγισμένο* δυαδικό δέντρο αναζήτησης[3] επιτρέπει την εύκολη και γρήγορη αναζήτησή τους. Αν το στοιχείο που ζητάμε είναι μικρότερο από το στοιχείο μιας κορυφής, προχωρούμε στο αριστερό της παιδί. Αν είναι μεγαλύτερο προχωρούμε στο δεξιό της παιδί. Αυτή η (αναδρομική) διαδικασία ξεκινάει από τη ρίζα και συνεχίζεται μέχρι να βρούμε το στοιχείο ή να μην μπορούμε να προχωρήσουμε άλλο. Στη δεύτερη περίπτωση, συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο στοιχείο δεν υπάρχει στο δέντρο.

Για να κατασκευάσουμε ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης, εισάγουμε κάθε νέο στοιχείο (που δεν υπάρχει ήδη στο δέντρο) στο σημείο που θα περιμέναμε να το βρούμε. Με άλλα λόγια, το νέο στοιχείο εισάγεται σαν παιδί της κορυφής στην οποία μας οδήγησε η παραπάνω διαδικασία αναζήτησης. Το νέο στοιχείο γίνεται αριστερό (δεξιό) παιδί αν είναι μικρότερο (αντίστοιχα μεγαλύτερο) από το στοιχείο της συγκεκριμένης κορυφής.

2.2 Διελεύσεις Δέντρων

Υπάρχουν (τουλάχιστον) τρεις διαφορετικοί συστηματικοί αναδρομικοί τρόποι (διελεύσεις / διασχίσεις - traversals) να τυπώσουμε όλες τις κορυφές ενός δυαδικού δέντρου με ρίζα.

Η *προ-διατεταγμένη* διέλευση (preorder traversal) λειτουργεί αναδρομικά τυπώνοντας πρώτα τη Ρίζα, μετά τα στοιχεία του Αριστερού υποδέντρου, και τέλος τα στοιχεία του Δεξιού υποδέντρου. Συμβολικά Ρίζα-Αριστερό-Δεξί.

Η *ενδο-διατεταγμένη* διέλευση (inorder traversal) λειτουργεί αναδρομικά τυπώνοντας πρώτα τα στοιχεία του Αριστερού υποδέντρου, μετά τη Ρίζα, και τέλος τα στοιχεία του Δεξιού υποδέντρου. Συμβολικά Αριστερό-Ρίζα-Δεξί. Όταν έχουμε ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης, η ενδο-διατεταγμένη διέλευση τυπώνει τα στοιχεία του δέντρου σε αύξουσα σειρά. Η αντίστροφη ενδο-διατεταγμένη διέλευση Δεξί-Ρίζα-Αριστερό σε φθίνουσα σειρά). Αυτό μπορεί να αποδειχθεί εύκολα με επαγωγή στο ύψος του δέντρου. Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη.

Η *μετά-διατεταγμένη* διέλευση (postorder traversal) λειτουργεί αναδρομικά τυπώνοντας πρώτα τα στοιχεία του Αριστερού υποδέντρου, μετά τα στοιχεία του Δεξιού υποδέντρου, και τέλος τη Ρίζα. Συμβολικά Αριστερό-Δεξί-Ρίζα.

Παρατηρείστε ότι το Αριστερό υποδέντρο προηγείται πάντα του Δεξιού. Ο μνημονικός κανόνας είναι ότι το πρόθεμα που καθορίζει το είδος της διέλευσης (προ-, ενδο-, μετά-) δείχνει πότε εξετάζουμε τη Ρίζα σε σχέση με τα στοιχεία του Αριστερού και του Δεξιού υποδέντρου (πριν, ενδιάμεσα, μετά).

[3] Λέμε ότι ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης με n κορυφές είναι ζυγισμένο όταν το μέγιστο ύψος του είναι $O(\log n)$.