Θεωρία Γραφημάτων: Επίπεδα Γραφήματα

Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων
Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 83200 Καρλόβασι, Σάμος
Email: fotakis@aegean.gr

1 Βασικοί Ορισμοί

Ένα γράφημα είναι *επίπεδο* (planar) αν μπορεί να αποτυπωθεί / "ζωγραφιστεί" στο επίπεδο χωρίς να διασταυρώνονται οι ακμές του. Κάθε επίπεδη αποτύπωση ενός (επίπεδου) γραφήματος ορίζει "κλειστές περιοχές" που ονομάζονται *όψεις* (faces) του γραφήματος. Τυπικά, δεδομένης μιας επίπεδης αποτύπωσης ενός γραφήματος, όψη ονομάζεται κάθε περιοχή του επιπέδου που περιορίζεται από ακμές και δεν μπορεί να χωριστεί σε μικρότερες όψεις. Οι εσωτερικές όψεις (interior faces) του γραφήματος είναι πεπερασμένες. Η εξωτερική όψη (exterior face) είναι απεριόριστη και περιλαμβάνει ολόκληρη την περιοχή του επιπέδου που εκτείνεται εκτός της αποτύπωσης του γραφήματος.

Κάθε ακμή ενός επίπεδου γραφήματος συμμετέχει σε δύο το πολύ όψεις. Αν μία ακμή ανήκει σε κύκλο, αυτή αποτελεί σύνορο / συμμετέχει σε δύο όψεις. Αν μία ακμή δεν ανήκει σε κύκλο, αυτή συμμετέχει σε μία όψη. Κάθε άκυκλο επίπεδο γράφημα έχει μόνο μία όψη, την εξωτερική. Παρατηρείστε επίσης ότι αν ένα γράφημα είναι επίπεδο, κάθε υπογράφημα του είναι επίσης επίπεδο.

2 Ο Τύπος του Euler

Έστω συνεκτικό επίπεδο γράφημα G (όχι απαραίτητα απλό) με n κορυφές, m ακμές, και f όψεις. Ο τύπος του Euler συνδέει αυτές τις τρεις ποσότητες:

$$n + f = m + 2$$

Ο τύπος του Euler γενικεύεται και για μη συνεκτικά γραφήματα, αλλά αυτό είναι εκτός των ορίων της ύλης για τη συγκεκριμένη ενότητα. Μια σημαντική συνέπεια του τύπου του Euler (από τις πολλές) είναι ότι ο αριθμός των όψεων ενός επίπεδου γραφήματος είναι χαρακτηριστικό του γραφήματος και δεν εξαρτάται από την αποτύπωση του γραφήματος στο επίπεδο (για συνεκτικά γραφήματα, ο αριθμός των όψεων είναι πάντα $f = m - n + 2$ ανεξάρτητα της αποτύπωσης).

Ένας τρόπος να αποδειχθεί ο τύπος του Euler είναι με επαγωγή στον αριθμό των όψεων του γραφήματος[1]. Αν το γράφημα έχει μία μόνο όψη (την εξωτερική), τότε αυτό είναι άκυκλο και συνεκτικό, δηλαδή δέντρο. Ο τύπος έπεται από το γεγονός ότι $n = m+1$. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι ο τύπος του Euler ισχύει για κάθε συνεκτικό επίπεδο γράφημα με f το πολύ όψεις. Έστω

[1] Η απόδειξη χρησιμοποιεί έννοιες που θα συναντήσουμε για πρώτη φορά στην ύλη των δέντρων. Μπορείτε λοιπόν να την παραλείψετε σε αυτή τη φάση. Είναι όμως καλό να επιστρέψετε σε αυτή όταν θα έχετε μελετήσει τις βασικές ιδιότητες των δέντρων.

οποιοδήποτε συνεκτικό επίπεδο γράφημα με n κορυφές, m ακμές, και $f+1$ όψεις. Πρέπει να δείξουμε ότι $n+(f+1)=m+2$.

Αφού το γράφημα έχει τουλάχιστον 2 όψεις, πρέπει να έχει έναν τουλάχιστον κύκλο και άρα τουλάχιστον μία ακμή που δεν είναι γέφυρα[2]. Η αφαίρεση μιας ακμής e που ανήκει σε κύκλο μειώνει τον αριθμό των όψεων κατά 1 (οι δύο όψεις που χωρίζονται από την e ενώνονται σε μία), μειώνει τον αριθμό των ακμών κατά 1, ενώ δεν επηρεάζει τον αριθμό των κορυφών, τη συνεκτικότητα, και την επιπεδότητα. Επομένως, το γράφημα που προκύπτει από την αφαίρεση της e είναι συνεκτικό και επίπεδο, και έχει n κορυφές, $m-1$ ακμές, και f όψεις. Από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε

$$n+f=(m-1)+2 \Rightarrow n+f+1=m+2$$

όπως απαιτείται.

Ο τύπος του Euler γενικεύεται σε γραφήματα με k συνεκτικές συνιστώσες. Σε κάθε επίπεδο γράφημα με n κορυφές, m ακμές, f όψεις, και k συνεκτικές συνιστώσες, ισχύει ότι

$$n+f=m+k+1$$

Η απόδειξη του γενικευμένου τύπου γίνεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο. Η ειδική περίπτωση του τύπου του Euler για τα συνεκτικά γραφήματα προκύπτει θέτοντας $k=1$ (κάθε συνεκτικό γράφημα έχει μία μόνο συνεκτική συνιστώσα).

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler, μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε απλό επίπεδο γράφημα G με n κορυφές και m ακμές έχει $m \leq 3n-6$ ακμές. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το γράφημα G είναι συνεκτικό (αν δεν είναι μπορούμε να προσθέσουμε ακμές ώστε να γίνει συνεκτικό παραμένοντας απλό και επίπεδο).

Έστω f ο αριθμός των όψεων του G. Αφού το γράφημα είναι απλό, ο μικρότερος κύκλος έχει μήκος 3. Κάθε όψη περιλαμβάνει λοιπόν τουλάχιστον 3 ακμές. Επομένως, το άθροισμα των ακμών όλων των όψεων είναι τουλάχιστον $3f$. Από την άλλη πλευρά, κάθε ακμή συμμετέχει το πολύ σε δύο όψεις. Επομένως, το άθροισμα των ακμών όλων των όψεων είναι το πολύ $2m$. Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες, έχουμε

$$3f \leq \text{άθροισμα ακμών όλων των όψεων} \leq 2m \Rightarrow f \leq \tfrac{2}{3}m$$

Συνδυάζοντας τον τύπο του Euler με την παραπάνω ανισότητα, έχουμε

$$m+2=n+f \leq n+\tfrac{2}{3}m \Rightarrow \tfrac{1}{3}m \leq n-2 \Rightarrow m \leq 3n-6$$

Η ανισότητα αυτή είναι ακριβής (tight) αφού κάθε απλό επίπεδο γράφημα με n κορυφές και όλες του τις όψεις τρίγωνα (δηλ. αποτελούμενες από ακριβώς 3 ακμές την καθεμία) έχει ακριβώς $3n-6$ ακμές.

Χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία, μπορείτε να αποδείξετε ότι κάθε απλό διμερές επίπεδο γράφημα με n κορυφές και m ακμές έχει $m \leq 2n-4$ ακμές. Η μόνη διαφοροποίηση

[2] Θυμίζουμε ότι γέφυρα είναι κάθε ακμή που δεν ανήκει σε κύκλο. Η αφαίρεση μιας γέφυρας αίρει τη συνεκτικότητα του γραφήματος.

είναι ότι αφού το γράφημα είναι απλό και διμερές[3], ο μικρότερος κύκλος του έχει μήκος 4. Έτσι κάθε όψη ενός τέτοιου γραφήματος περιλαμβάνει τουλάχιστον 4 ακμές. Με την ίδια συλλογιστική, αποδεικνύουμε ότι $f \leq m/2$. Αντικαθιστώντας στον τύπο του Euler, παίρνουμε το ζητούμενο.

Άσκηση. Κατασκευάστε απλά επίπεδα γραφήματα με 6 κορυφές και 12 ακμές, και με 7 κορυφές και 15 ακμές. Επίσης κατασκευάστε απλό επίπεδο διμερές γράφημα με 8 κορυφές και 12 ακμές. □

Άσκηση. Να αποδείξετε ότι κάθε απλό επίπεδο γράφημα έχει τουλάχιστον μια κορυφή με βαθμό μικρότερο ή ίσο του 5.
Αφού ο αριθμός των ακμών του γραφήματος είναι το πολύ $3n-6$, το άθροισμα του βαθμού όλων των κορυφών δεν μπορεί να ξεπερνά το $6n-12$. Συνεπώς, υπάρχει μία κορυφή με βαθμό που δεν ξεπερνά το 5. (Διαφορετικά, ας υποθέσουμε ότι όλες οι κορυφές έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 6. Το γράφημα θα έχει τουλάχιστον $6n/2 = 3n$ ακμές. Αυτό είναι αντίφαση, αφού κάθε απλό επίπεδο γράφημα έχει το πολύ $3n-6$ ακμές). □

Άσκηση. Να αποδείξετε ότι το K_5 και το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδα.
Το K_5 δεν είναι επίπεδο γιατί είναι απλό γράφημα και έχει 10 ακμές, αριθμός που ξεπερνά το $3 \times 5 - 6 = 9$. Το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο, γιατί είναι ένα απλό διμερές γράφημα με 9 ακμές, αριθμός που ξεπερνά το $2 \times 6 - 4 = 8$. □

Άσκηση. Να αποδείξετε ότι για κάθε γράφημα G με $n \geq 11$ κορυφές, είτε το G είτε το συμπληρωματικό του δεν είναι επίπεδο.
Έστω m ο αριθμός των ακμών του G και m' ο αριθμός των ακμών του συμπληρωματικού γραφήματος. Αφού πρόκειται για συμπληρωματικά γραφήματα, είναι $m + m' = n(n-1)/2$. Αν τόσο το G όσο και το συμπληρωματικό του είναι επίπεδα, θα ισχύει ότι $m \leq 3(n-2)$ και $m' \leq 3(n-2)$. Προσθέτοντας αυτές τις αντισότητες κατά μέλη, παίρνουμε:

$$n(n-1)/2 = m + m' = 6(n-2) \Rightarrow n^2 - n \leq 12n - 14 \Rightarrow n^2 - 13n + 24 \leq 0$$

Αυτό είναι άτοπο γιατί η τελευταία ανισότητα δεν ισχύει για κανένα $n \geq 11$. □

3 Χαρακτηρισμός Επίπεδων Γραφημάτων - Το Θεώρημα του Kuratowski

Απλοποίηση σειράς σε ένα γράφημα είναι η "παράλειψη" μιας κορυφής βαθμού 2 (δηλ. δύο ακμές ανάμεσα στις οποίες παρεμβάλλεται μία κορυφή βαθμού 2 αντικαθίστανται από μία ακμή). Παρατηρείστε ότι η απλοποίηση σειράς δεν επηρεάζει την επιπεδότητα του γραφήματος (δηλ. μια απλοποίηση σειράς δεν μπορεί να κάνει επίπεδο ένα γράφημα που δεν είναι ή το αντίστροφο). Δύο γραφήματα είναι *ομοιομορφικά* (homeomorphic) αν μπορούν να *απλοποιηθούν* σε δύο ισομορφικά γραφήματα διενεργώντας μόνο απλοποιήσεις σειράς. Διαισθητικά, τα ομοιομορφικά γραφήματα είναι "τοπολογικά ισοδύναμα".

Το Θεώρημα του Kuratowski είναι ιδιαίτερα σημαντικό γιατί χαρακτηρίζει την κλάση των επίπεδων γραφημάτων με βάση τα δύο απλούστερα μη-επίπεδα γραφήματα.

[3] Ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν δεν έχει κύκλους περιττού μήκους. Συνεπώς, ένα απλό διμερές γράφημα δεν έχει κύκλους μήκους τρία (τρίγωνα).

Θεώρημα 1 (Θεώρημα Kuratowski). *Ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό με το K_5 ή το $K_{3,3}$.*

Με απλά λόγια, κάθε μη-επίπεδο γράφημα πρέπει να περιέχει ένα υπογράφημα "τοπολογικά ισοδύναμο" με ένα από τα δύο απλούστερα μη-επίπεδα γραφήματα.

Πώς δείχνουμε ότι ένα γράφημα είναι επίπεδο. Αποτυπώνουμε / "ζωγραφίζουμε" το γράφημα στο επίπεδο χωρίς να διασταυρώνονται οι ακμές του.

Πώς δείχνουμε ότι ένα γράφημα δεν είναι επίπεδο. Γνωρίζουμε ήδη δύο τρόπους. Ο πρώτος είναι να δείξουμε ότι έχει τόσο πολλές ακμές ώστε να παραβιάζει τα πορίσματα του τύπου του Euler (βλ. απόδειξη ότι τα K_5 και $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδα). Ο δεύτερος είναι να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα του Kuratowski.

Άσκηση. Να δείξετε ότι το συμπληρωματικό του γραφήματος Petersen (Σχήμα 5Π.4, σελ. 217) δεν είναι επίπεδο.

Το γράφημα Petersen έχει 10 κορυφές και 15 ακμές. Το συμπληρωματικό του έχει επίσης 10 κορυφές και $\frac{10\times 9}{2} - 15 = 45 - 15 = 30$ ακμές. Όμως $30 > 3 \times 10 - 6 = 24$ όπως απαιτείται. □

Άσκηση. Να δείξετε ότι το γράφημα Petersen (Σχήμα 5Π.4, σελ. 217) δεν είναι επίπεδο.

Το γράφημα Petersen έχει $15 \leq 24$ ακμές και άρα δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι κάθε απλό επίπεδο γράφημα έχει το πολύ $3n-6$ κορυφές. Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα του Kuratowski ή να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Euler σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το γράφημα Petersen έχει κύκλους μήκους 5 ή μεγαλύτερους. □

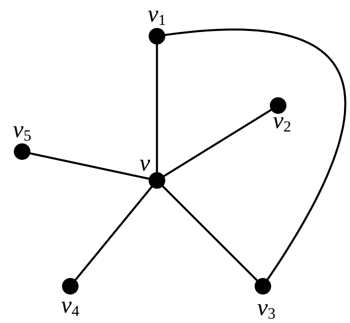
Άσκηση. Έστω γραφήματα G_1 με n_1 κορυφές και m_1 ακμές και G_2 με n_2 κορυφές και m_2 ακμές. Αν τα G_1 και G_2 είναι ομοιομορφικά, να δείξετε ότι $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$.

Αφού τα G_1 και G_2 είναι ομοιομορφικά, μετά από τις κατάλληλες απλοποιήσεις σειράς θα πρέπει να καταλήξουν να είναι ισομορφικά με το ίδιο γράφημα G. Έστω ότι το G έχει n κορυφές και m ακμές. Παρατηρώ ότι κάθε απλοποίηση σειράς μειώνει τόσο τον αριθμό των κορυφών όσο και τον αριθμό των ακμών κατά 1. Επομένως, οι απλοποιήσεις σειράς δεν μεταβάλουν τη διαφορά του αριθμού των ακμών από τον αριθμό των κορυφών του γραφήματος. Αφού το G προκύπτει από το G_1 με απλοποιήσεις σειράς, είναι $m - n = m_1 - n_1$. Ομοίως για το G_2, $n - m = m_2 - n_2$. Εξισώνοντας τα δύο μέλη, έχουμε $m_1 - n_1 = m_2 - n_2 \Rightarrow n_1 + m_2 = n_2 + m_1$. □

4 Χρωματικός Αριθμός Γραφημάτων

(Έγκυρος) *χρωματισμός* ενός γραφήματος ονομάζεται κάθε ανάθεση χρωμάτων στις κορυφές του ώστε κάθε ζευγάρι κορυφών που συνδέεται με ακμή να έχει διαφορετικό χρώμα. Ο *χρωματικός αριθμός* ενός γραφήματος είναι ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων για τον οποίο υπάρχει ένας (έγκυρος) χρωματισμός του. Ο χρωματικός αριθμός ενός γραφήματος G συμβολίζεται με $\chi(G)$.

Σε έναν έγκυρο χρωματισμό, οι κορυφές με το ίδιο χρώμα συγκροτούν ένα σύνολο ανεξαρτησίας (independent set) αφού δεν υπάρχει καμία ακμή μεταξύ τους. Κάθε έγκυρος χρωματισμός διαμερίζει τις κορυφές του γραφήματος σε τόσα σύνολα ανεξαρτησίας (independent sets) όσα και τα χρώματα που χρησιμοποιεί. Επομένως, ο χρωματικός αριθμός ενός γραφήματος είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο οι κορυφές του μπορούν να διαμεριστούν σε σύνολα ανεξαρτησίας. Ένα γράφημα με χρωματικό αριθμό k είναι δηλαδή ένα k-μερές (k-partite) γράφημα.



Σχήμα 1. Η κορυφή v βαθμού 5 και οι γειτονικές της κορυφές.

Τα διμερή γραφήματα έχουν χρωματικό αριθμό 2. Επομένως, ένα γράφημα έχει χρωματικό αριθμό 2 αν και μόνο αν δεν έχει κύκλους με περιττό μήκος. Επίσης είναι $\chi(K_n) = n$, $\chi(K_n - v) = n - 1$ για κάθε κορυφή v, $\chi(\overline{K_n}) = 1$, και $\chi(C_n) = \begin{cases} 2 \text{ αν } n \text{ άρτιος} \\ 3 \text{ αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι κάθε γράφημα με μέγιστο βαθμό Δ έχει χρωματικό αριθμό το πολύ $\Delta + 1$. Η ιδέα είναι ότι τα $\Delta + 1$ χρώματα είναι αρκετά για να χρωματίσουμε μια κορυφή και τους γειτόνους της με διαφορετικά χρώματα. Επομένως, ο αλγόριθμος που εξετάζει τις κορυφές μία-προς-μία και χρωματίζει κάθε κορυφή με το μικρότερο διαθέσιμο χρώμα υπολογίζει ένα (έγκυρο) χρωματισμό των κορυφών με όχι περισσότερα από $\Delta + 1$ χρώματα. Από την άλλη μεριά, κάθε γράφημα που περιέχει μια κλίκα μεγέθους k σαν υπογράφημα έχει χρωματικό αριθμό τουλάχιστον k.

4.1 Χρωματικός Αριθμός Επίπεδου Γραφήματος

Πρόσφατα αποδείχτηκε η διάσημη εικασία ότι κάθε επίπεδο γράφημα (ισοδύναμα επίπεδος χάρτης) μπορεί να χρωματιστεί με 4 χρώματα (4-color theorem). Εδώ θα αποδείξουμε ότι κάθε επίπεδο γράφημα μπορεί να χρωματιστεί με 5 το πολύ χρώματα.

Θεώρημα 2. *Κάθε επίπεδο γράφημα μπορεί να χρωματιστεί με 5 το πολύ χρώματα.*

Proof. Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή στον αριθμό των κορυφών του γραφήματος. Ο ισχυρισμός είναι τετριμένα αληθής αν το γράφημα έχει μέχρι 5 κορυφές. Επαγωγικά υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για κάθε επίπεδο γράφημα με $n - 1$ το πολύ κορυφές. Θα δείξουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής και κάθε επίπεδο γράφημα με n κορυφές.

Έστω $G(V, E)$ απλό επίπεδο γράφημα με n κορυφές (αν το γράφημα δεν είναι απλό, μπορούμε να αγνοήσουμε τις παράλληλες ακμές και τους βρόγχους γιατί δεν παίζουν κανένα ρόλο στο χρωματισμό γραφημάτων). Γνωρίζουμε ότι κάθε απλό γράφημα έχει μια κορυφή με βαθμό μικρότερο ή ίσο του 5. Έστω v μια κορυφή του G με βαθμό μικρότερο ή ίσο του 5, και $v_1, v_2, \ldots, v_5$ οι γείτονες του v (η αρίθμηση γίνεται στη φορά των δεικτών του ρολογιού, βλ. Σχήμα 1). Αφαιρώντας τη v προκύπτει ένα επίπεδο γράφημα με $n - 1$ κορυφές που μπορεί να χρωματιστεί με 5 χρώματα από την επαγωγική υπόθεση. Θεωρούμε έναν τέτοιο χρωματισμό του γραφήματος $G \setminus v$.

Αν υπάρχουν δύο γείτονες της v με το ίδιο χρώμα, τότε χρωματίζουμε τη v με το χρώμα που δεν χρησιμοποιείται από τους γειτόνους της και ολοκληρώνω το χρωματισμό του G με 5 χρώματα. Έστω λοιπόν ότι όλοι οι γείτονες της v έχουν διαφορετικά χρώματα (υποθέτουμε ότι η κορυφή v_i έχει το χρώμα i, $i = 1, \ldots, 5$).

Αν οι κορυφές v_1 και v_3 δεν συνδέονται με μονοπάτι στο επαγώμενο υπογράφημα $G_{1,3}$ που ορίζεται από τις κορυφές με χρώματα 1 και 3, τότε μπορούμε να αλλάξουμε αμοιβαία τα χρώματα των κορυφών στη συνεκτική συνιστώσα του $G_{1,3}$ που ανήκει η κορυφή v_1 (δηλ. κάθε κορυφή της συγκεκριμένης συνεκτικής συνιστώσας του $G_{1,3}$ που έχει χρώμα 1 χρωματίζεται με το χρώμα 3, και κάθε κορυφή χρώματος 3 χρωματίζεται 1). Τώρα η κορυφή v_1 έχει χρώματα 3 και μπορούμε να χρωματίσουμε την κορυφή v με το χρώμα 1.

Έστω λοιπόν ότι οι κορυφές v_1 και v_3 συνδέονται με μονοπάτι στο $G_{1,3}$. Λόγω της επιπεδότητας του G, οι κορυφές v_2 και v_4 δεν συνδέονται με μονοπάτι στο επαγώμενο υπογράφημα $G_{2,4}$ που ορίζεται από τις κορυφές με χρώματα 2 και 4. Επομένως, μπορούμε να αλλάξουμε αμοιβαία τα χρώματα των κορυφών στη συνεκτική συνιστώσα του $G_{2,4}$ που ανήκει η κορυφή v_2 και να χρωματίσουμε την κορυφή v με το χρώμα 2. $\square$