Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων
Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 83200 Καρλόβασι, Σάμος
Email: `fotakis@aegean.gr`

1 Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

Οι συνήθεις ΓΣ μετρούν συνδυασμούς αντικειμένων αλλά δεν μπορούν να μετρήσουν διατάξεις αντικειμένων (ο λόγος είναι ότι ο πολλαπλασιασμός στους πραγματικούς αριθμούς είναι αντιμεταθετική πράξη).

Για να μετρήσω διατάξεις k αντικειμένων από n χρειάζεται να πολλαπλασιάσω το συντελεστή του x^k με $k!$ (θυμηθείτε ότι $P(n,k) = C(n,k) \times k!$). Αυτό ακριβώς συμβαίνει αν ενδιαφέρομαι για το συντελεστή του $\frac{x^k}{k!}$ στο ανάπτυγμα της ΓΣ αντί για το συντελεστή του x^k. Ουσιαστικά πολλαπλασιάζω και διαιρώ τον k-οστό όρο του αθροίσματος με $k!$: το x^k διαιρείται $k!$ και ο συντελεστής του x^k πολλαπλασιάζεται με $k!$ ώστε η συνολική ποσότητα να παραμείνει αναλλοίωτη.

Παράδειγμα: Όταν έχω n διαφορετικά αντικείμενα χωρίς δυνατότητα επανάληψης, η ΓΣ είναι:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{x^k}{k!}$$

Στο πρώτο άθροισμα, ο συντελεστής του x^k δίνει τον αριθμό των συνδυασμών k από n αντικείμενα χωρίς επανάληψη. Στο τελευταίο άθροισμα, ο συντελεστής του $\frac{x^k}{k!}$ δίνει τον αριθμό των διατάξεων k από n αντικείμενα χωρίς επανάληψη.

Η *εκθετική Γεννήτρια Συνάρτηση* μιας ακολουθίας $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ δίνεται από τη σειρά $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}$. Ο συντελεστής του $\frac{x^i}{i!}$ είναι ο i-οστός όρος της ακολουθίας (δηλ. ο a_i). Οι εκθετικές ΓΣ οφείλουν το ονομά τους στην ταυτότητα:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Παράδειγμα: Η ΓΣ για τις μεταθέσεις n *ίδιων* αντικειμένων είναι $\frac{x^n}{n!}$. Πράγματι υπάρχει μία και μόνη μετάθεση όταν όλα τα αντικείμενα είναι ίδια.

Παράδειγμα: Αν έχω n αντικείμενα χωρισμένα σε k ομάδες (κάθε ομάδα αποτελείται από ίδια αντικείμενα) με πληθάριθμους $n_1, \ldots, n_k$, $n = n_1 + \cdots + n_k$, η ΓΣ είναι:

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{x^{n_i}}{n_i!} = \frac{x^n}{n_1! \ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} \frac{x^n}{n!}$$

όπου ο συντελεστής του $\frac{x^n}{n!}$ δίνει τον αριθμό των διαφορετικών μεταθέσεων.

Παράδειγμα: Αν ενδιαφέρομαι για διατάξεις από n αντικείμενα με απεριόριστες επαναλήψεις (κάθε αντικείμενο μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη διάταξη καμία ή μία ή δύο κοκ. φορές), η εκθετική ΓΣ είναι:

$$(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)^n = e^{nx} = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!}$$

Ο συντελεστής του $\frac{x^k}{k!}$, που είναι n^k, δίνει τις διαφορετικές διατάξεις k από n αντικείμενα με επανάληψη.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί ο αριθμός των τετραδικών αριθμών με μήκος k στους οποίους:
α) Τα ψηφία 1, 2 και 3 χρησιμοποιούνται τουλάχιστον μία φορά,
β) Έχουμε άρτιο αριθμό εμφανίσεων του ψηφίου 0 και
γ) Έχουμε περιττό αριθμό εμφανίσεων του ψηφίου 0.

Αφού διαφορετικές ακολουθίες ψηφίων δίνουν διαφορετικούς αριθμούς, πρόκειται για πρόβλημα διατάξεων και θα χρησιμοποιήσω εκθετικές ΓΣ.
α) Η ΓΣ είναι:

$$e^x(e^x - 1)^3 = e^x(e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1) = e^{4x} - 3e^{3x} + 3e^{2x} - e^x$$

Το $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ είναι η εκθετική ΓΣ για τις διατάξεις ενός αντικειμένου με επανάληψη χωρίς περιορισμούς (εδώ αντιστοιχεί στο ψηφίο 0). Το $e^x - 1 = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ είναι η εκθετική ΓΣ για τις διατάξεις ενός αντικειμένου με επανάληψη όπου το αντικείμενο εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά (εδώ εμφανίζεται μία φορά για καθένα από τα ψηφία 1, 2 και 3).

Το ζητούμενο δίνεται από το συντελεστή του $\frac{x^k}{k!}$, που είναι $4^k - 3^{k+1} + 3 \cdot 2^k - 1$.
β) Ξεκινώ από την παρατήρηση ότι

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

είναι η εκθετική ΓΣ για διατάξεις ενός αντικειμένου με επανάληψη όπου το αντικείμενο εμφανίζεται άρτιο αριθμό φορών. Εδώ ο περιορισμός για άρτιο αριθμό εμφανίσεων υπάρχει για το ψηφίο 0. Τα άλλα ψηφία δεν έχουν περιορισμούς. Συνεπώς η ΓΣ για τα τέσσερα ψηφία είναι:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} e^{3x} = \frac{e^{4x} + e^{2x}}{2}$$

Το ζητούμενο δίνεται από το συντελεστή του $\frac{x^k}{k!}$, που είναι $\frac{4^k + 2^k}{2}$.
γ) Ξεκινώ από την παρατήρηση ότι

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots$$

είναι η εκθετική ΓΣ για διατάξεις ενός αντικειμένου με επανάληψη όπου το αντικείμενο εμφανίζεται περιττό αριθμό φορών. Εδώ ο περιορισμός για περιττό αριθμό εμφανίσεων υπάρχει για το ψηφίο 0. Τα άλλα ψηφία δεν έχουν περιορισμούς. Συνεπώς η ΓΣ για τα τέσσερα ψηφία είναι:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} e^{3x} = \frac{e^{4x} - e^{2x}}{2}$$

Το ζητούμενο δίνεται από το συντελεστή του $\frac{x^k}{k!}$, που είναι $\frac{4^k-2^k}{2}$.

Παρατηρώ ότι το άθροισμα των (β) και (γ) δίνει 4^k όπως αναμένεται.

Παράδειγμα: Ζητείται η ΓΣ για τη διανομή k διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές όταν δεν έχει σημασία η σειρά των αντικειμένων στις υποδοχές και καμία υποδοχή δεν πρέπει να μείνει κενή ($k \geq n$).

Η διανομή διακεκριμένων αντικειμένων σε διακεκριμένες υποδοχές είναι πρόβλημα διατάξεων. Η ΓΣ για κάθε υποδοχή είναι

$$e^x - 1 = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

αφού η υποδοχή μπορεί να περιέχει ένα, δύο, κοκ. αντικείμενα. Η ΓΣ για όλες τις υποδοχές προκύπτει από τον κανόνα του γινομένου και είναι

$$(e^x - 1)^n$$

Ο ζητούμενος συντελεστής είναι αυτός του $\frac{x^k}{k!}$.

Παράδειγμα: Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να μοιράσω τα 52 διαφορετικά χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίκτες (διακεκριμένους) όταν κάθε παίκτης πρέπει να πάρει τουλάχιστον ένα χαρτί.

Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, η εκθετική ΓΣ[1] είναι:

$$(e^x - 1)^4 = e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1$$

και ο ζητούμενος συντελεστής είναι αυτός του $\frac{x^{52}}{52!}$. Το αποτέλεσμα είναι $4^{52} - 4 \cdot 3^{52} + 6 \cdot 2^{52} - 4$.

[1] Προσέξτε ότι τα χαρτιά είναι μόνο 52 και κανονικά θα έπρεπε να έχω σταματήσει το άθροισμα $\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ στον όρο $\frac{x^{49}}{49!}$ (αφού κάθε παίκτης παίρνει τουλάχιστον 1 χαρτί, κανένας δεν μπορεί να πάρει περισσότερα από 49). Αυτό το άθροισμα *δεν* είναι ίσο $e^x - 1$ και η αλγεβρική αντιμετώπιση είναι δυσκολότερη. Για ευκολία θεωρώ το άθροισμα μέχρι το άπειρο. Αυτό δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα επειδή οι μεγαλύτερες δυνάμεις του x δεν επηρεάζουν το ζητούμενο συντελεστή.