Σύντομη Επανάληψη Στοιχειώδους Συνδυαστικής

Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων
Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 83200 Καρλόβασι, Σάμος
Email: fotakis@aegean.gr

1 Στοιχειώδης Συνδυαστική

Αντικείμενο: Να μετρήσουμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να συμβούν διάφορα γεγονότα χρησιμοποιώντας συνδυαστικά επιχειρήματα.

Κανόνας γινομένου. Αφορά μόνο *ανεξάρτητα* γεγονότα, δηλαδή γεγονότα που το αποτέλεσμα του ενός δεν εξαρτάται με κανένα τρόπο από το αποτέλεσμα του άλλου[1]. Αν έχουμε τα ανεξάρτητα γεγονότα A και B, και το γεγονός A συμβαίνει με n_A τρόπους και το γεγονός B με n_B τρόπους, το A και B συμβαίνει με $n_A \times n_B$ τρόπους.

Παράδειγμα: Οι καρκινικές συμβολοσειρές μήκους 10 με κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου (χωρίς τόνους) είναι 24^5, αφού διαλέγω το πρώτο, ..., πέμπτο γράμμα ανεξάρτητα και με 24 τρόπους το καθένα. Αυτά καθορίζουν και τα πέντε επόμενα γράμματα. Οι επιλογές των πέντε πρώτων γραμμάτων συνιστούν ανεξάρτητα γεγονότα, αφού η επιλογή του ενός γράμματος δεν επηρεάζει με κανένα τρόπο την επιλογή του άλλου.

Κανόνας αθροίσματος. Αφορά μόνο *αμοιβαία αποκλειόμενα* γεγονότα όπου η εμφάνιση του ενός αποκλείει την ταυτόχρονη εμφάνιση του άλλου. Αν έχουμε τα αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα A και B, και το γεγονός A συμβαίνει με n_A τρόπους και το γεγονός B με n_B τρόπους, το A ή B συμβαίνει με $n_A + n_B$ τρόπους.

Παράδειγμα: Έχω 24 αριθμημένες (διαφορετικές) πράσινες μπάλες και 24 αριθμημένες κόκκινες μπάλες. Υπάρχουν $24^2 = 576$ διαφορετικοί τρόποι να διαλέξω μία πράσινη και μία κόκκινη μπάλα (κανόνας του γινομένου αφού η επιλογή της πράσινης μπάλας είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της κόκκινης μπάλας).

Για να μετρήσω τους τρόπους να διαλέξω δύο μπάλλες (χωρίς περιορισμό χρώματος) ορίζω τα αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα: Διαλέγω πράσινη και κόκκινη (24^2 τρόποι), διαλέγω δύο κόκκινες (24×23 τρόποι), και διαλέγω δύο πράσινες (24×23 τρόποι). Εφαρμόζω κανόνα αθροίσματος και έχω σύνολο: $24^2 + 24 \times 23 + 24 \times 23 = 1680$ τρόποι.

Παράδειγμα: Έχω 5 Ελληνικά, 7 Αγγλικά, και 10 Γερμανικά βιβλία (συνολικά 22). Υπάρχουν $22 \times 21 = 462$ διαφορετικοί τρόποι να διαλέξω δύο βιβλία (χωρίς περιορισμούς). Όμως αν θέλω να διαλέξω δύο βιβλία με διαφορετική γλώσσα, έχω τις περιπτώσεις (αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα): Διαλέγω Ελληνικό και Αγγλικό (35 τρόποι), Αγγλικό και Γερμανικό (70 τρόποι), ή Ελληνικό και Γερμανικό (50 τρόποι). Ο κανόνας αθροίσματος δίνει 155 διαφορετικούς τρόπους.

[1] Η ανεξαρτησία δύο γεγονότων Α και Β ελέγχεται με την ερώτηση: "Αν μου αποκαλύψει κάποιος το αποτέλεσμα του γεγονότος Α, αλλάζει κάτι σε αυτό που ξέρω για το γεγονός Β;". Τα γεγονότα Α και Β είναι ανεξάρτητα αν και μόνο αν η απάντηση είναι "όχι".

1.1 Μεταθέσεις — Διατάξεις Αντικειμένων

Πόσοι διαφορετικοί τρόποι να βάλω ένα σύνολο διακεκριμένων αντικειμένων στη σειρά (δηλαδή η θέση κάθε αντικειμένου έχει σημασία).

Μετάθεσεις n αντικειμένων σε n θέσεις: $n! = n(n-1)\cdots 1 = P(n,n)$.

Διάταξεις n αντικειμένων σε k θέσεις: $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = P(n,k)$.

Παράδειγμα: Όταν έχω 20 μαθητές και θέλω να διαλέξω 5 και να τους βάλω στη σειρά, υπάρχουν $20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16 = P(20,5) = \frac{20!}{15!}$ διαφορετικοί τρόποι να το κάνω.

Μεταθέσεις ομάδων αντικειμένων. Έχω k διαφορετικές ομάδες αντικειμένων, η πρώτη έχει n_1 ίδια αντικείμενα, η δεύτερη n_2, …, η k-οστή n_k: $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Οι διαφορετικές μεταθέσεις αυτών των αντικειμένων είναι

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

Παράδειγμα: Έχω 7 α, 8 β, 5 γ, και 4 δ. Μπορώ να φτιάξω $\frac{24!}{7!8!5!4!}$ διαφορετικές συμβολοσειρές με αυτά.

Διατάξεις με επανάληψη. Έχω n αντικείμενα και θέλω να διαλέξω (με επανάληψη) k από αυτά και να τα βάλω στη σειρά. Οι διαφορετικές διατάξεις είναι n^k (n επιλογές για το πρώτο αντικείμενο, n για το δεύτερο, κοκ.).

Είναι ακριβώς το ίδιο με το να τοποθετήσω k διακεκριμένα αντικείμενα σε n διακεκριμένες υποδοχές όταν δεν παίζει ρόλο η σειρά των αντικειμένων στις υποδοχές. Πράγματι, το πρώτο αντικείμενο διαλέγει με n τρόπους την υποδοχή του, το δεύτερο επίσης, κοκ.

Παράδειγμα: Τετραψήφιοι αριθμοί στο δεκαδικό σύστημα: Διαλέγω (με επανάληψη) 4 ψηφία από 10 διαφορετικά ψηφία και έχω 10^4 τρόπους να το κάνω.

Παράδειγμα: n-ψήφιοι αριθμοί στο δυαδικό σύστημα: 2^n.

Παράδειγμα: Ο αριθμός διαφορετικών υποσυνόλων ενός συνόλου S με n στοιχεία είναι 2^n γιατί κάθε αντικείμενο έχει δύο επιλογές / υποδοχές: να συμπεριληφθεί ή να μην συμπεριληφθεί σε κάποιο υποσύνολο.

Διακεκριμένα αντικείμενα σε διακεκριμένες υποδοχές με τη σειρά να έχει σημασία. Πόσοι είναι οι τρόποι να περάσουν k (διαφορετικά) αυτοκίνητα από n διαφορετικούς υπαλλήλους διοδίων όταν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία κάθε υπάλληλος εξυπηρετεί τα αυτοκίνητα;

Το πρώτο αυτοκίνητο έχει n επιλογές (όσοι οι υπαλληλοι). Το δεύτερο έχει $n+1$ επιλογές (αν πάει στον υπάλληλο που πήγε και το πρώτο, μπορεί να πάει πριν ή μετά το πρώτο). Ομοίως, το τρίτο έχει $n+2$ επιλογές, …, και το k-οστό έχει $n+k-1$ επιλογές. Από κανόνα του γινομένου:

$$n(n+1)\cdots(n+k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$

1.2 Συνδυασμοί Αντικειμένων

Αριθμός διαφορετικών επιλογών (συνδυασμών) k από n διαφορετικά αντικείμενα:

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{P(n,k)}{k!}$$

Δηλαδή, υπολογίζω τις διατάξεις k αντικειμένων από n και διαιρώ με $k!$ γιατί δεν με ενδιαφέρει η σειρά (στην περίπτωση των συνδυασμών, οι θέσεις των αντικειμένων δεν έχουν σημασία).

Παράδειγμα: Πόσες είναι οι διαφορετικές εξάδες του Lotto: $\binom{49}{6}$

Παράδειγμα: Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω τρεις διαφορετικούς αριθμούς από το 1 ως το 300 ώστε το άθροισμά τους να διαιρείται ακριβώς με το 3;

Χωρίζω τους αριθμούς σε τρεις ομάδες ανάλογα με το υπόλοιπο της ακέραιας διαίρεσής τους με το 3: Στην πρώτη ομάδα μπαίνουν αυτοί που έχουν υπόλοιπο 1 $(1, 4, 7, \ldots)$, στη δεύτερη ομάδα αυτοί που έχουν υπόλοιπο 2 $(2, 5, 8, \ldots)$, και στην τρίτη ομάδα αυτοί που έχουν υπόλοιπο 0 $(3, 6, 9, \ldots)$. Παρατηρώ ότι υπάρχουν μόνο δύο τρόποι να διαλέξω τρεις αριθμούς με άθροισμα που να διαιρείται με το 3: Είτε διαλέγω έναν αριθμό από κάθε ομάδα (από κανόνα γινομένου, συμβαίνει με 100^3 τρόπους) είτε διαλέγω τρεις αριθμούς από την ίδια ομάδα (από κανόνα αθροίσματος και συνδυασμούς, συμβαίνει με $3\binom{100}{3}$ τρόπους). Από κανόνα του αθροίσματος, η απάντηση είναι $100^3 + 3\binom{100}{3} = 1485100$.

Δυωνυμικοί Συντελεστές:

$$(x+y)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Παράδειγμα: Να αποδείξετε με συνδυαστικά επιχειρήματα ότι
α) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, και
β) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

α) ´Εχω μία ομάδα n ανθρώπων και k ίδια καπέλα. Το να διαλέξω ποιοί k θα φορέσουν καπέλο είναι ίδιο με το να διαλέξω αυτούς (ο αριθμός τους είναι $n-k$) που δεν θα φορέσουν καπέλο. Αφού υπάρχει αντιστοιχία, ο αριθμός των διαφορετικών επιλογών και στις δύο περιπτώσεις είναι ο ίδιος.

β) ´Εχω να επιλέξω $k+1$ από $n+1$ διαφορετικά αντικείμενα. Είτε θα επιλέξω το τελευταίο αντικείμενο ανάμεσα στα $k+1$ και θα επιλέξω τα υπόλοιπα k από τα n πρώτα αντικείμενα, είτε δεν θα επιλέξω το τελευταίο αντικείμενο ανάμεσα στα $k+1$ και θα επιλέξω όλα τα $k+1$ αντικείμενα από τα n πρώτα. Το ζητούμενο προκύπτει από κανόνα του αθροίσματος αφού πρόκειται για αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα.

Συνδυασμοί αντικειμένων με επανάληψη. Διαφορετικοί τρόποι να επιλέξω k αντικείμενα από n διαφορετικά αντικείμενα με επανάληψη:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Είναι το ίδιο με τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να τοποθετήσω k ίδια (μη διακεκριμένα) αντικείμενα σε n διακεκριμένες υποδοχές (κάθε αντικείμενο επιλέγει την υποδοχή του από τις n υποδοχές με επανάληψη).

Παράδειγμα: Πόσες δυνατές ζαριές υπάρχουν αν παίζω με k ζάρια; Έξι υποδοχές (τα αποτελέσματα για κάθε ζάρι) και τοποθετώ k ίδια αντικείμενα (τα ζάρια): $\binom{6+k-1}{k}$.

Παράδειγμα: Διαφορετικοί τρόποι να τοποθετήσω k μη διακεκριμένα αντικείμενα σε n διακεκριμένες υποδοχές χωρίς να μείνει καμία κενή ($k \geq n$): Βάζω από ένα αντικείμενο σε κάθε υποδοχή (1 τρόπος) και τα υπόλοιπα $k-n$ αντικείμενα μοιράζονται με

$$\binom{n+k-n-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n} = \binom{k-1}{n-1}$$

διαφορετικούς τρόπους στις n διακεκριμένες υποδοχές χωρίς άλλο περιορισμό. Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί $k-1-(k-n) = n-1$ (βλ. (α) παραπάνω).

Παράδειγμα: Έχω 7 α, 8 β, 5 γ, και 4 δ. Πόσες συμβολοσειρές μπορώ να φτιάξω αν δεν πρέπει να εμφανίζεται το “γα” σε καμία από αυτές.

Υπάρχουν $\frac{19!}{7!8!4!}$ διαφορετικές διατάξεις για τα 7 α, τα 8 β, και τα 4 δ χωρίς κανένα περιορισμό. Για κάθε δεδομένη διάταξη των α, β, και δ, θεωρώ ότι τα γ αποτελούν 5 (ίδια – μη διακεκριμένα) αντικείμενα που τοποθετούνται στις διακεκριμένες υποδοχές που σχηματίζονται από την υπάρχουσα διάταξη. Αφού έχω συνολικά 19 γράμματα, αυτά σχηματίζουν 20 διακεκριμένες υποδοχές (19 υποδοχές πριν από κάποιο γράμμα και 1 στο τέλος). Όμως το γ δεν μπορεί να τοποθετηθεί πριν από το α γιατί αυτό θα δημιουργήσει την ακολουθία “γα”. Επομένως, απομένουν 13 υποδοχές για να τοποθετηθεί το γ (ακριβώς πριν από κάποιο β ή πριν από κάποιο δ ή στο τέλος). Συνεπώς, οι διαφορετικοί τρόποι να τοποθετήσω τα 5 γ είναι $\binom{13+5-1}{5} = \frac{17!}{5!12!}$. Ο συνολικός αριθμός προκύπτει από τον κανόνα του γινομένου: $\frac{19!}{7!8!4!} \times \frac{17!}{5!12!}$.

Παράδειγμα: Έχω n θέσεις στη σειρά και θέλω να τοποθετήσω k φοιτητές για να γράψουν εξετάσεις ώστε μεταξύ κάθε δύο φοιτητών να υπάρχει μία κενή θέση ($n \geq 2k-1$). Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να το κάνω;

Ιδέα: Βγάζω τους φοιτητές και τα θρανία από την αίθουσα. Δίνω από ένα θρανίο σε κάθε φοιτητή (1 τρόπος αφού τα θρανία είναι ίδια, δεσμεύω k θρανία). Βάζω πρώτα τους φοιτητές με τα θρανία τους στη σειρά ($k!$ τρόποι αφού οι φοιτητές είναι διαφορετικοί), μετά από ένα άδειο θρανίο ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι φοιτητών (1 τρόπος, δεσμεύω $k-1$ θρανία), και τέλος μοιράζω τα θρανία που περίσσεψαν (διανομή $n-2k+1$ μη διακεκριμένων αντικειμένων σε $k+1$ διακεκριμένες υποδοχές).

Υπάρχουν $k!$ διαφορετικές μεταθέσεις των φοιτητών (διακεκριμένες οντότητες). Για κάθε μετάθεση βάζω τους φοιτητές και ένα κενό μεταξύ τους. Έτσι δεσμεύω $2k-1$ θέσεις (k για τους φοιτητές και $k-1$ για τα κενά μεταξύ τους). Έχουν απομείνει $n-2k+1$ κενές θέσεις (μη διακεκριμένες) να τις μοιράσω στις $k+1$ διακεκριμένες υποδοχές που σχηματίζει η μετάθεση των φοιτητών. Αυτό γίνεται με

$$\binom{k+1+n-2k+1-1}{n-2k+1} = \binom{n-k+1}{n-2k+1} = \binom{n-k+1}{k}$$

διαφορετικούς τρόπους. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου, προκύπτει το αποτέλεσμα: $k! \times \binom{n-k+1}{k}$.

1.3 Πιθανότητες

Όταν υπάρχουν n ισοπίθανα ενδεχόμενα (διαφορετικοί τρόποι) να συμβεί κάτι, η πιθανότητα να προκύψει ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο είναι $\frac{1}{n}$.

Παράδειγμα: Αν παίξετε μία στήλη τζόκερ, πια είναι οι πιθανότητα να κερδίσετε;

Στο τζόκερ ο αριθμός των διαφορετικών στηλών που μπορούν να κληρωθούν είναι $20\binom{45}{5}$ και όλες οι στήλες είναι ισοπίθανες. Η πιθανότητα επιτυχίας είναι

$$\frac{1}{20\binom{45}{5}} = \frac{5!40!}{20 \cdot 45!} = \frac{1}{24435180}$$

Αν όμως γνωρίζουμε ότι ο πρώτος αριθμός θα είναι στην πρώτη δεκάδα, ο δεύτερος στη δεύτερη, κοκ., και ο τζόκερ άρτιος, τότε ο αριθμός των διαφορετικών στηλών (με αυτούς τους περιορισμούς) είναι 500000 και η πιθανότητα επιτυχίας είναι $\frac{1}{500000}$.

Παράδειγμα: Η πιθανότητα να φέρω εξάρες στο τάβλι είναι $\frac{1}{36}$. Η πιθανότητα ένα τουλάχιστον ζάρι να φέρει 6 είναι 1 μείον την πιθανότητα και τα δύο ζάρια να φέρουν κάτι διαφορετικό από 6. Το δεύτερο γεγονός έχει πιθανότητα $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$ επειδή η πιθανότητα ένα ζάρι να φέρει κάτι διαφορετικό από 6 είναι $\frac{5}{6}$ και οι ρίψεις των δύο ζαριών είναι ανεξάρτητες. Τελικά, η πιθανότητα ένα τουλάχιστον ζάρι να φέρει 6 είναι $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

Παράδειγμα: Ένας εκκεντρικός πολυεκατομμυριούχος προτείνει στο αφεντικό σας (επίσης πολυεκατομμυριούχο) να στοιχηματίσουν 100 εκατομμύρια ευρώ ότι αν ζητήσουν από 30 περαστικούς να επιλέξουν έναν τυχαίο αριθμό από το 1 μέχρι το 400, τουλάχιστον 2 από αυτούς θα επιλέξουν τον ίδιο αριθμό. Το αφεντικό σας γνωρίζει ότι έχετε περάσει το μάθημα των Διακριτών Μαθηματικών και σας ρωτάει αν πρέπει να αποδεχθεί το στοίχημα ποντάροντας στο ότι κάτι τέτοιο δεν θα συμβεί. Τι απαντάτε;[2]

[2] Στην περίπτωση που το αφεντικό σας αποδεχθεί, η πιθανότητα να κερδίσει είναι περίπου $1/3$. Καλύτερα να πείτε όχι και να διατηρήσετε τη θέση σας.