Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτές Μέθοδοι για την Επιστήμη των Υπολογιστών

Διδάσκοντες: Διδάσκοντες: Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

2η Σειρά Προτεινόμενων Ασκήσεων, Σχέδιο Λύσεων

Άσκηση 1 (Κατηγορηματική Λογική). (α) Δίνονται οι προτάσεις φ και ψ:

$$\varphi \equiv \forall x(Q(x) \vee P(x)) \to (\exists x Q(x) \vee \forall x P(x))$$
$$\psi \equiv (\exists x Q(x) \vee \forall x P(x)) \to \forall x(Q(x) \vee P(x))\,,$$

όπου $Q(x)$ και $P(x)$ μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα. Να εξετάσετε τις προτάσεις φ και ψ ως προς την λογική τους εγκυρότητα. Να αιτιολογήσετε κατάλληλα τους ισχυρισμούς σας.

(β) Έστω $\psi(x)$ τύπος με μία ελεύθερη μεταβλητή x, και φ πρόταση. Να δείξετε ότι η παρακάτω πρόταση είναι λογικά έγκυρη:

$$(\exists x \psi(x) \to \varphi) \leftrightarrow \forall x(\psi(x) \to \varphi)$$

Λύση. (α) Αρχικά αποδεικνύουμε ότι η ψ δεν είναι λογικά έγκυρη, παρουσιάζοντας ερμηνεία που δεν αποτελεί μοντέλο για την ψ. Στη δομή των φυσικών αριθμών, έστω ότι το $Q(x)$ αληθεύει ανν $x = 0$, και το $P(x)$ αληθεύει ανν ο x είναι άρτιος. Τότε στην πρόταση ψ, η υπόθεση $\exists x Q(x) \vee \forall x P(x)$ αληθεύει, αφού δηλώνει ότι "υπάρχει φυσικός που ισούται με το 0 ή κάθε φυσικός είναι άρτιος", ενώ το συμπέρασμα $\forall x(Q(x) \vee P(x))$, δεν αληθεύει, αφού δηλώνει ότι "κάθε φυσικός ισούται με το 0 ή είναι άρτιος".

Στην συνέχεια αποδεικνύουμε ότι η φ είναι λογικά έγκυρη. Θεωρούμε μια αυθαίρετη ερμηνεία $\mathcal{A}$ με σύμπαν το A. Υποθέτουμε ότι αληθεύει η υπόθεση της φ στην $\mathcal{A}$, δηλ. ότι για κάθε $\alpha \in A$, $\mathcal{A} \models Q(\alpha)$ ή $\mathcal{A} \models P(\alpha)$. Θα δείξουμε ότι αληθεύει και το συμπέρασμα, δηλαδή ότι $\mathcal{A} \models \exists x Q(x) \vee \forall x P(x)$. Πράγματι, αν υπάρχει στοιχείο $\beta \in A$ τέτοιο ώστε να αληθεύει το $Q(\beta)$, τότε $\mathcal{A} \models \exists x Q(x)$, και το συμπέρασμα της φ αληθεύει. Αν δεν υπάρχει κανένα $\beta \in A$ για το οποίο αληθεύει το $Q(\beta)$, ο μοναδικός τρόπος να αληθεύει η υπόθεση της φ είναι να ισχύει ότι για κάθε $\beta \in A$, $\mathcal{A} \models P(\beta)$. Άρα $\mathcal{A} \models \forall x P(x)$, οπότε το συμπέρασμα της φ αληθεύει και σε αυτή την περίπτωση.

(β) Έστω αυθαίρετα επιλεγμένη ερμηνεία $\mathcal{A}$ με σύμπαν το A. Πρέπει να δείξουμε ότι οι (1) και (2) είναι ισοδύναμες:

$$\mathcal{A} \models \exists x \psi(x) \to \varphi \tag{1}$$

$$\mathcal{A} \models \forall x(\psi(x) \to \varphi) \tag{2}$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι η (1) συνεπάγεται λογικά την (2). Με βάση τον ορισμό αλήθειας του Tarski, η (1) αληθεύει ανν

$$\text{αν } \mathcal{A} \models \exists x \psi(x)\,,\ \text{τότε } \mathcal{A} \models \varphi$$

Έστω ότι υπάρχει $\alpha \in A$ τέτοιο ώστε $\mathcal{A} \models \psi(\alpha)$. Αφού η (1) είναι αληθής, $\mathcal{A} \models \varphi$. Επομένως, η (2) αληθεύει στην $\mathcal{A}$, αφού για κάθε $\beta \in A$, το συμπέρασμα της συνεπαγωγής $\psi(\beta) \to \varphi$ είναι αληθές. Αν δεν υπάρχει $\alpha \in A$ για το οποίο το $\psi(\alpha)$ αληθεύει στην $\mathcal{A}$, για κάθε στοιχείο $\beta \in A$, η υπόθεση της συνεπαγωγής $\psi(\beta) \to \varphi$ είναι ψευδής. Άρα για κάθε $\beta \in A$, η συνεπαγωγή $\psi(\beta) \to \varphi$ είναι αληθής. Επομένως, η (2) αληθεύει στην $\mathcal{A}$.

Πρέπει να δείξουμε και το αντίστροφο, δηλαδή ότι η (2) συνεπάγεται λογικά την (1). Με βάση τον ορισμό αλήθειας του Tarski, η (2) αληθεύει ανν

$$\text{για κάθε } \alpha \in A \text{ (αν } \mathcal{A} \models \psi(\alpha)\text{, τότε } \mathcal{A} \models \varphi)$$

Έστω ότι υπάρχει $\alpha \in A$ τέτοιο ώστε $\mathcal{A} \models \psi(\alpha)$. Αφού η συνεπαγωγή $\psi(\alpha) \to \varphi$ αληθεύει, $\mathcal{A} \models \varphi$. Επομένως, η (1) αληθεύει στην $\mathcal{A}$, αφού πρόκειται για συνεπαγωγή με αληθές συμπέρασμα. Αν δεν υπάρχει $\alpha \in A$ για το οποίο το $\psi(\alpha)$ αληθεύει, η (1) αληθεύει γιατί η υπόθεση της (δηλ. ο υποτύπος $\exists x \psi(x)$) είναι ψευδής. □

Άσκηση 2 (Μαθηματική Επαγωγή). (α) Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$,

$$1^2 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 \tag{3}$$

(β) Σε πόσες (μη επικαλυπτόμενες) περιοχές χωρίζουν το επίπεδο n ευθείες που ανά δύο δεν είναι παράλληλες και ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας με μαθηματική επαγωγή στον αριθμό των ευθειών n.

Λύση. (α). Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς.
Βάση της επαγωγής: Η (3) ισχύει προφανώς για $n = 1$.
Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι η (3) ισχύει για έναν αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό $n \geq 1$.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι η (3) ισχύει για τον επόμενο φυσικό $n + 1$. Πράγματι:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \overbrace{(1 + 2 + \cdots + n)^2}^{\text{επαγωγική υπόθεση}} + (n+1)^3 \\
&= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + \overbrace{2\tfrac{n(n+1)}{2}(n+1) + (n+1)^2}^{=(n+1)^3} \\
&= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + 2\overbrace{(1 + 2 + \cdots + n)}^{=\frac{n(n+1)}{2}}(n+1) + (n+1)^2 \\
&= [(1 + 2 + \cdots + n) + (n+1)]^2
\end{aligned}$$

(β) Έστω a_n ο αριθμός των περιοχών που ορίζουν n τέτοιες ευθείες στο επίπεδο. Σκεπτόμενοι επαγωγικά, θα διατυπώσουμε την αναδρομική εξίσωση που περιγράφει το a_n. Ως βάση του συλλογισμού, παρατηρούμε ότι $a_0 = 1$ (αν δεν υπάρχει καμία ευθεία, το επίπεδο αποτελείται από μία περιοχή), $a_1 = 2$ (μία ευθεία χωρίζει το επίπεδο σε δύο περιοχές), και $a_2 = 4$ (δύο ευθείες χωρίζουν το επίπεδο σε 4 περιοχές).

Για το βήμα, έστω ότι έχουμε $n - 1$ ευθείες που χωρίζουν το επίπεδο σε a_{n-1} περιοχές. Η n-οστή ευθεία έχει $n - 1$ σημεία τομής με τις υπόλοιπες ευθείες. Τα σημεία αυτά χωρίζουν την n-οστή ευθεία σε n τμήματα. Κάθε τέτοιο τμήμα της n-οστής ευθείας διαιρεί μια από τις υπάρχουσες a_{n-1} περιοχές στα δύο (με άλλα λόγια, κάθε τμήμα της n-οστής ευθείας προσθέτει μια νέα περιοχή στις ήδη υπάρχουσες). Επομένως, ισχύει ότι $a_n = a_{n-1} + n$ με αρχική συνθήκη $a_0 = 1$. Είναι εύκολο (είτε με μαθηματική επαγωγή, είτε παρατηρώντας ότι $a_n = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 + 1$) να δείξουμε ότι $a_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$. □

Άσκηση 3 (Μαθηματική Επαγωγή). Θεωρούμε n φίλους που ο καθένας ξέρει ένα διαφορετικό μυστικό και επικοινωνούν μεταξύ τους τηλεφωνικά ανά δύο. Κάθε φορά που δύο φίλοι μιλούν στο τηλέφωνο, ανταλλάσσουν όλα τα μυστικά που γνωρίζουν εκείνη τη στιγμή. Συμβολίζουμε με $A(n)$ τον ελάχιστο αριθμό τηλεφωνημάτων που απαιτούνται για να μάθουν όλοι οι φίλοι όλα τα μυστικά.

1. Να υπολογίσετε τα $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, και $A(5)$. Να περιγράψετε τις αντίστοιχες ακολουθίες τηλεφωνημάτων.
2. Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό $n \geq 4$, $A(n) \leq 2n - 4$.

Λύση. (1) Είναι $A(2) = 1$, $A(3) = 3$, $(4) = 4$, και $A(5) = 6$.

(2) *Βάση της επαγωγής*: Αν έχουμε 4 φίλους $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, αυτοί μαθαίνουν όλα τα μυστικά αν επικοινωνήσουν πρώτα οι α_1 και α_2 και οι α_3 και α_4, και έπειτα οι α_1 και α_3 και οι α_2 και α_4. Αυτό απαιτεί 4 τηλεφωνήματα. Συνεπώς $A(4) \leq 4$.
Επαγωγική Υπόθεση: Έστω ότι για αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό $n \geq 4$, ισχύει ότι $A(n) \leq 2n - 4$.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι $A(n+1) \leq 2(n+1) - 4$. Έστω ότι έχουμε $n+1$ φίλους, τους $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$. Θεωρούμε ότι αρχικά επικοινωνούν οι α_n και α_{n+1} (ένα τηλεφώνημα). Τώρα ο α_n γνωρίζει το μυστικό του α_{n+1}, και στο εξής το μεταδίδει μαζί με το δικό του μυστικό.

Στη συνέχεια, αγνοούμε προσωρινά τον α_{n+1}, και θεωρούμε ότι οι πρώτοι n φίλοι ανταλλάσσουν τα μυστικά τους με την βέλτιστη ακολουθία τηλεφωνημάτων ($A(n)$ τηλεφωνήματα). Αφού το μυστικό του α_{n+1} μεταδίδεται με το μυστικό του α_n, με την ολοκλήρωση αυτής της ακολουθίας τηλεφωνημάτων, οι πρώτοι n φίλοι γνωρίζουν όλα τα μυστικά (συμπεριλαμβανομένου και του μυστικού του α_{n+1}).

Τέλος ο α_n τηλεφωνεί στον α_{n+1} (ένα τηλεφώνημα), και τον ενημερώνει για τα μυστικά που ο τελευταίος δεν γνωρίζει. Έτσι ο α_{n+1} μαθαίνει όλα τα μυστικά.

Αφού $A(n) \leq 2n - 4$, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, ο συνολικός αριθμός τηλεφωνημάτων για $n+1$ φίλους είναι $A(n+1) \leq 2 + A(n) \leq 2(n+1) - 4$. $\square$

Άσκηση 4 (Αρχή Περιστερώνα). (α) Να δείξετε ότι ανάμεσα σε $n+2$ αυθαίρετα επιλεγμένους ακεραίους, είτε υπάρχουν δύο που η διαφορά τους διαιρείται από το $2n$ είτε υπάρχουν δύο που το άθροισμά τους διαιρείται από το $2n$.
(β) Έστω n αυθαίρετα επιλεγμένοι ακέραιοι $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Να δείξετε ότι υπάρχουν φυσικοί ℓ, k, $1 \leq \ell \leq n$, $0 \leq k \leq n - \ell$, τέτοιοι ώστε το άθροισμα $a_\ell + a_{\ell+1} + \cdots + a_{\ell+k}$ να διαιρείται από το n.

Λύση. (α) Ως "φωλιές" θεωρούμε τα $n+1$ ζεύγη φυσικών $\{i, 2n-i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, και ως "περιστέρια" τους $n+2$ ακεραίους στους οποίους αναφέρεται η εκφώνηση. Κάθε "περιστέρι" x ανατίθεται στη "φωλιά" $\{i, 2n-i\}$ ανν είτε $x \mod 2n = i$ είτε $x \mod 2n = 2n-i$. Λόγω της αρχής του περιστερώνα, θα υπάρχει μία "φωλιά" i που δέχεται δύο (τουλάχιστον) "περιστέρια" x, y. Για απλότητα και χβτγ, θεωρούμε ότι $x \geq y$ και ότι $x \mod 2n = i$. Αν $y \mod 2n = i$, τότε το $x - y$ διαιρείται από το $2n$. Αν $y \mod 2n = 2n - i$, τότε το $x + y$ διαιρείται από το $2n$.

(β) Ως "φωλιές" θεωρούμε τους n φυσικούς αριθμούς $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Ως "περιστέρια" θεωρούμε τα n μερικά αθροίσματα $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$, $k = 1, \ldots, n$. Κάθε "περιστέρι" S_k ανατίθεται στη "φωλιά" i ανν $S_k \mod n = i$. Αν υπάρχει "περιστέρι" στη "φωλιά" 0, τότε το αντίστοιχο μερικό άθροισμα διαιρείται από το n. Διαφορετικά η "φωλιά" 0 μένει κενή, και λόγω της αρχής του περιστερώνα, θα υπάρχει μια "φωλιά" i, $i = 1, \ldots, n-1$, που δέχεται τουλάχιστον δύο "περιστέρια" S_k και S_m. Έστω ότι $k < m$. Παρατηρούμε ότι η διαφορά $S_m - S_k = a_{k+1} + \cdots + a_m$ διαιρείται από το n. $\square$