Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

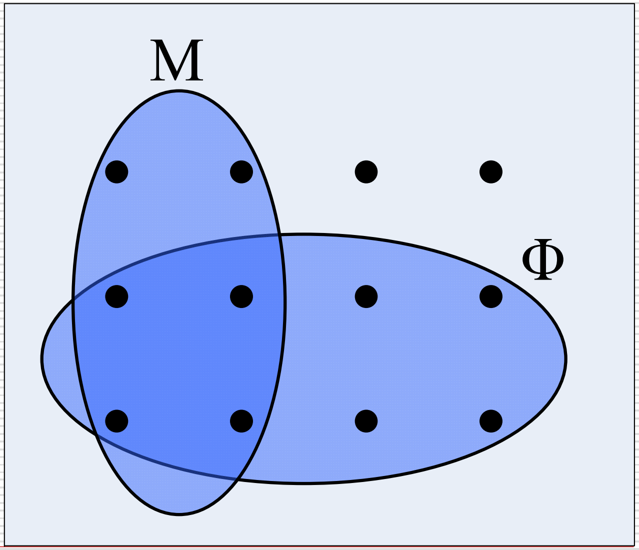
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Πληθικός Αριθμός Ένωσης

- Πληθικός αριθμός (πεπερασμένων) συνόλων που προκύπτουν από πράξεις (ένωση, τομή) συνόλων:
  - Π.χ. $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|A - B|$, $|\overline{A}|$ σε σχέση με $|A|$, $|B|$.
  - $|A \cup B| \leq |A| + |B|$, $|A \cap B| \leq \min\{|A|, |B|\}$,
    $|A - B| \geq |A| - |B|$, $|\overline{A}| = |U| - |A|$. Πότε ισχύουν ισότητες;
- Σύνολο 12 βιβλίων: 6 βιβλία μαθηματικά, 8 βιβλία φυσική, και 4 μαθηματικά και φυσική.
  - Πόσα μαθηματικά ή φυσική;
    Πόσα ούτε μαθηματικά ούτε φυσική;

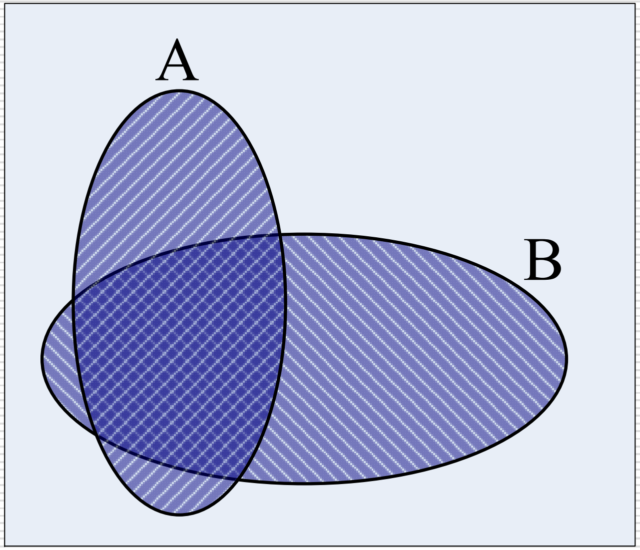
$$|\mathbf{M} \cup \mathbf{\Phi}| = |\mathbf{M}| + |\mathbf{\Phi}| - |\mathbf{M} \cap \mathbf{\Phi}| = 6 + 8 - 4 = 10$$

$$|\overline{\mathbf{M} \cup \mathbf{\Phi}}| = |U| - |\mathbf{M} \cup \mathbf{\Phi}| = 12 - 10 = 2$$



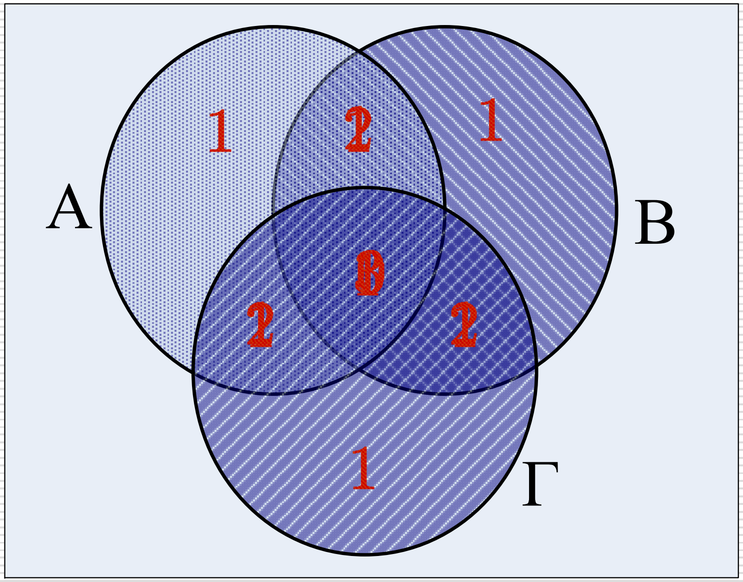
Εγκλεισμός – Αποκλεισμός

- Πληθικός αριθμός ένωσης πεπερασμένων συνόλων.
- Δύο σύνολα A, B: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
  - Στο $|A| + |B|$ μετράμε διπλά τα στοιχεία στο $|A \cap B|$. Ο όρος $-|A \cap B|$ διορθώνει το λάθος.



Εγκλεισμός – Αποκλεισμός

- Τρία σύνολα A, B, Γ: $|A \cup B \cup \Gamma|$
  - $|A| + |B| + |\Gamma|$
  - $|A| + |B| + |\Gamma| - |A \cap B| - |A \cap \Gamma| - |B \cap \Gamma|$
  - $|A| + |B| + |\Gamma| - |A \cap B| - |A \cap \Gamma| - |B \cap \Gamma| + |A \cap B \cap \Gamma|$



Παράδειγμα

- 200 φοιτητές, 140 Πληροφορική, 50 Διακριτά, 24 αμφότερα.
  - Πόσοι φοιτητές Πληροφορική ή Διακριτά;
  - $|Π \cup Δ| = |Π| + |Δ| - |Π \cap Δ| = 140 + 50 – 24 = 166.$
  - Πόσοι φοιτητές ούτε Πληροφορική ούτε Διακριτά;
  - $|\overline{\mathbf{\Pi}} \cap \overline{\mathbf{\Delta}}| = |\overline{\mathbf{\Pi} \cup \mathbf{\Delta}}| = |\mathbf{\Phi}| - |\mathbf{\Pi} \cup \mathbf{\Delta}| = 200 - 166 = 34$
- Από αυτούς τους 200 φοιτητές, 60 πήγαν στο ΣΦΗΜΜΥ.
  Από αυτούς 20 Διακριτά, 45 Πληροφορική, και 16 αμφότερα.
  - Πόσοι φοιτητές που δεν θα πάνε στο Συνέδριο δεν παρακολουθούν ούτε Πληροφορική ούτε Διακριτά.
  - $|\overline{\mathbf{\Sigma}} \cap \overline{\mathbf{\Pi}} \cap \overline{\mathbf{\Delta}}| = |\overline{\mathbf{\Sigma} \cup \mathbf{\Pi} \cup \mathbf{\Delta}}| = |\mathbf{\Phi}| - |\mathbf{\Sigma} \cup \mathbf{\Pi} \cup \mathbf{\Delta}| = 23$
  - $|Σ \cup Π \cup Δ| =$
    $|Σ| + |Π| + |Δ| - |Σ \cap Δ| - |Σ \cap Π| - |Π \cap Δ| + |Σ \cap Π \cap Δ| =$
    $60 + 140 + 50 – 20 – 45 – 24 + 16 = 177$

Παράδειγμα

- Πόσοι ακέραιοι στο {1, ..., 1000} διαιρούνται από το 7 ή το 11.
  - A_7 = { j ∈ [1000] : j διαιρείται από 7} $|A_7| = \lfloor 1000/7 \rfloor = 142$
    A_{11} = { j ∈ [1000] : j διαιρείται από 11} $|A_{11}| = \lfloor 1000/11 \rfloor = 90$
  - |{j ∈ [M] : j διαιρείται από k}| = $\lfloor M/k \rfloor$
  - Ακέραιος j διαιρείται από k_1 και k_2 ανν j διαιρείται από ΕΚΠ(k_1, k_2).
  - $|A_7 \cap A_{11}| = \lfloor 1000/(7 \cdot 11) \rfloor = 12$
  - $|A_7 \cup A_{11}| = |A_7| + |A_{11}| - |A_7 \cap A_{11}| = 142 + 90 - 12 = 220$.
- Πόσοι ακέραιοι στο {1, ..., 100} διαιρούνται από 2, 3, ή 5.
  - $|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5|$
    $- |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5|$
  - ... = 50 + 33 + 20 – 16 – 10 – 6 + 3 = 74

Γενίκευση

- Τέσσερα σύνολα Α, Β, Γ, Δ: |Α ∪ Β ∪ Γ ∪ Δ|

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}\cup\mathbf{B}\cup\mathbf{\Gamma}\cup\mathbf{\Delta}| = {} & |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| + |\mathbf{\Gamma}| + |\mathbf{\Delta}| \\
& -|\mathbf{A}\cap\mathbf{B}| - |\mathbf{A}\cap\mathbf{\Gamma}| - |\mathbf{A}\cap\mathbf{\Delta}| \\
& -|\mathbf{B}\cap\mathbf{\Gamma}| - |\mathbf{B}\cap\mathbf{\Delta}| - |\mathbf{\Gamma}\cap\mathbf{\Delta}| \\
& +|\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\cap\mathbf{\Gamma}| + |\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\cap\mathbf{\Delta}| \\
& +|\mathbf{A}\cap\mathbf{\Gamma}\cap\mathbf{\Delta}| + |\mathbf{B}\cap\mathbf{\Gamma}\cap\mathbf{\Delta}| \\
& -|\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\cap\mathbf{\Gamma}\cap\mathbf{\Delta}|
\end{aligned}
$$

Γενίκευση

- n σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n$: $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{J \subseteq [n] : |J| = k} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$$

  - Αριθμός όρων για n σύνολα: $2^n - 1$
  - Απόδειξη με επαγωγή στον αριθμό των συνόλων n.
  - Απόδειξη συνδυαστικά: κάθε στοιχείο της ένωσης «μετριέται» μία φορά στο άθροισμα δεξιά.

Από 3 Σύνολα σε 4 Σύνολα

- Εφαρμόζοντας τη βασική ιδέα της επαγωγικής απόδειξης:

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup A_4| \\
&= |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_4| - |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4| &= |(A_1 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_4) \cup (A_3 \cap A_4)| \\
&= |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\
&\quad -|A_1 \cap A_2 \cap A_4| - |A_1 \cap A_3 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
&\quad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |A_4| + |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| \\
&\quad -|A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\
&\quad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| \\
&\quad +|A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

- 100 φοιτητές κυλικείο για καφέ, πίτσα, και μπουγάτσα.
  - Καθένα κοστίζει 1 ευρώ.
  - Συνολική είσπραξη 200 ευρώ.
  - 75 χάλασαν τουλάχιστον 2 ευρώ.
  - 30 χάλασαν 3 ευρώ.
  - Πόσοι ήρθαν μόνο για παρέα (δεν αγόρασαν τίποτα).
- Απάντηση: $100 - |Κ \cup Π \cup Μ|$
- Δεδομένα:
  - $|Κ \cap Π \cap Μ| = 30$
  - $|Κ \cap Π| + |Κ \cap Μ| + |Π \cap Μ| - 2|Κ \cap Π \cap Μ| = 75$
  - $|Κ \cap Π| + |Κ \cap Μ| + |Π \cap Μ| - |Κ \cap Π \cap Μ| = 105$
  - Συνολική είσπραξη 200 ευρώ, άρα $|Κ| + |Π| + |Μ| = 200$.
- $|Κ \cup Π \cup Μ| = 200 - 105 = 95$.
- Απάντηση: $100 - |Κ \cup Π \cup Μ| =$ **5**.

Παράδειγμα

- Πόσοι αριθμοί στο $\{1, 2, ..., 48\}$ είναι πρώτοι;
- Απάντηση: 47 – (#σύνθετων αριθμών ≤ 48)
  - Αριθμός n σύνθετος: έχει πρώτο παράγοντα $\leq \sqrt{n}$
  - Αριθμός $n \in \{2, 3, ..., 48\}$ σύνθετος:
    - Είναι διαφορετικός από 2, 3, 5, και διαιρείται από 2, 3, ή 5.
- Πόσοι αριθμοί στο $\{2, 3, ..., 48\}$ διαιρούνται από 2, 3, ή 5.
  - $|A_2| = 24$, $|A_3| = 16$, $|A_5| = 9$, $|A_2 \cap A_3| = 8$, $|A_2 \cap A_5| = 4$, $|A_3 \cap A_5| = 3$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 1$.
  - $|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 24 + 16 + 9 - 8 - 4 - 3 + 1 = 35$.
  - Προσοχή: έχουμε συμπεριλάβει 2, 3, και 5.
- Άρα (#σύνθετων αριθμών ≤ 48) = 35 – 3 = 32.
- (#πρώτων αριθμών ≤ 48) = 47 – 32 = **15**.

Κόσκινο του Ερατοσθένη

- Υπολογισμός πρώτων αριθμών ≤ M.
  - Αρχικά όλοι οι φυσικοί στο {2, ..., M}.
  - Σε κάθε γύρο, θεωρούμε επόμενο διαθέσιμο αριθμό (είναι πρώτος) και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσιά του που ξεπερνούν τον αριθμό και δεν έχουν διαγραφεί ήδη.
    - 1ος γύρος: διαγράφουμε πολλαπλάσια του 2.
    - 2ος γύρος: διαγράφουμε πολλαπλάσια του 3 (όχι του 2)
    - 3ος γύρος: διαγράφουμε πολλαπλάσια του 5 (όχι των 2, 3), κοκ.
  - Τερματισμός όταν επόμενος διαθέσιμος αριθμός $> \sqrt{M}$

	2	**3**	4	**5**	6	**7**	8	**9**	10
11	12	**13**	14	**15**	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	**25**	26	**27**	28	**29**	30
31	32	**33**	34	**35**	36	**37**	38	**39**	40
41	42	**43**	44	**45**	46	**47**	48		