(Τυπικές) Γλώσσες: Ορισμοί

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αλφάβητα και Συμβολοσειρές

- **Αλφάβητο**: πεπερασμένο μη-κενό σύνολο Σ.
  - $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots., \omega\}$
- **Συμβολοσειρά**: πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων του Σ.
  - Μήκος συμβολοσειράς: #συμβόλων.
  - Κενή συμβολοσειρά e ή ε: (μοναδική) συμβ/ρά μήκους 0.
- Σ^k : σύνολο συμβολοσειρών Σ μήκους k.
  - $\{0, 1\}^2 = \{00, 01, 10, 11\}$
- Σ^* : σύνολο όλων των συμβολοσειρών Σ.
  - $\{0, 1\}^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \ldots\}$.

$$\Sigma^* = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Sigma^k$$

- Το Σ^* είναι αριθμήσιμο.
  - Για $k = 0, 1, 2, \ldots$, λεξικογραφική διάταξη του Σ^k.

Πράξεις με Συμβολοσειρές

- Παράθεση x και y: $x \circ y$ ή x y.
  - Π.χ. παράθεση των αβγδ και εζηθ είναι αβγδεζηθ.
- Επανάληψη (ή παράθεση) του w για k φορές: $w^k = \overbrace{w \circ \cdots w}^{k \text{ φορές}}$
  - Π.χ. $(αβ)^3$ = αβαβαβ, $(010)^4$ = 010010010010
- Αντίστροφη w^R συμβολοσειράς w: συμβολοσειρά που προκύπτει διαβάζοντας w από «τέλος» προς «αρχή» (αντίστροφα).
  - $(αβγδ)^R$ = δγβα, $(10010)^R$ = 01001, $(αβγδγβα)^R$ = αβγδγβδα.
  - Παλινδρομική (καρκινική) συμβολοσειρά w αν $w = w^R$.
  - Νδο (επαγωγικά) $\forall x, y \in \Sigma^*, (x \circ y)^R = y^R \circ x^R$
- x υποσυμβολοσειρά w αν $\exists y, z \in \Sigma^* : w = yxz$.
  - x πρόθεμα w αν y = ε. x κατάληξη w αν z = ε.

(Τυπικές) Γλώσσες

- (Τυπική) γλώσσα L: οποιοδήποτε υποσύνολο Σ^*.
  - Αριθμήσιμο σύνολο συμβολοσειρών.
- Παραδείγματα γλωσσών στο $\Sigma = \{0, 1, 2\}$:
  - $L_1 = \{012, 021, 120, 102, 210, 201\}$
  - $L_2 = \{\varepsilon, 1, 11, 111, 1111, \ldots\}$
  - $L_3 = \{ w \in \Sigma^*$: το τελευταίο ψηφίο του w είναι 0 $\}$
  - $L_4 = \{\ \} = \emptyset$
  - $L_5 = \{ \varepsilon \}$
- Σύνολο όλων των γλωσσών 2^{Σ^*} μη αριθμήσιμο (διαγωνιοποίηση).

Πράξεις με Γλώσσες

- Πράξεις συνόλων:
  - Ένωση, τομή, διαφορά, συμπλήρωμα.
- Παράθεση γλωσσών L_1 και L_2: $L_1 \circ L_2$ ή $L_1 L_2$

  $L_1 \circ L_2 = \{w \in \Sigma^* : w = x_1 \circ x_2 \text{ για κάποια } x_1 \in L_1 \text{ και } x_2 \in L_2\}$
  - $L_1 = \{0, 00, 11\}$ και $L_2 = \{\varepsilon, 1\}$, τότε

    $L_1 L_2 = \{0, 00, 11, 01, 001, 111\}$
- $L^2 = L \circ L$: παράθεση L με τον εαυτό της.
- $L^k = \overbrace{L \circ \cdots \circ L}^{k \text{ φορές}}$: παράθεση L με τον εαυτό της k φορές.

Πράξεις με Γλώσσες

- Kleene star L^* γλώσσας L: αποτελείται από παράθεση οποιουδήποτε (πεπερασμένου) αριθμού συμβολοσειρών της L.
  $$L^* = \{w \in \Sigma^* : w = x_1 \circ \cdots \circ x_k \text{ για } k \geq 0, x_1, \ldots, x_k \in L\}$$
  $$= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L^k$$
  - Αν L = {1, 00}, τότε
    L^* = {ε, 1, 00, 11, 100, 001, 0000, 1100, 10000, 1001, 00100, ... }
  - Αν L = { ε }, τότε L^* = { ε }.
  - Αν L = ∅, τότε L^* = { ε } (για κάθε L, ε ∈ L^*).
- L^+ : αποτελείται από παράθεση θετικού αριθμού συμβ/ρών της L.
  $$L^+ = \{w \in \Sigma^* : w = x_1 \circ \cdots \circ x_k \text{ για } k \geq 1, x_1, \ldots, x_k \in L\}$$
  $$= \bigcup_{k \geq 1} L^k$$
  - Πότε οι L^* και L^+ είναι διαφορετικές; Ποια είναι η διαφορά τους;