

# Κλειστότητες Σχέσεων

---

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

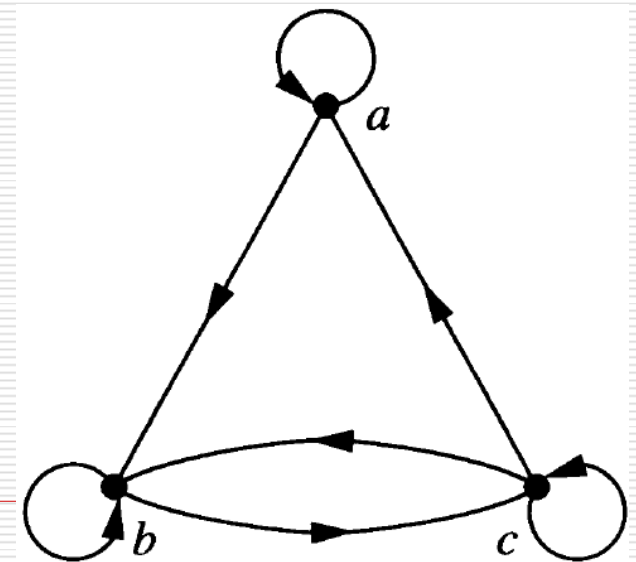
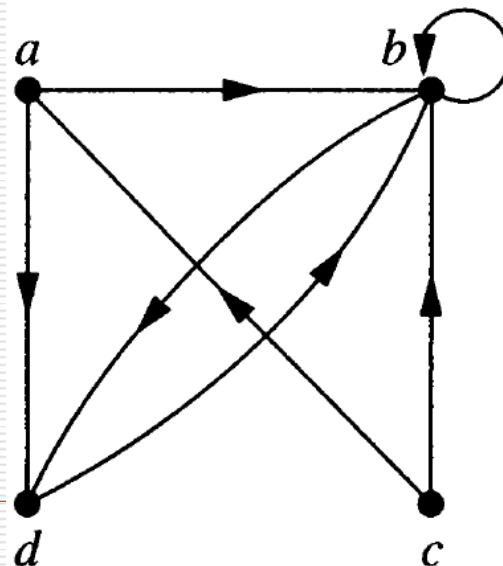
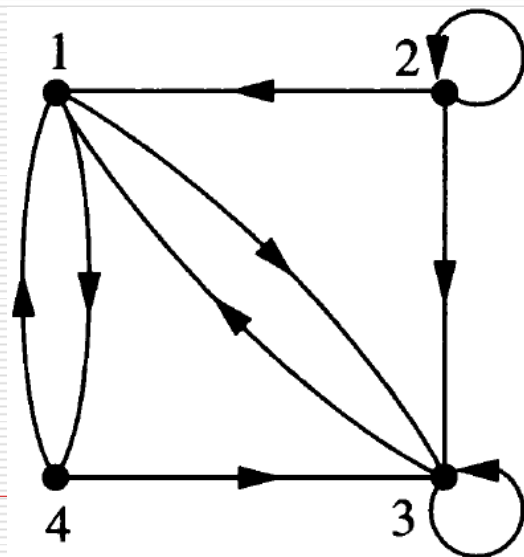
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Κλειστότητα Σχέσης

- **Κλειστότητα** σχέσης  $R$  ως προς ιδιότητα  $P$ : σχέση  $S$  που
  - (α) περιέχει την  $R$  (δηλ.  $R \subseteq S$ ),
  - (β) έχει την ιδιότητα  $P$ , και
  - (γ) είναι «ελάχιστη», δηλ. περιέχεται σε κάθε σχέση που έχει (α), (β).
- Κλειστότητα **επεκτείνει**  $R$  όσο χρειάζεται ώστε να έχει **ιδιότητα  $P$** .
- Ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική κλειστότητα;



# Ανακλαστική Κλειστότητα

---

- ... σχέσης  $R \subseteq A \times A$ :  $R \cup \{(a, a) : a \in A\}$ .
  - Περιέχει  $R$ , είναι ανακλαστική, είναι ελάχιστη.
- Ανακλαστική κλειστότητα σχέσης  $R = \{(a, \beta) : a < \beta\}$ ;
  - $R' = \{(a, \beta) : a \leq \beta\}$ .

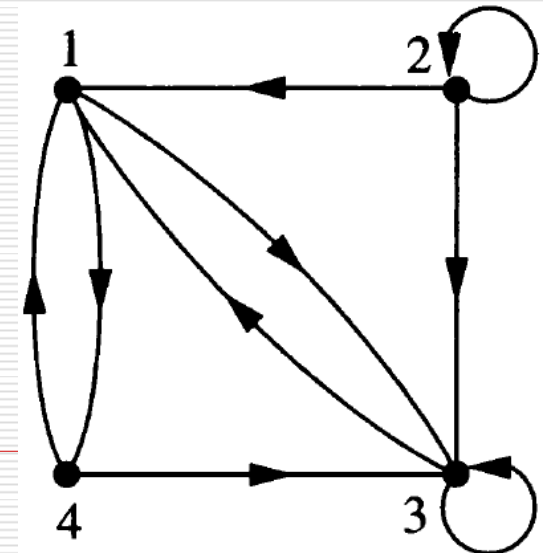
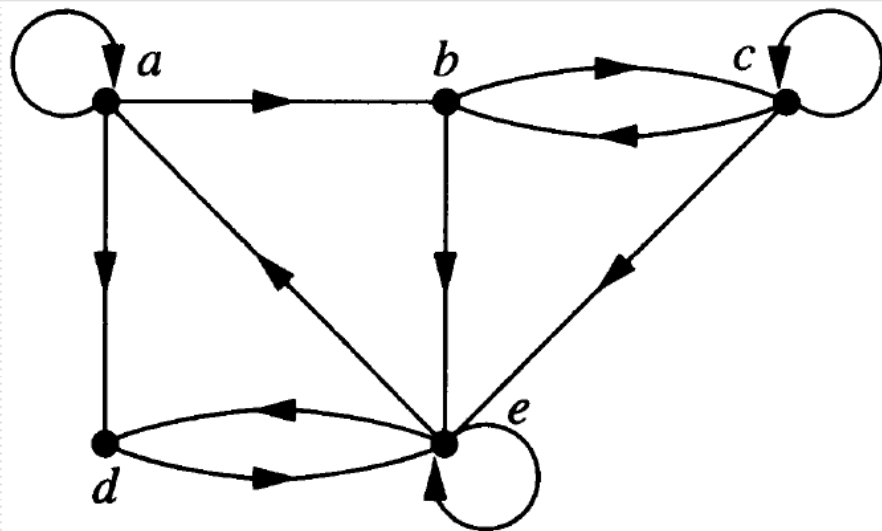
# Συμμετρική Κλειστότητα

---

- ... σχέσης  $R \subseteq A \times A$ :  $R \cup R^{-1}$ .
  - $R \cup \{(\beta, \alpha) : (\alpha, \beta) \in R\}$
  - Περιέχει  $R$ , είναι συμμετρική, είναι ελάχιστη.
- Συμμετρική κλειστότητα σχέσης  $R = \{(a, \beta) : a < \beta\}$ ;
  - $R'' = \{(a, \beta) : a \neq \beta\}$ .

# Μεταβατική Κλειστότητα

- «Διαδρομή» μήκους  $k \geq 0$  σε σχέση  $R$ : ακολουθία  $a_0, \dots, a_k \in A$  τ.ω.  $(a_i, a_{i+1}) \in R$  για κάθε  $i < k$ .
- $R^n = \{(a, \beta) : \text{υπάρχει } a - \beta \text{ διαδρομή μήκους } n \text{ στην } R\}$ ,  $n \geq 1$ .
- $R$  μεταβατική ανν  $R^n \subseteq R$ , για κάθε  $n \geq 1$ .
- $R^* = \{(a, \beta) : \text{υπάρχει } a - \beta \text{ διαδρομή στην } R\}$  ή  $R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 
  - Αν  $R$  μεταβατική, τότε  $R^* = R$  ( $R \subseteq R^*$  και  $R^* \subseteq R$ ).



# Μεταβατική Κλειστότητα

---

- **Μεταβατική κλειστότητα** σχέσης  $R = R^*$ .
  - $R \subseteq R^*$ : ακμή  $(\alpha, \beta)$  είναι διαδρομή μήκους 1.
  - $R^*$  **μεταβατική**:  $\alpha - \beta, \beta - \gamma$  διαδρομές,  $\alpha - \beta - \gamma$  διαδρομή.
  - $R^*$  **ελάχιστη**: έστω  $S$  μεταβατική σχέση με  $R \subseteq S$ . Θδο.  $R^* \subseteq S$ .
    - $S$  μεταβατική  $\Rightarrow S = S^*$ .
    - $R \subseteq S \Rightarrow R^* \subseteq S^*$  (κάθε διαδρομή στην  $R$  είναι διαδρομή στην  $S$ ).
    - Άρα  $R^* \subseteq S$ .

# Υπολογισμός $R^*$

---

- $a - \beta$  διαδρομή στην  $R$  αν  $\exists a - \beta$  διαδρομή μήκους  $\leq |A|$ .
  - Αν συντομότερη  $a - \beta$  διαδρομή στην  $R$  έχει μήκος  $> |A|$ : κάποια κορυφή επαναλαμβάνεται (διαδρομή περιέχει κύκλο).
  - Αφαίρεση κύκλου:  $a - \beta$  διαδρομή με μικρότερο μήκος. Άτοπο!
- Υπολογισμός  $R^*$ :  $R^* = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$ 
  - $R^k$  με Boolean πολλαπλασιασμό πινάκων από  $R^{k-1}$  και  $R$ .
  - Ένωση με λογική διάζευξη πινάκων.
  - Χρόνος:  $O(n^4)$ ,  $n = |A|$ .

# Αλγόριθμος Warshall

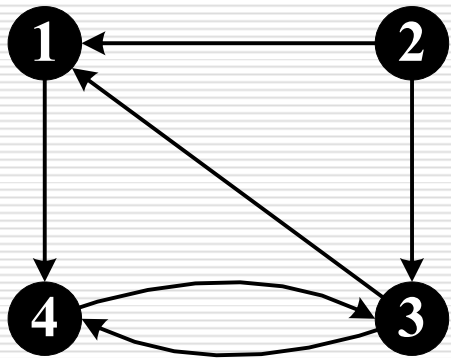
---

- Για  $R^*$  ισχύει ότι:  $R^*(i, j) = R(i, j) \vee \exists k(R^*(i, k) \wedge R^*(k, j))$ 
  - Υπολογισμός με παραπάνω ιδέα μοιάζει με **φαύλο κύκλο**:  
 $R^*(i, j)$  απαιτεί  $R^*(i, k)$  και το  $R^*(i, k)$  απαιτεί το  $R^*(i, j)$ .
- Όμως γίνεται **προσεκτικά** και **συστηματικά** (Warshall)!
  - Αυθαίρετη αρίθμηση στοιχείων (κορυφών) του  $A$ :  $\{1, 2, \dots, n\}$
  - $P^{[k]} = \{(i, j): \exists i - j \text{ διαδρομή με εσωτερικές κορυφές μόνο από } [k]\}$
  - Ισχύει ότι  $R^* = P^{[n]}$ .
  - $P^{[0]} = R$  και  $P^{[k]}(i, j) = P^{[k-1]}(i, j) \vee (P^{[k-1]}(i, k) \wedge P^{[k-1]}(k, j))$



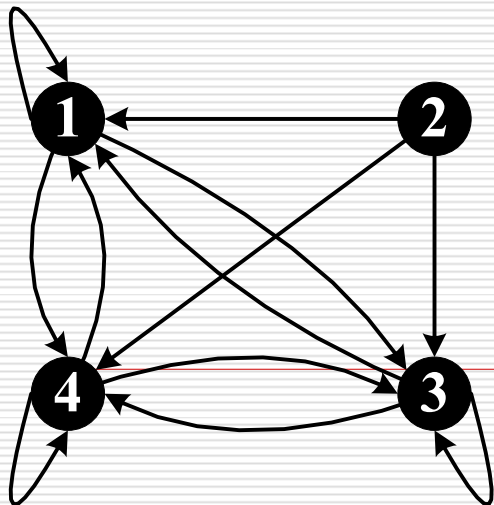
# Αλγόριθμος Warshall

- $P^{[k]} = \{(i, j) : \exists i - j \text{ διαδρομή με εσωτερικές κορυφές } \in [k]\}$
- $P^{[0]} = R$  και  $P^{[k]}(i, j) = P^{[k-1]}(i, j) \vee (P^{[k-1]}(i, k) \wedge P^{[k-1]}(k, j))$ 
  - Ισχύει ότι  $R^* = P^{[n]}$ .



$$P^{[0]} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{[1]} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$P^{[3]} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{[4]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Αλγόριθμος Warshall

---

- $P^{[k]} = \{ (i, j) : \exists i - j \text{ διαδρομή με εσωτερικές κορυφές } \in [k] \}$
- $P^{[0]} = R$  και  $P^{[k]}(i, j) = P^{[k-1]}(i, j) \vee (P^{[k-1]}(i, k) \wedge P^{[k-1]}(k, j))$
- Για  $R^*$  υπολογίζουμε  $n$  πίνακες  $P^{[1]}, P^{[2]}, \dots, P^{[n]} = R^*$ .
  - Πίνακας  $P^{[k]}$  υπολογίζεται από  $P^{[k-1]}$  σε χρόνο  $O(n^2)$ .
  - Χρόνος:  $O(n^3)$ . Υλοποίηση: τετριμμένη!
- Αλγόριθμος Floyd-Warshall:
  - Υπολογισμός συντομότερων μονοπατιών μεταξύ όλων των κορυφών.