

Γεννήτριες Συναρτήσεις

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Αναπαράσταση Ακολουθιών

- **Ακολουθία:** αριθμητική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το \mathbb{N} .
- Με γενικό (ή «κλειστό») τύπο a_n : n -οστός όρος συναρτήσει n .
- Κωδικοποίηση σε δυναμοσειρά μιας (πραγματικής) μεταβλητής x .
- Γεννήτρια Συνάρτηση (ΓΣ) $A(x)$ ακολουθίας \mathbf{a} : $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
 - Συντελεστής του x^n αντιστοιχεί σε n -οστό όρο ακολουθίας \mathbf{a} .
 - Επιλέγουμε διάστημα τιμών x ώστε σειρά να συγκλίνει (**πάντα!**).
 - Έτσι θεωρούμε ότι $A(x)$ άπειρα παραγωγίσιμη (αναλυτική).
Παραγωγίζουμε/ολοκληρώνουμε την $A(x)$ ως πεπερασμένο άθροισμα.
- Κάθε ακολουθία \mathbf{a} αντιστοιχεί σε μοναδική ΓΣ $A(x)$.
- ΓΣ $A(x)$ αντιστοιχεί σε μοναδική ακολουθία: $a_n = (1/n!)A^{(n)}(0)$
- Μετασχηματισμός και «αλγεβρικός» χειρισμός ακολουθιών και επίλυση των προβλημάτων που κωδικοποιούν.

Παραδείγματα

- ΓΣ ακολουθίας $1, 1, 1, 1, \dots$: $1/(1-x)$
- ΓΣ ακολουθίας $a_n = b \lambda^n$: $b/(1-\lambda x)$
- ΓΣ για **πεπερασμένες** ακολουθίες (υπόλοιποι όροι θεωρούνται 0).
 - ΓΣ ακολουθίας $0, 0, 1, 2, 3, 4, 5$: $x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6$
 - ΓΣ ακολουθίας $a_k = C(n, k)$: $(1+x)^n$
- ΓΣ ακολουθίας $a_n = n+1$:
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$
 - ΓΣ ακολουθίας $\beta_n = n$: $B(x) = x/(1-x)^2$
- Ακολουθία που αντιστοιχεί σε ΓΣ $A(x) = 5/(1-4x)$: $a_n = 5 \cdot 4^n$

Παραδείγματα

- Ακολουθία αντιστοιχεί σε ΓΣ $A(x) = 1/(1+x)$;
 - Γενικευμένο δυωνυμικό ανάπτυγμα (όταν n δεν είναι φυσικός):

$$(1+x)^n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k$$

- Ειδικότερα, αν n φυσικός: $\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$
- Δηλαδή η $1/(1-x)^n$ είναι η ΓΣ για συνδυασμούς k από n αντικείμενα με επανάληψη (ή διανομή k ίδιων αντικειμένων σε n διακ. υποδοχές).

- Με βάση γενικευμένο δυωνυμικό ανάπτυγμα,

$$\frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)(-1-1)\cdots(-1-k+1)}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k$$

- Άρα η ΓΣ $A(x) = 1/(1+x)$ αντιστοιχεί στην ακολουθία $a_n = (-1)^n$

Πράξεις Ακολουθιών

□ Πράξεις μεταξύ ακολουθιών:

■ Διαβάθμιση με συντελεστή c : $(c\alpha)_n = c\alpha_n$

■ Γραμμικός συνδυασμός: $(c\alpha + d\beta)_n = c\alpha_n + d\beta_n$

■ Δεξιά ολίσθηση κατά k θέσεις:

$$(S^k \alpha)_n = \begin{cases} 0 & \text{για } n = 0, \dots, k-1 \\ \alpha_{n-k} & \text{για } n \geq k \end{cases}$$

■ Αριστερή ολίσθηση κατά k θέσεις: $(S^{-k} \alpha)_n = \alpha_{n+k}$

■ Ακολουθία μερικών αθροισμάτων: $\gamma_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k$

■ Ακολουθία συμπληρωματικών μερικών αθροισμάτων: $\delta_n = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k$

■ Ευθεία διαφορά: $(\Delta \alpha)_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$

■ Ανάστροφη διαφορά (ολίσθ. ευθείας 1 θέση δεξιά): $(\nabla \alpha)_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$

■ Συνέλιξη: $(\alpha * \beta)_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k}$

Βασικές Ιδιότητες

□ Γραμμική ιδιότητα:

■ Η ακολουθία $c\mathbf{a} + d\mathbf{b}$ έχει ΓΣ την $c A(x) + d B(x)$.

■ Η ΓΣ $\frac{10-38x}{1-6x+8x^2} = \frac{1}{1-4x} + \frac{9}{1-2x}$ έχει ακολουθία την $4^n + 9 \cdot 2^n$

■ Η ΓΣ $\frac{9-47x}{1-10x+21x^2} = \frac{5}{1-3x} + \frac{4}{1-7x}$ έχει ακολουθία την $5 \cdot 3^n + 4 \cdot 7^n$

□ Ιδιότητα ολίσθησης:

■ Η ακολουθία $S^k \mathbf{a}$ έχει ΓΣ την $x^k A(x)$, αφού:

$$x^k A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^{n+k} = \sum_{n=0}^{k-1} 0x^n + \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_{n-k} x^n$$

■ Π.χ. $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots$ έχει ΓΣ την $x^4/(1-x)$

$0, 0, 1, 2, 4, \dots, 2^{n-2}$ έχει ΓΣ την $x^2/(1-2x)$

■ Η ακολουθία $S^{-k} \mathbf{a}$ έχει ΓΣ την $x^{-k} \left(A(x) - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i x^i \right)$

■ Π.χ. η ακολουθία $\alpha_n = 2^{n+3}$ έχει ΓΣ την

$$x^{-3} \left[\frac{1}{1-2x} - 1 - 2x - 4x^2 \right] = \frac{8}{1-2x}$$

Βασικές Ιδιότητες

- Μερικών αθροισμάτων: $\gamma_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k$
 - Παρατηρούμε ότι $a_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$
 - Άρα $A(x) = \Gamma(x) - x\Gamma(x) \Rightarrow \Gamma(x) = A(x) / (1-x)$.
 - Π.χ. $\gamma_n = n+1$ είναι ακολουθία μερικών αθροισμάτων της $a_n = 1$.
 - Άρα έχει ΓΣ την $\Gamma(x) = 1/(1-x)^2$
 - Ποια είναι η ΓΣ της $\beta_n = n(n+1)/2$;
 - Η β_n αποτελεί την ακολουθία μερικών αθροισμάτων της $\delta_n = n$, η οποία έχει ΓΣ την $D(x) = x/(1-x)^2$.
 - Άρα έχει ΓΣ την $B(x) = x/(1-x)^3$
- Συνέλιξη $\alpha * \beta$ έχει ΓΣ την $A(x) B(x)$.
 - Ο συντελεστής του x^n στο $A(x) B(x)$ είναι $(\alpha * \beta)_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k}$
 - Ποια είναι η ΓΣ της ακολουθίας $\alpha_n = \sum_{k=0}^n 3^k 2^{n-k}$
 - Από ιδιότητα συνέλιξης, $A(x) = 1/[(1-3x)(1-2x)]$

Βασικές Ιδιότητες

□ Ιδιότητα της Κλίμακας:

- Η ακολουθία $\gamma_n = n a_n$ έχει ΓΣ την $\Gamma(x) = x A'(x)$, αφού

$$\Gamma(x) = xA'(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n x^n)' = x \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n\alpha_n) x^n$$

- Η ακολουθία $\delta_n = a_n / (n+1)$ έχει ΓΣ την $\Delta(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(z) dz$

$$\Delta(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(z) dz = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \alpha_n z^n dz = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n+1} x^n$$

Παραδείγματα

- Ποια είναι η ΓΣ της ακολουθίας $\beta = c a + d$;
 - $B(x) = c A(x) + d/(1-x)$
- Ποια είναι η ΓΣ της ακολουθίας $\beta_n = c^n a_n$;
 - $B(x) = A(cx)$
- Ποια είναι η ακολουθία με ΓΣ την $A(x) = 4x + 2/(1-3x)$;
 - $a_0 = 2, a_1 = 10, a_n = 2 \cdot 3^n, \text{ για } n \geq 2.$
- Ποια είναι η ακολουθία με ΓΣ την $A(x) = 2/(1 - 4x^2)$;
 - Ανάλυση σε κλάσματα: $A(x) = 1/(1-2x) + 1/(1+2x)$
 - Ακολουθία $a_n = 2^n + (-2)^n$
- Ποια είναι η ακολουθία με ΓΣ την $A(x) = \frac{22x^3 - 9x^2 - 14x - 1}{(1+x)(1+3x)(1-2x)^2}$
 - Ανάλυση σε κλάσματα: $A(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+3x} - \frac{1}{1-2x} - \frac{2}{(1-2x)^2}$
 - Ακολουθία $a_n = (-1)^n + (-3)^n - 2^n - (n+1)2^{n+1}$

Εφαρμογές

- ... των ΓΣ είναι πολλές και σημαντικές. Μεταξύ άλλων:
 - Υπολογισμός αθροισμάτων.
 - Επίλυση προβλημάτων συνδυαστικής.
 - Επίλυση αναδρομικών εξισώσεων.
- Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων:
 - Διατύπωση με βάση μια ακολουθία (ή συνδυασμό ακολουθιών) ώστε ο «κλειστός» τύπος για τον n -οστό όρο να δίνει τη λύση.
 - Υπολογισμός της ΓΣ της ακολουθίας (με βάση ιδιότητες ΓΣ).
 - Ανάπτυγμα ΓΣ και υπολογισμός έκφρασης για n -οστό όρο.
- Υπολογισμός αθροίσματος $\sum_{k=0}^n 3^k 2^{n-k}$
 - ΓΣ αντίστοιχης ακολουθίας \mathbf{a} είναι η $A(x) = 1/[(1-3x)(1-2x)]$
 - Ανάλυση σε κλάσματα: $A(x) = 3/(1-3x) - 2/(1-2x)$
 - Άθροισμα $= a_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$

Υπολογισμός Αθροισμάτων

- Υπολογισμός αθροίσματος $\sum_{k=0}^n k^2$
 - Ακολουθία $a_n = n$ έχει ΓΣ την $A(x) = x/(1-x)^2$
 - Ιδιότητα κλίμακας: $\beta_n = n^2$ έχει ΓΣ την $B(x) = x(1+x)/(1-x)^3$
 - Άθροισμα αντιστοιχεί στην ακολουθία μερικών αθροισμάτων της ακολουθίας β , η οποία έχει ΓΣ την $\Gamma(x) = x(1+x)/(1-x)^4$
 - Χρησιμοποιούμε $(1-x)^{-4} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{4+k-1}{k} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^k$
 - ... και έχουμε: $\frac{x^2}{(1-x)^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+1}{3} x^k$ και $\frac{x}{(1-x)^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+2}{3} x^k$
 - Άθροισμα = $\binom{n+1}{3} + \binom{n+2}{3} = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$
- Ομοίως να υπολογισθεί το άθροισμα $\sum_{k=0}^n k^3$

Προβλήματα Συνδυαστικής

- **Συνήθειες ΓΣ** χρησιμοποιούνται για την κωδικοποίηση και επίλυση προβλημάτων **συνδυασμών**.
 - Για κάθε αντικείμενο A , κωδικοποιούμε στον εκθέτη της μεταβλητής x πόσες φορές μπορούμε να το επιλέξουμε.
 - $1+x+x^2+x^3+\dots+x^p$: μπορούμε να επιλέξουμε το A $0, 1, \dots, p$ φορές (μπορεί άπειρο άθροισμα).
 - Σε αυτή τη φάση κωδικοποιούνται οι περιορισμοί.
 - Απαριθμητής για (επιλογές) αντικειμένου A .
 - Απαριθμητές για διαφορετικά αντικείμενα πολλαπλασιάζονται (κανόνας γινομένου) και δίνουν ΓΣ για συνδυασμούς από n αντικείμενα.
 - Ο συντελεστής του x^k στη ΓΣ αντιστοιχεί στον #συνδυασμών k από n αντικείμενα (υπό τους περιορισμούς που έχουμε θέσει).
 - Η ΓΣ κωδικοποιεί όλα τα ενδεχόμενα του πειράματος και #τρόπων να προκύψει κάθε ενδεχόμενο.

Παραδείγματα

- Συνδυασμοί από n αντικείμενα χωρίς επαναλήψεις:
 - Απαριθμητής για κάθε αντικείμενο: $1+x$
 - ΓΣ $(1+x)^n$. Συντελεστής $x^k = C(n, k)$.
- Συνδυασμοί από n αντικείμενα με απεριόριστες επαναλήψεις:
 - Απαριθμητής για κάθε αντικείμενο: $1+x+x^2+x^3+\dots = 1/(1-x)$
 - ΓΣ $1/(1-x)^n$. Συντελεστής $x^k = C(n+k-1, k)$.
- Συνδυασμοί από n αντικείμενα με απεριόριστες επαναλήψεις ώστε κάθε αντικείμενο να επιλεγεί τουλάχιστον 1 φορά:
 - Απαριθμητής για κάθε αντικείμενο: $x+x^2+x^3+\dots = x/(1-x)$
 - ΓΣ $x^n/(1-x)^n$. Συντελεστής $x^k = C(k-1, n-1)$.

Παραδείγματα

- # λύσεων εξίσωσης $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 30$ στους **φυσικούς** αν z_1 άρτιος, θετικός ≤ 10 , z_2 περιττός ≤ 11 , $3 \leq z_3 \leq 10$, $0 \leq z_4 \leq 15$.
 - $A(x) = (x^2 + x^4 + \dots + x^{10})(x + x^3 + \dots + x^{11})(x^3 + x^4 + \dots + x^{10})(1 + x + x^2 + \dots + x^{15})$
 - Ζητούμενο δίνεται από συντελεστή x^{30} που είναι **185**.
 - Ο συντελεστής του x^{30} στην $A(x)$ **δεν ταυτίζεται** με αυτόν στην $A'(x) = (x^2 + x^4 + x^6 + \dots)(x + x^3 + x^5 + \dots)(x^3 + x^4 + x^5 + \dots)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$
- Κέρματα 20 λεπτών, 50 λεπτών, 1 ευρώ και 2 ευρώ.
Συνδυασμοί με συνολική **αξία n ευρώ** ώστε τουλάχιστον ένα κέρμα από κάθε είδος.
 - Κωδικοποιούμε στον εκθέτη την αξία των κερμάτων (σε λεπτά).
 - $A(x) = (x^{20} + x^{40} + \dots)(x^{50} + x^{100} + \dots)(x^{100} + x^{200} + \dots)(x^{200} + x^{400} + \dots)$
 - Το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του x^{100n}

Παραδείγματα

- #διανομών $2n+1$ ίδιων μπαλών σε 3 διακεκριμένες υποδοχές ώστε κάθε υποδοχή να έχει $\leq n$ μπάλες.

- Η ΓΣ είναι $A(x) = (1+x+x^2+\dots+x^n)^3 = (1-x^{n+1})^3/(1-x)^3$

- Το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του x^{2n+1}

- Με πράξεις:

$$\begin{aligned} A(x) &= (1 - 3x^{n+1} + 3x^{2n+2} - x^{3n+3}) \frac{1}{(1-x)^3} \\ &= (1 - 3x^{n+1} + 3x^{2n+2} - x^{3n+3}) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k \right) \end{aligned}$$

- Ο συντελεστής του x^{2n+1} είναι

$$\binom{2n+3}{2} - 3 \binom{n+2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Παραδείγματα

- ΓΣ για τη διανομή 20 μαρκαδόρων, 6 μαύρων, 10 πράσινων, και 4 κόκκινων, σε 2 καθηγητές ώστε κάθε καθηγητής να πάρει 10 μαρκαδόρους και τουλάχιστον 1 από κάθε χρώμα.
 - Διανομή στον 1^ο καθηγητή (σύμφωνα με περιορισμούς) καθορίζει τι θα πάρει ο 2^{ος} καθηγητής με μοναδικό τρόπο.
 - Αρκεί να διατυπώσουμε τη ΓΣ για τον 1^ο καθηγητή.
 - $(x+x^2+x^3+x^4+x^5)(x+x^2+\dots+x^9)(x+x^2+x^3)$
 - Το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του x^{10} που είναι 15.

Παραδείγματα

- 100 (μη διακεκριμένοι) επιβάτες κατεβαίνουν σε 4 (διακεκριμένες) στάσεις. Γεννήτρια Συνάρτηση όταν:
 - Δεν υπάρχουν περιορισμοί.
 - #ακεραίων λύσεων της $z_1+z_2+z_3+z_4 = 100$ με $z_1, z_2, z_3, z_4 \geq 0$.
 - $(1+x+x^2+x^3+\dots)^4 = 1/(1-x)^4$
 - Ζητούμενο δίνεται από συντελεστή x^{100} που είναι $C(103, 3)$
 - #επιβ. 3^η στάση \geq #επιβ. 2^η στάση \geq #επιβ. 1^η στάση.
 - Πρέπει $z_2 = z_1 + \kappa$, $\kappa \geq 0$, και $z_3 = z_2 + \lambda = z_1 + \kappa + \lambda$, $\lambda \geq 0$.
 - #ακεραίων λύσεων της $3z_1 + 2\kappa + \lambda + z_4 = 100$ με $z_1, \kappa, \lambda, z_4 \geq 0$.
 - $(1+x^3+x^6+\dots+x^{99})(1+x^2+x^4+\dots+x^{100})(1+x+x^2+\dots+x^{100})^2$
 - Ζητούμενο δίνεται από συντελεστή x^{100} που είναι 30787

Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

- ... για προβλήματα διατάξεων.
 - Διακεκριμένα αντικείμενα σε διακεκριμένες θέσεις.
 - Αναζητούμε τον συντελεστή τον συντελεστή του $x^k/k!$ (ουσιαστικά πολλαπλασιάζουμε τον συντελεστή του x^k με $k!$)
 - Λαμβάνουμε υπόψη διατάξεις στον σχηματισμό των απαριθμητών.
- Διατάξεις k αντικειμένων από n χωρίς επανάληψη.
 - $P(n, k) = C(n, k) \times k!$
 - Το $P(n, k)$ προκύπτει ως συντελεστής του $x^k/k!$ στο $(1+x)^n$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \frac{x^k}{k!}$$

Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

- Εκθετική Γεννήτρια Συν. $E(x)$ ακολουθίας \mathbf{a} : $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$
 - Συντελεστής του $x^n/n!$ αντιστοιχεί σε n -οστό όρο ακολουθίας \mathbf{a} .
- «Εκθετική» γιατί στην ακολουθία $1, 1, 1, \dots$ αντιστοιχεί η Εκθετική ΓΣ (ΕΓΣ) e^x λόγω της ταυτότητας:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- Εκθετικός απαριθμητής για μεταθέσεις n διαφορ. αντικ.: $x^n = n! \frac{x^n}{n!}$
- Εκθετικός απαριθμητής για μεταθέσεις n ίδιων αντικειμένων: $x^n/n!$
- ΕΓΣ για μεταθέσεις n αντικειμένων σε k ομάδες με ίδια αντικείμενα με πληθάρημο ομάδων n_1, n_2, \dots, n_k :

$$\frac{x^{n_1}}{n_1!} \cdot \frac{x^{n_2}}{n_2!} \cdot \dots \cdot \frac{x^{n_k}}{n_k!} = \frac{x^n}{n_1! \dots n_k!} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

Παραδείγματα

- ΕΓΣ για **διανομή k διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές χωρίς περιορισμούς και χωρίς να έχει σημασία η σειρά στις υποδοχές.**
 - Ισοδύναμα, ΕΓΣ για **διατάξεις k από n με απεριόριστες επανάληψεις.**
 - Εκθετικός απαριθμητής για κάθε υποδοχή: $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x$
 - Εκθετική ΓΣ: e^{nx} και ο συντελεστής $x^k/k!$ είναι n^k

Παραδείγματα

- Το ίδιο με περιορισμό καμία υποδοχή να μην μείνει κενή ($k \geq n$):
 - Εκθετικός απαριθμητής για κάθε υποδοχή: $e^x - 1$
 - Εκθετική ΓΣ: $(e^x - 1)^n$
 - Συντελεστής του $x^k/k!$ είναι ίσος με $\sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \binom{n}{\ell} (n - \ell)^k$
- Εφαρμογές:
 - Πρόγραμμα μελέτης 4 μαθημάτων για 7 ημέρες ώστε κάθε μάθημα να μελετηθεί τουλάχιστον 1 ημέρα.
 - «Διανομή» 7 διακ. ημερών σε 4 διακ. μαθήματα ώστε κανένα μάθημα να μην μείνει «κενό».
 - #«διανομών»: $4^7 - 4 \times 3^7 + 6 \times 2^7 - 4 = 8400$
 - Ανάθεση 20 μεταπτ. φοιτητών σε 5 εργαστήρια ώστε κάθε εργαστήριο να δεχθεί τουλάχιστον 1 φοιτητή.
 - #«αναθέσεων»: $5^{20} - 5 \times 4^{20} + 10 \times 3^{20} - 10 \times 2^{20} + 5$

Παραδείγματα

- #πενταδικών συμβ/ρών μήκους n με άρτιο πλήθος από 1:
 - Εκθετικός απαριθμητής για καθένα από τα ψηφία 0, 2, 3, 4:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x$$

- Εκθετικός απαριθμητής για ψηφίο 1:

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- Εκθετική ΓΣ: $e^4(e^x + e^{-x})/2 = (e^{5x} + e^{3x})/2$
- Συντελεστής του $x^n/n!$ είναι $(5^n + 3^n)/2$

Παραδείγματα

□ #πενταδικών συμβ/ρών μήκους n με άρτιο πλήθος 1 και περιττό πλήθος 0 όπου τα 2, 3, 4 εμφανίζονται τουλάχιστον 1 φορά.

■ Εκθετικός απαριθμητής για καθένα από τα ψηφία 2, 3, 4: $e^x - 1$

■ Εκθετικός απαριθμητής για ψηφίο 1: $(e^x + e^{-x})/2$

■ Εκθετικός απαριθμητής για ψηφίο 0:

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

■ Εκθετική ΓΣ: $(e^x - 1)^3 [(e^x + e^{-x})/2] [(e^x - e^{-x})/2]$

■ Συντελεστής του $x^n/n!$ είναι

$$(5^n - 3 \times 4^n + 3^{n+1} - 2^n + (-2)^n - 3 \times (-1)^n - 1)/4$$

Παραδείγματα

- ΕΓΣ για **διανομή k διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές χωρίς περιορισμούς και όταν έχει σημασία η σειρά στις υποδοχές.**
 - Επειδή έχει σημασία η σειρά σε κάθε υποδοχή, κατά το σχηματισμό του απαριθμητή, **πολλαπλασιάζουμε το $x^k/k!$ με $k!$**
 - Ο **εκθετικός** απαριθμητής για κάθε υποδοχή είναι:

$$1 + 1! \frac{x}{1!} + 2! \frac{x^2}{2!} + 3! \frac{x^3}{3!} + 4! \frac{x^4}{4!} + 5! \frac{x^5}{5!} + \dots = \frac{1}{1-x}$$

- Η (Ε)ΓΣ είναι $1/(1-x)^n$
- Το ζητούμενο δίνεται από τον **συντελεστή του $x^k/k!$** , που είναι:

$$\binom{n+k-1}{k} \times k! = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$